УДК 519.6

ПРЯМОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ БЕНДЖАМИНА

В. П. Стаценко, И. Н. Чистякова, Ю. В. Янилкин, В. Ю. Колобянин
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Численно исследуется процесс турбулентного перемешивания в экспериментах Бенджамина. Расчеты проводились с помощью прямого численного моделирования по двумерной методике ЭГАК и трехмерной методике ТРЭК. Результаты расчетов сравниваются как между собой, так и с известными расчетными и экспериментальными данными.

В работе [1] выполнены эксперименты на ударной трубе по исследованию турбулентного перемешивания (ТП) на границе двух газов, имеющей форму цилиндра, после прохождения ударной волны (УВ). В работе [2] выполнено двумерное численное моделирование этих экспериментов. В настоящей работе приводятся результаты аналогичных двумерных и трехмерных расчетов, проведенных соответственно по методикам ЭГАК [3] и ТРЭК [4].

Отметим, что расчеты данной задачи выполнялись без использования метода концентраций, так как с самого начала воздух и SF_6 находятся в перемешанном состоянии. В расчетах использовались два способа счета потоков из смешанных ячеек: донорный метод (DM) и кусочно параболический метод (PPM).

Постановка расчетов

Начальная геометрия расчетов показана на рис. 1,*а* (трехмерная геометрия) и на рис. 1,*б* (двумерное сечение).

В области 2 содержится воздух (см. рис. 1,*а*), в который через круглое сечение радиусом R вдувается струя SF_6 (область 3). Струя в процессе вдува слегка расширяется и перемешивается с воздухом. Вообще говоря, для правильного задания начальных условий задачи необходимо проведение прямого расчета процесса вдувания SF_6, однако использовался более простой подход. Авторы полагали, что область перемешивания воздуха и SF_6 представляет собой цилиндр радиусом R, в котором газы перемешаны и в среднем распределены по определенному закону, однако имеют локальные возмущения потока вследствие ТП. Так как масштаб этих возмущений неизвестен, то в расчетах они задавались как случайные возмущения плотности смеси воздуха и SF_6,

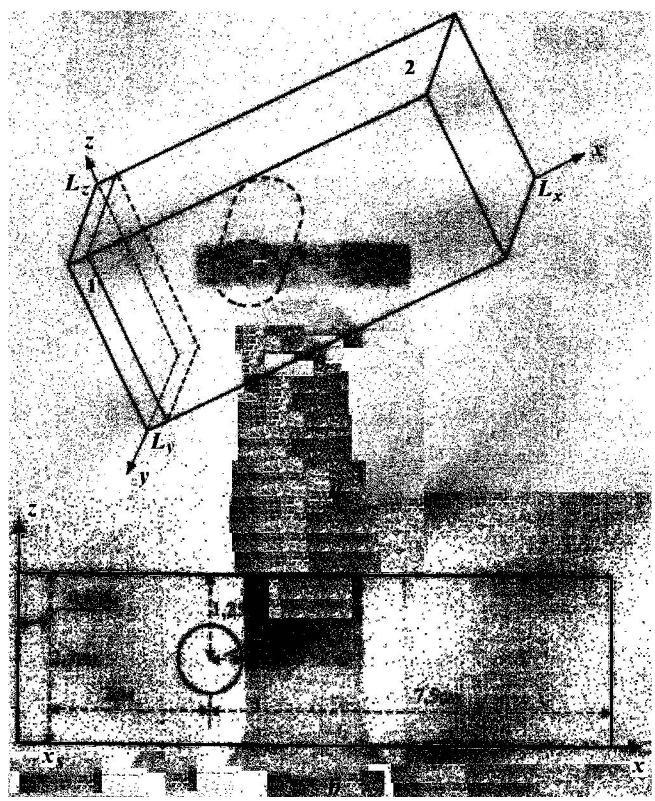


Рис. 1. Начальная геометрия системы

при этом амплитуда возмущений варьировалась. Со стороны левой границы по воздуху идет стационарная УВ (область 1), которая взаимодействует с областью, занятой SF_6. Динамика процесса взаимодействия и является целью данного исследования.

Задавались следующие начальные условия (см. рис. 1,*б*):

– невозмущенный воздух ($x > x_s$):

$$\rho_a = 10^{-3}\ \text{г/см}^3; \quad p_a = 8\cdot 10^5\ \text{г/см/с}^2;$$

– возмущенный воздух за фронтом УВ ($x < x_s$):

$$\rho_b=\rho_a\frac{(\gamma+1)M_s^2}{(\gamma-1)M_s^2+2}; \quad p_b=p_a\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_s^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right);$$

$$u_b = \sqrt{2p_a/\rho_a}\left[\frac{p_b/p_a-1}{\sqrt{\gamma-1+(\gamma+1)p_b/p_a}}\right],$$

где $M_s = 1{,}2$, т. е. $\rho_b = 1{,}3416\cdot 10^{-3}\ \text{г/см}^3$; $p_b = 1{,}21067\cdot 10^6\ \text{г/см/с}^2$; $u_b = 1{,}0226\times 10^4\ \text{см/с}$;

– невозмущенная смесь воздуха и SF_6 $\left(r < R = 0,5\,\text{см}, \quad r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$:

$\rho = \rho_{SF_6}(1-m_a/m_{SF_6}) + \rho_a$; $m_a = 28{,}84$; $m_{SF_6} = 146{,}06$; $\rho_{SF_6} = \rho_0\exp\left(-r^2/\delta\right)$ г/см^3; $\delta = 0{,}0902\,\text{см}^2$; $\rho_0 = \rho_a\dfrac{m_{SF_6}}{m_{air}} = 5{,}0645\times 10^{-3}$; $p = p_a = 8\cdot 10^5\ \text{г/см/с}^2$.

