

УДК 532.546

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА РАССОЛА В ВОДОНОСНОМ ПЛАСТЕ

В. М. Конохов, А. Н. Чекалин
(НИИММ им. Н. Г. Чеботарева КГУ, г. Казань)

Предлагается численно-аналитический метод решения нелинейного уравнения гиперболического типа, описывающего фильтрацию рассола. При построении метода используются точные решения задач о распаде начального разрыва искомой функции. Проведено тестирование метода на модельных задачах. Показаны высокая эффективность и точность предложенного метода.

Введение

Существенной особенностью фильтрационных течений разноплотностных жидкостей в пористых средах является их неустойчивый характер. Такая ситуация типична для задач загрязнения пресноводных пластов техногенными или природными высокоминерализованными водными растворами (рассолами). Для учета неустойчивого характера движения, возникающего при внедрении тяжелой жидкости в легкую, в работах [1–11] предложены фильтрационная и фильтрационно-диффузионная модели, базирующиеся на известных уравнениях двухфазной фильтрации с фазовыми проницаемостями, линейно зависящими от соответствующих насыщенностей. В этих моделях рассол представляет собой первую фазу, а вода — вторую, каждая из которых движется по своим поровым каналам. Доля объема пор, занятая рассолом, называется насыщенностью порового пространства рассолом.

Указанные статьи в основном посвящены построению математических моделей и исследованию на основе вычислительных экспериментов характерных особенностей миграции высоко- и слабоконцентрированных соляных растворов в водоносных пластах сложной структуры при различных сценариях их загрязнения рассолами. В то же время вопросы разработки численного метода решения уравнения переноса насыщенности, который весьма успешно применялся авторами при компьютерном моделировании и привлекал внимание многих специалистов (см., на-

пример, [12]), как правило, оставались в стороне. Поэтому данная работа посвящена построению и тестированию численно-аналитического метода решения уравнения переноса.

Математическая фильтрационная модель

Уравнения, описывающие процесс двухфазной фильтрации рассола в водоносном пласте в предположении отсутствия диффузии и перемешивания жидкостей в рамках крупномасштабного приближения, могут быть записаны в виде (см., например, [1–3])

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{V}_1 + m \frac{\partial S}{\partial \tau} = 0; \quad (1)$$

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = -\frac{K^* K}{\mu_2} (\operatorname{grad} P + \rho \vec{g});$$

$$\vec{V}_1 = f \vec{V} + \frac{K}{\mu_2} \Psi \rho_{1-2} \vec{g}; \quad K^* = \mu K_1^* + K_2^*; \quad (2)$$

$$\Psi = f K_2^*; \quad \rho = f \rho_1 + (1 - f) \rho_2;$$

$$\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}; \quad \rho_{1-2} = \rho_1 - \rho_2; \quad f = \frac{\mu K_1^*}{K^*}, \quad (3)$$

где τ — временная переменная; V — суммарная скорость фильтрации; P — давление; S — насыщенность пористой среды рассолом (доля объема занятых им пор); K — абсолютная проницаемость; μ_i , ρ_i , V_i и K_i^* — вязкость, плотность, скорость и относительная фазовая проницаемость i -й фазы (индекс $i = 1$ соответствует рассолу, $i = 2$ — пресной воде); ρ — плотность двухфаз-

ной смеси; f — функция Баклея—Леверетта (для рассола в суммарном потоке). При неустойчивом характере движения, возникающем при внедрении тяжелого рассола в пресную воду, фазовые проницаемости K_i^* линейно зависят от соответствующих насыщенностей, так что $K_1^* = S$, $K_2^* = 1 - S$.

Относительно функций P и S система (1)—(3) является эллиптической и гиперболической соответственно. Постановка граничных условий для давления и насыщенности подробно обсуждается в [1, 3, 7, 10] и здесь на ней останавливаться не будем. Отметим лишь, что граничные условия для функции S должны быть заданы на тех частях границы, через которые рассол втекает в пласт. Эти условия связаны с решением системы (1)—(3) внутри области фильтрации, и их корректная постановка требует предварительного анализа поведения решения системы (прежде всего функции насыщенности S). Детальный анализ свойств решения обсуждается в [1, 2, 8, 10], где, в частности, показано, что:

- 1) на линиях разрыва абсолютной проницаемости функция S теряет непрерывность;
- 2) на границе между областями с различной проницаемостью в пласте могут формироваться отраженные скачки насыщенности.

Численная модель фильтрации рассола в слоисто-неоднородном пласте

Рассмотрим методику решения уравнений (1)—(3) на примере двумерных задач переноса рассола в вертикальном разрезе водоносного пласта слоисто-неоднородной структуры. Пусть пласт толщиной H и протяженностью L расположен под углом α относительно направления вектора \vec{g} ускорения свободного падения и состоит из N гидравлически взаимосвязанных слоев толщиной H_l с пористостью m_l и абсолютной проницаемостью K_l , $l = \overline{1, N}$. Значения параметров слоев могут существенно различаться, а сами слои могут содержать неоднородные (по абсолютной проницаемости) включения.

В области фильтрации $D = \{0 < x < L; 0 < z < H; t > 0\}$ требуется найти решение уравнений (1)—(3) с начальным условием $S(x, z, 0) = S_0(x, z)$, условиями сопряжения, выражающими равенства давлений и нормальных компонент скоростей фаз на линиях разрыва абсолютной проницаемости (на границах γ_l слоев пласта, $l = \overline{1, N-1}$), и граничными условиями для функций P и S (см. [1, 3, 7, 10]).

Область D покроем сеткой D_h с равномерным шагом $h_x = L/N_x$ по переменной x и неравномерным шагом по z . При этом в каждом слое шаг по z возьмем равномерным: $h_l = H_l/N_l$, ($l = \overline{1, N}$). С целью улучшения аппроксимации потоков будем рассматривать сдвинутую на полшага сетку как по x , так и по z в каждом слое. Тогда на границах области D и слоев γ_l будут располагаться не узлы сетки D_h , а границы элементарных ячеек $D_{i,k}$. Всего сетка будет содержать $N_x N_z$ внутренних узлов, где $N_z = \sum_{l=1}^n N_l$. Обозначим

через h_τ временной шаг и запишем в области D_h консервативные разностные уравнения, аппроксимирующие уравнения (1)—(3) при $i = \overline{1, N_x}$, $k = \overline{1, N_z}$:

$$h_x h_k L(V)_{i,k} = V_{i+1/2,k} - V_{i-1/2,k} + V_{i,k+1/2} - V_{i,k-1/2} = 0; \quad (4)$$

$$h_x h_k L(fV)_{i,k} - m_k \frac{h_x h_k}{h_\tau} (J_{i,k}^{t+h_\tau} - J_{i,k}^t) = 0; \quad (5)$$

$$J_{i,k} = \frac{1}{h_x h_k} \int_{D_{i,k}} S dx dy; \quad