Уравнения состояния:

– воздуха: $\varepsilon_a = \dfrac{p_a}{(\gamma_a-1)\rho_a}$, где $\gamma_a = 1{,}4$;

– SF_6: $\varepsilon_{SF_6} = \dfrac{p_{SF_6}}{(\gamma_{SF_6}-1)\rho_{SF_6}}$;

– невозмущенной смеси воздуха и SF_6:

$$\varepsilon = \frac{p}{(\gamma-1)\rho};$$

$$\frac{1}{(\gamma-1)} = \frac{c_a}{(\gamma_a-1)\left(c_a+c_{SF_6}\dfrac{m_a}{m_{SF_6}}\right)} + \frac{c_{SF_6}}{(\gamma_{SF_6}-1)\left(c_{SF_6}+c_a\dfrac{m_{SF_6}}{m_a}\right)}.$$

Здесь $\gamma_{SF_6} = 1{,}087$; c_a, c_{SF_6} — массовые концентрации воздуха и SF_6 соответственно.

Граничные условия: на левой границе $u = u_b$; $p = p_b$; $\rho = \rho_b$; на правой и верхней границах — условие *свободного вытекания*, нижняя граница — *жесткая стенка*.

В силу того что область SF_6 проходит большое расстояние, расчеты проводились на движущейся счетной области. Скорость движения области определялась на каждый момент времени и равнялась максимальной массовой скорости узлов счетной сетки на правой границе после прихода на нее УВ. Счетная сетка перестраивалась в соответствии со скоростью движения области.

В трехмерных расчетах (и только в них) задавались начальные возмущения плотности в ячейках, содержащих смесь воздуха и SF_6: $\tilde{\rho} = \rho\,(1\pm\delta_\rho)$, где значение δ_ρ варьировалось от 0,01 до 0,05. Используемая система единиц: г, см, 10 мкс.

Проведено 6 двумерных и 4 трехмерных расчета, варьируемые параметры которых приводятся в табл. 1.

Таблица 1

Постановка расчетов

Номер варианта	Размерность расчета	Размер счетной ячейки, см	Счетный метод	δ_ρ
1	2D	0,0125	DM	-
2	2D	0,0125	PPM	-
3	2D	0,00625	DM	-
4	2D	0,00625	PPM	-
5	2D	0,00416	DM	-
6	2D	0,00416	PPM	-
7	3D	0,025	PPM	0,05
8	3D	0,025	PPM	0,01
9	3D	0,0125	DM	0,05
10	3D	0,0125	PPM	0,05

Результаты расчетов

Растровые картины плотности в двумерных расчетах. На рис. 2 показаны растровые картины плотности для вариантов расчетов 1 и 2, выполненных на одинаковой (грубой) счетной сетке с использованием методов DM и PPM. При сходстве общей картины течения заметно, что при расчете по методу DM сглаживаются детали, наблюдающиеся в расчете по PPM.

На рис. 3 показано аналогичное сравнение растровых картин плотности для двумерных расчетов, выполненных на более подробной счетной сетке ($h = 62{,}5$ мкм). На данной сетке применение метода DM позволяет получить более детальную картину, в частности, небольшой, но отчетливо воспроизводимый (также и в расчете по

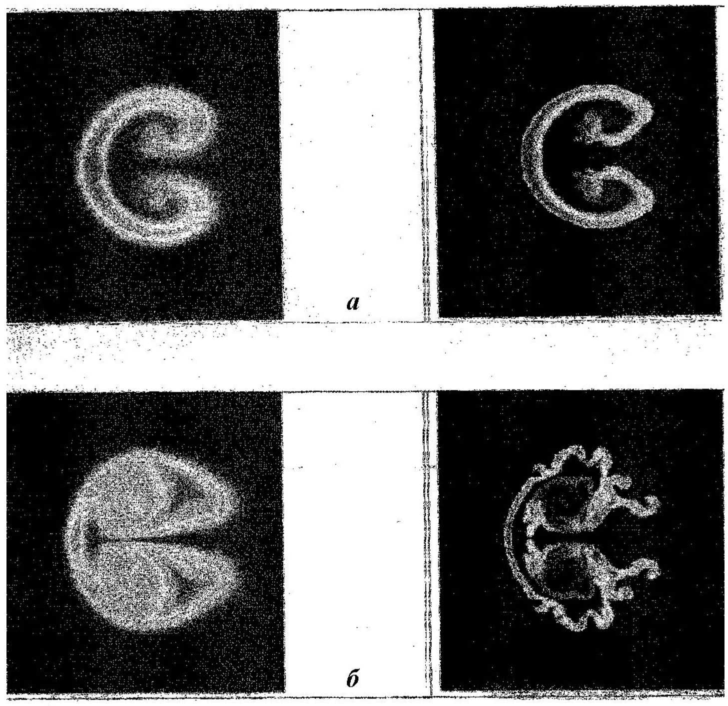


Рис. 2. Растровые картины плотности для двумерных расчетов с $h = 125$ мкм: a — $t = 400$ мкс; $б$ — $t = 800$ мкс; слева — метод DM, справа — метод PPM

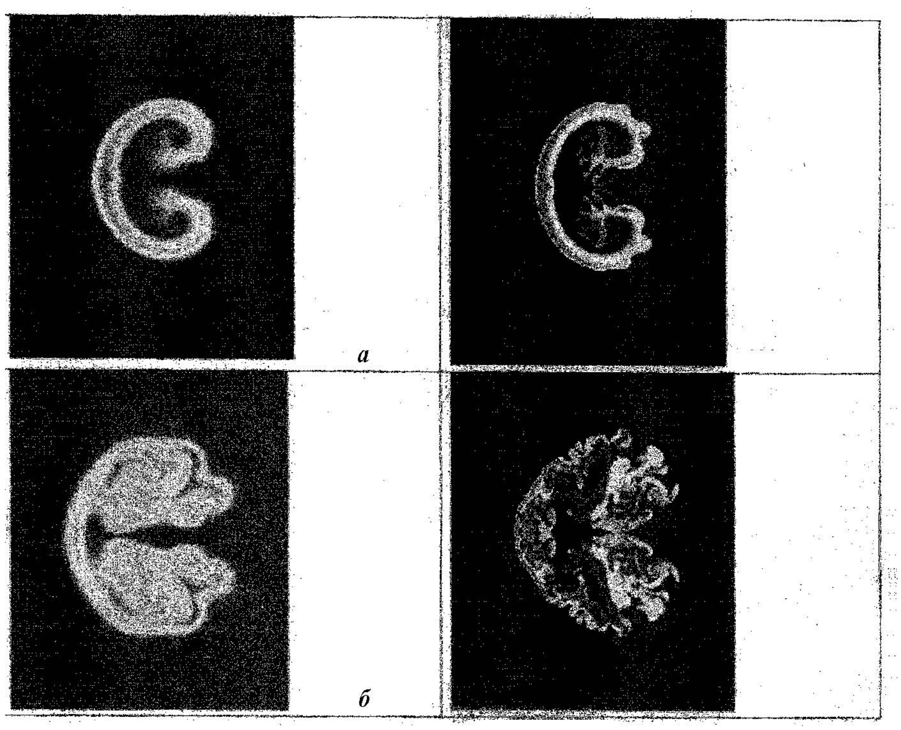


Рис. 3. Растровые картины плотности для двумерных расчетов с $h = 62{,}5$ мкм: a — $t = 400$ мкс; $б$ — $t = 800$ мкс; слева — метод DM, справа — метод PPM

методу PPM) выступ на оси симметрии, наблюдаемый, как и в опыте Бенджамина, до момента $t \approx 400$ мкс. По-прежнему при сходстве общей картины течения метод DM сглаживает детали, наблюдающиеся при расчете по методу PPM.

Для наиболее подробной счетной сетки в двумерных расчетах ($h = 41{,}6$ мкм) аналогичное сравнение растровых картин плотности показано на рис. 4. На данной сетке уже упоминавшийся выступ на оси симметрии получается более заметным. По-прежнему метод PPM дает более детальную картину течения.

Растровые картины плотности в трехмерных расчетах. Растровые картины величины $\lg\langle\rho\rangle$ (плотность в трехмерных расчетах усреднена по координате y) для расчетов, выполненных на одинаковой (грубой) счетной сетке по методу PPM с начальными возмущениями 1 и 5 %, показаны на рис. 5. Как видно из этого рисунка, результаты практически не отличаются друг от друга, небольшое отличие наблюдается лишь в последние моменты времени.

Аналогичное сравнение растровых картин величины $\lg\langle\rho\rangle$ для расчетов, выполненных на более подробной счетной сетке ($h = 125$ мкм), показано на рис. 6. Здесь сравниваются результаты, полученные по методам DM и PPM.

Отметим, что во всех трехмерных расчетах практически отсутствует выступ на оси симметрии, имевший место в двумерных расчетах.

При сходстве общей картины течения метод DM сглаживает детали, наблюдающиеся при расчете по методу PPM. Еще более отчетливо это видно на растровых картинах поля плотности в различных сечениях ZX (различные значения y), показанных на рис. 7.

Растровые картины поля плотности в одном из сечений ZY на момент времени $t = 800$ мкс представлены на рис. 8.

Как и выше, при сходстве общей картины течения метод DM сглаживает детали, наблюдающиеся при расчете по методу PPM. Все это сказывается на спектральных характеристиках пульсаций плотности и скорости, что будет показано ниже.

Геометрические характеристики области, содержащей SF_6. Размеры (ширина $W = x_2 - x_1$ и высота $H = z_2 - z_1$) области, занятой SF_6, определялись по положению точек, в которых достигалось (при движении снаружи от указанной области) определенное значение величины

$$\zeta \equiv \frac{l_\rho - l_{\rho 1}}{l_{\rho 2} - l_{\rho 1}},$$

где $l_\rho \equiv \lg\rho$; $l_{\rho 1} \equiv \min(l_\rho)$; $l_{\rho 2} \equiv \max(l_\rho)$.

Результаты трехмерных расчетов на различных счетных сетках для значения $\zeta = 0{,}3$ показаны на рис. 9 как функции времени t, отсчет которого сдвинут по сравнению со временем в расчете: $t_{calc} - t = t_{calc} - t_0$, где $t_0 = 50$ мкс. На этом рисунке показаны также размеры области, занятой SF_6, для значения $\zeta = 0{,}3$, полученные в трехмерном расчете по методу PPM на сетке с $h = 125$ мкм, в сравнении с результатом двумерного расчета по тому же методу на такой же сетке.

Полученные результаты несколько ближе к опыту, чем данные расчета [2]. Следует также отметить регулярное превышение высотой и шириной области, полученными в расчете, соответствующих значений из расчета [2].

Степень смешения. По концентрациям SF_6 находится средняя величина степени смешения:

$$\theta = \frac{\left(\sum \Delta x \Delta y \Delta z\right)\left[\sum f_{SF_6}\left(1 - f_{SF_6}\right)\Delta x \Delta y \Delta z\right]}{\left(\sum f_{SF_6} \Delta x \Delta y \Delta z\right)\left[\sum \left(1 - f_{SF_6}\right)\Delta x \Delta y \Delta z\right]}.$$

Результаты расчета данной величины в виде ее зависимости от времени показаны для разных вариантов на рис. 10. Как видно, различие между собой результатов вариантов 10 и 7 (расчеты по методу PPM на подробной и грубой сетке соответственно) намного меньше, чем их отличие от результатов варианта 9 на подробной сетке, но выполненного методом DM, — он приводит к существенно большему перемешиванию.

Очевидно, метод PPM обеспечивает достаточную сходимость для θ. Наблюдаемое существенное различие в предельных значениях θ, полученных по методу DM и PPM, связано с различием схемной вязкости в этих методах. Для метода с меньшей схемной вязкостью (PPM) эта величина, как и следовало ожидать, меньше.

На рис. 10 показана также зависимость степени смешения $\theta(t)$, полученная в двумерном расчете по методу PPM на сетке с $h = 125$ мкм (вариант 2). Ее сравнение с соответствующей зависимостью из трехмерного расчета, выполненного по тому же методу на такой же сетке (вариант 10), показывает, что они в целом близки.

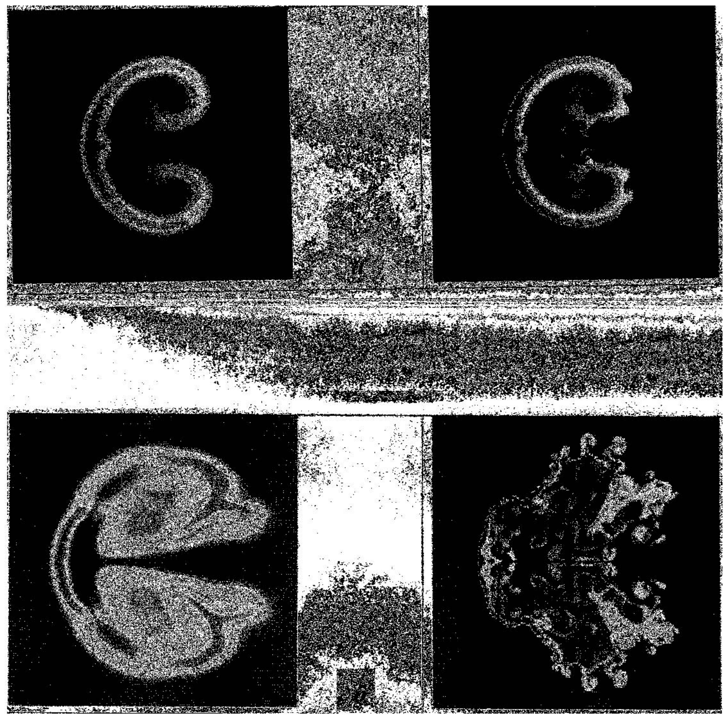


Рис. 4. Растровые картины плотности для двумерных расчетов с $h = 41{,}6$ мкм: *а* — $t = 400$ мкс; *б* — $t = 800$ мкс; слева — метод DM, справа — метод PPM

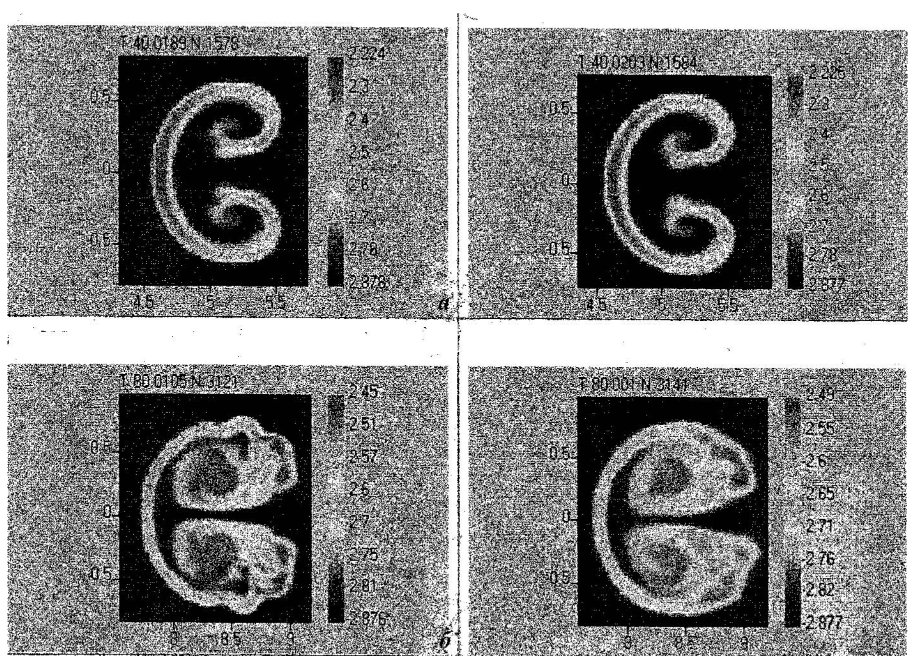
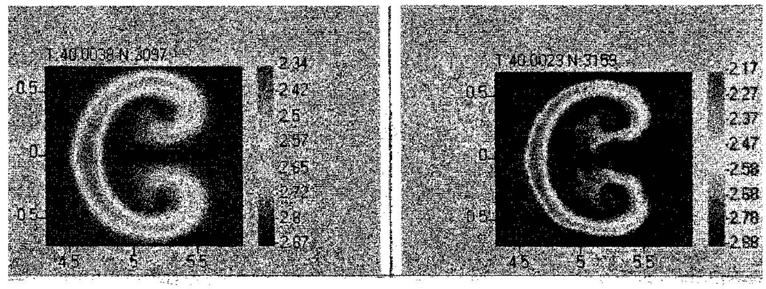
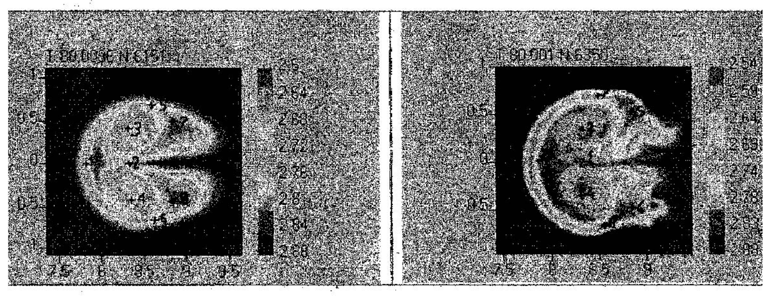


Рис. 5. Растровые картины средней плотности ($lg\langle\rho\rangle$) для трехмерных расчетов с $h = 250$ мкм по методу PPM: *а* — $t = 400$ мкс; *б* — $t = 800$ мкс; слева — с начальными возмущениями 1%, справа — 5%



а



б

Рис. 6. Растровые картины средней плотности ($\lg \langle\rho\rangle$) для расчетов с $h = 125$ мкм: a — $t = 400$ мкс; $б$ — $t = 800$ мкс; слева — метод DM, вариант 3; справа — метод PPM, вариант 4

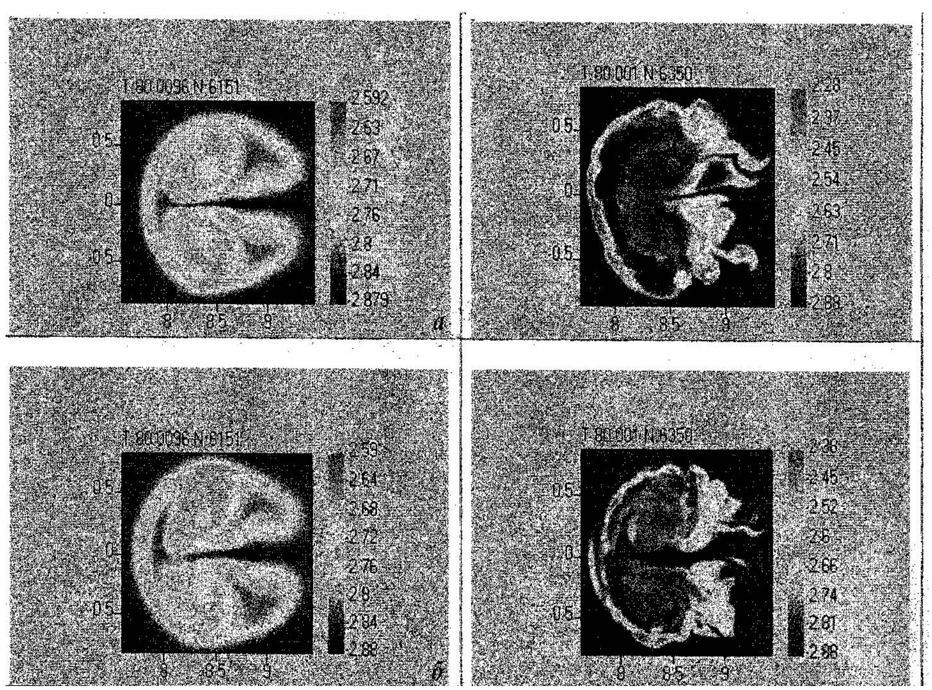


Рис. 7. Растровые картины плотности ($\lg\rho$) для расчетов с $h = 125$ мкм в различных сечениях, $t = 800$ мкс: a — $y = 0{,}125$; $б$ — $y = 1{,}425$; слева — метод DM, вариант 9; справа — метод PPM, вариант 10

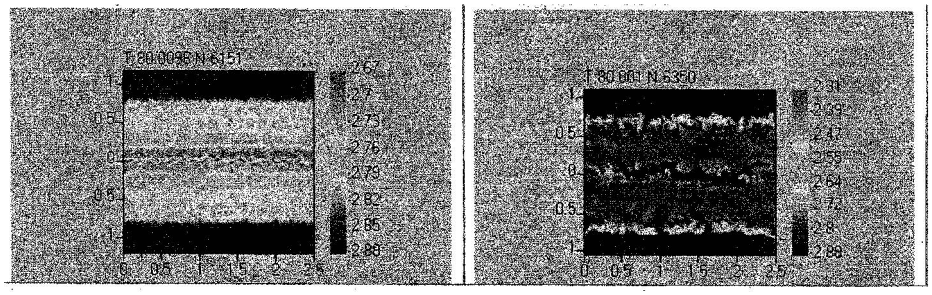


Рис. 8. Растровые картины плотности ($\lg\rho$) для расчетов с $h = 125$ мкм в сечении $x = 8{,}386$, $t = 800$ мкс: слева — метод DM, вариант 9; справа — метод PPM, вариант 10

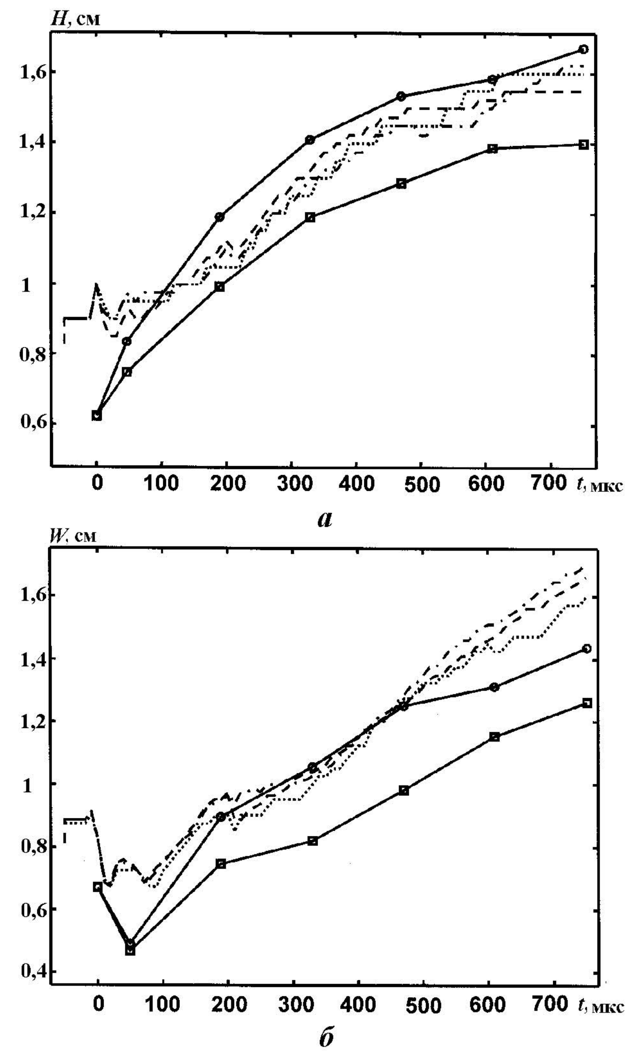


Рис. 9. Высота (*а*) и ширина (*б*) области, занятой SF_6, $\zeta = 0{,}3$: –⊟– — расчет [2]; –⊖– — эксперимент; $\cdots$ — расчет, вариант 7; – – – – расчет, вариант 9; – · – — расчет, вариант 10

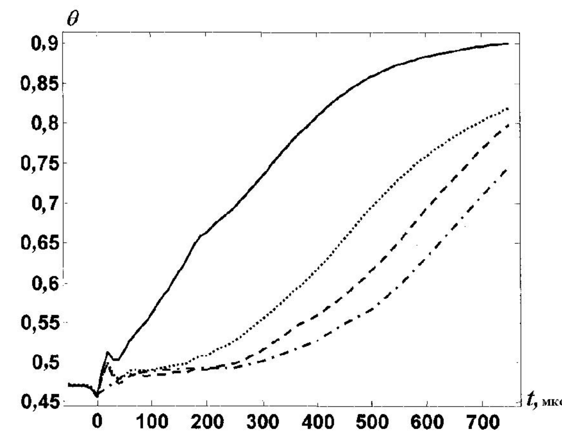


Рис. 10. Расчетные зависимости от времени степени смешения: – · – — вариант 2; $\cdots$ — вариант 7; —— — вариант 9; – – – — вариант 10

Спектральный анализ. На основе данных трехмерных расчетов был исследован спектр пульсаций скорости, а также спектр пульсаций плотности.

В силу постановки задачи пульсации статистически однородны по y. Тогда имеет смысл рассмотреть фурье-разложение скорости и плотности по y.

Итак, для каждой точки и некоторого момента времени (рассматриваем конечный момент $t_l = 800$) имеется исходный массив величин $f = u$ ($f = \rho$) в виде

$$f(x, y_n, z, t_l), \quad n = 0, 1, ..., N - 1.$$

Далее, имеем постоянное значение $dy = y_n - y_{n-1}$, т. е. возможно использование быстрого фурье-преобразования по координате y. Для этого используем следующее: если в промежутке $0 \le y < L_y$ ($L_y = L_z = 2{,}5$ см) функция $f(y)$ известна только в дискретной системе точек

$$y_n = \frac{nL_y}{N}, \quad n = 0, 1, ..., N-1,$$

то ее можно приблизить выражением

$$f(y) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^{(f)} \exp(iKy),$$

где

$$c_k = \sum_{j=0}^{N-1} f(y_j) \exp\left(-i\frac{2\pi kj}{N}\right); \quad K = \frac{2\pi k}{L_y}.$$

Примем $F(K) \equiv c_k c_k^* = \sum_i F_i,\ i = x, y, z,$ где F_i — спектральная плотность компонент скорости.

В инерционном интервале волновых чисел, где реализуется колмогоровский спектр, турбулентная энергия равна

$$E(K) = \int_K^\infty F(K')dK' \sim K^{-2/3}.$$

Следовательно, спектральная плотность равна

$$F(K) = c_k c_k^* \sim K^{-5/3},$$

что и представляет собой одномерный колмогоровский спектр.

Аналогичный результат в инерционном интервале турбулентности имеем для спектральной плотности F_i компонент скорости.

Точно так же для квадратичных пульсаций плотности в инерционном интервале имеем

$$\sigma(K) = \int_K^\infty F^{(\rho)}(K')dK' \sim K^{-2/3},$$

где спектральная плотность

$$F^{(\rho)} \sim K^{-5/3}$$

соответствует $f(y) = \rho(y)$.

Анализировалась область, содержащая SF_6, получающаяся в результате трехмерного расчета в варианте 10 на момент $t = 800$ мкс. Спектральный анализ проводился для точек (см. рис. 6, а также табл. 2), содержащихся в разных частях этой области.

Результаты для спектра плотности, полученные с помощью методов DM и PPM, приведены на рис. 11. Графики на рисунке имеют вид зависимости $\lg F^{(\rho)}(\lg K)$. Там же приведен колмогоровский спектр

$$\lg F^{(\rho)} = -\frac{5}{3} \lg K + \text{const}, \quad K = \frac{2\pi k}{L_y}.$$

Как видно из рис. 11, в расчете по методу PPM (вариант 10) спектры пульсаций плотности в целом ближе к колмогоровскому спектру, чем в расчете по методу DM (вариант 9).

Результаты для спектра скорости, полученные с помощью методов DM и PPM, показаны на рис. 12. Графики на рисунке имеют вид зависимости $\lg F_i(\lg K)$. Там же приведен колмогоровский спектр

$$\lg F = -\frac{5}{3} \lg K + \text{const}.$$

Как видно из рис. 12, и спектры пульсаций скорости в расчете по методу PPM в целом ближе к колмогоровскому спектру, чем в расчете по методу DM.

Отметим также, что пульсации скорости в расчете по методу PPM становятся в основном изотропными, за исключением наибольших волновых векторов (малых пространственных масштабов), где y-компонента подавлена по сравнению с двумя другими компонентами. Можно предполагать, что в этом случае проявляется роль схемной вязкости.

Выводы

Проведенные расчеты опытов Бенджамина показали:

1. Растровые картины плотности практически неотличимы для трехмерных расчетов, выполненных на одинаковой (грубой) счетной сетке по методу PPM с различными начальными возмущениями.
2. Расчеты на подробной счетной сетке, отличающиеся лишь методом счета, показывают, что при сходстве общей картины течения метод DM сглаживает детали, наблюдающиеся при расчете по методу PPM.
3. Зависимости от времени геометрических размеров области, занятой SF_6, отличаются несущественно друг от друга в разных вариантах трехмерных расчетов и от зависимостей, полученных в двумерных расчетах.

Таблица 2

Координаты точек, в которых проводился спектральный анализ

Вариант 9			Вариант 10		
Номер точки	x	z	Номер точки	x	z
1	7,8	0	1	8,4	0
2	8,273	0	2	7,8	0
3	8,273	0,425	3	8,336	0,375

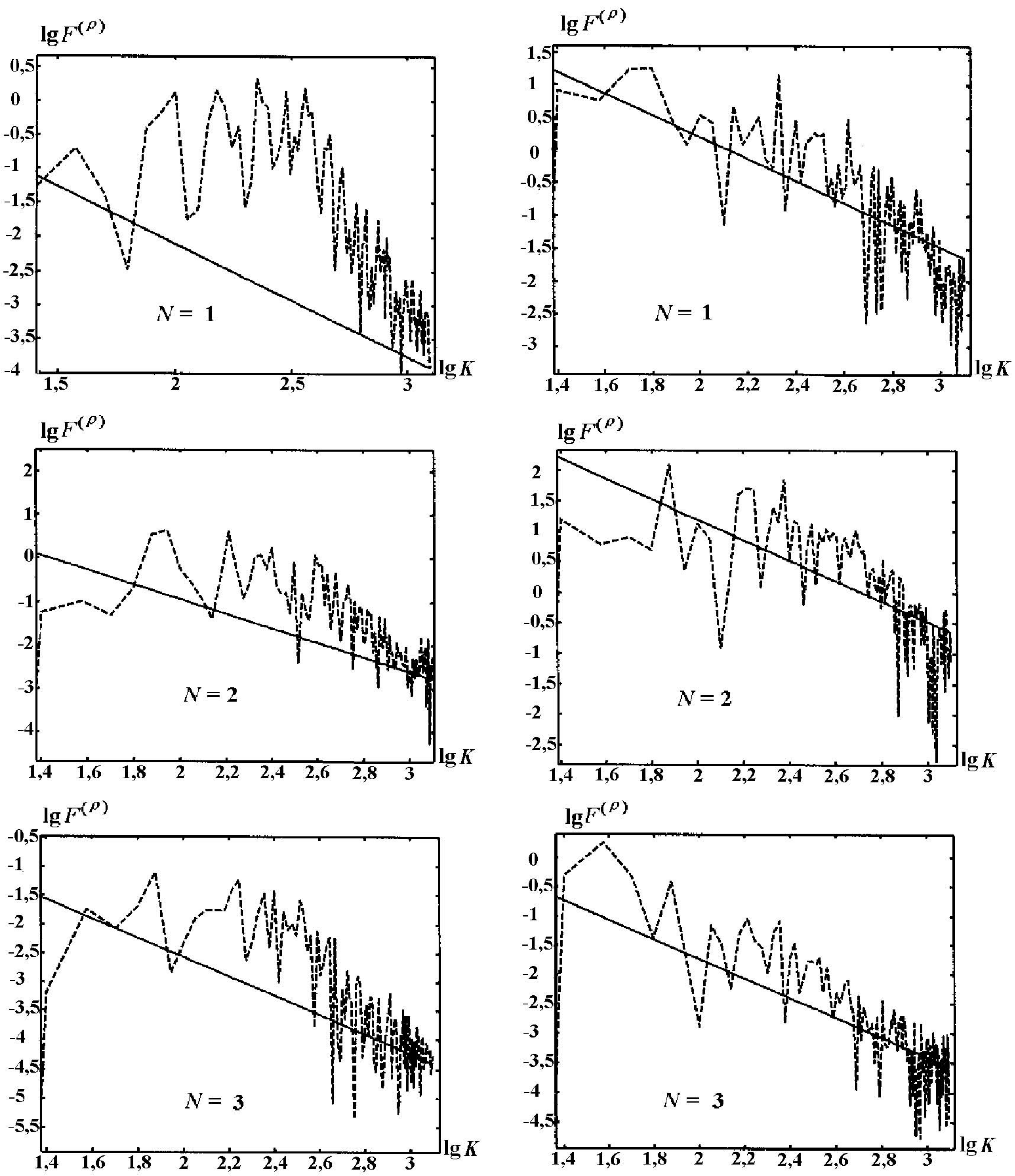


Рис. 11. Спектральный анализ пульсаций плотности в вариантах 9 (слева) и 10 (справа), $t = 800$ мкс: ––– — колмогоровский спектр; – – – – численный расчет; N — номер точки, в которой производился анализ

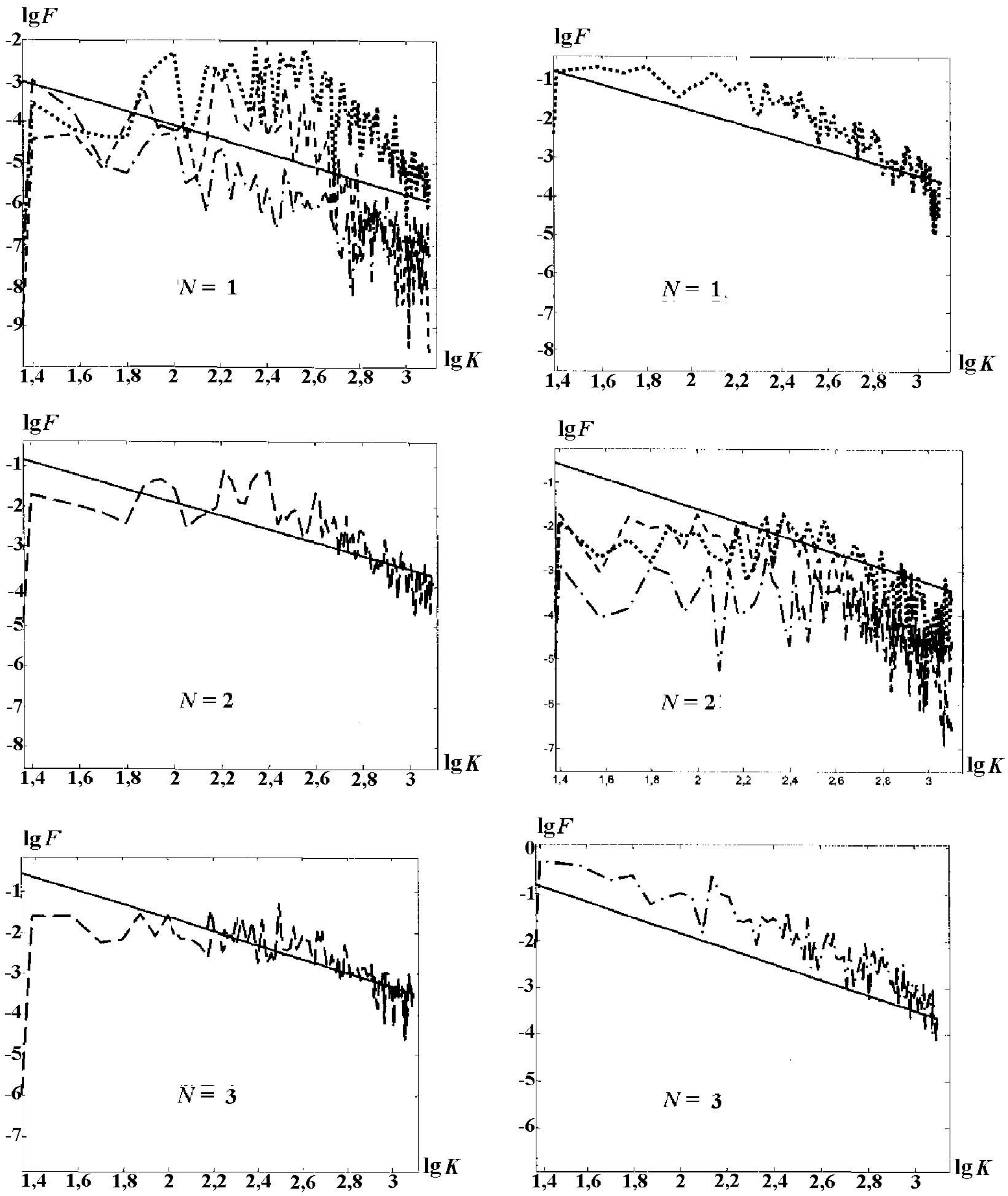


Рис. 12. Спектральный анализ пульсаций скорости в вариантах 9 (слева) и 10 (справа), $t = 80$ мкс: —— — колмогоровский спектр; $\cdots$ — F_x; – – – – F_y; – · – – F_z; — — — — F; N — номер точки, в которой производился анализ

Полученные результаты несколько ближе к опыту, чем данные расчета [2]. Следует также отметить регулярное превышение полученными высотой и шириной области соответствующих значений из расчета [2].

4. Зависимости от времени средней величины степени смешения в трехмерных расчетах несущественно зависят от счетной сетки, но использование метода DM приводит к существенно большему перемешиванию, чем PPM. Отличие результатов последнего от полученных в двумерном расчете мало.

Список литературы

1. *Zoldi C. A., Prestridge K., Rightley P. M., Benjamin R. F.* Simulations of a shock-accele-

rated gas cylinder and comparison with experimental images and velocity fields // 8th Int. Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing. Pasadena, USA, 2001.

2. *Greenough J. A., Rider W. J., Zoldi C., Katm J. R.* Code-to-code comparisons for the problem of shock acceleration of a diffuse dense gaseous cylinder // 54th Annual Meeting of the Division of Fluid Dynamics. San Diego, CA. November 18—20, 2001.

1. *Янилкин Ю. В., Шанин А. А., Ковалев Н. П. и др.* Комплекс программ ЭГАК для расчетов двумерных течений многокомпонентной среды // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып. 4. С. 69—75.

2. *Стадник А. Л., Шанин А. А., Янилкин Ю. В.* Эйлерова методика ТРЭК для расчета трехмерных газодинамических течений многокомпонентной среды // Там же. 1994. Вып. 4. С. 71—78.

Статья поступила в редакцию 24.08.05.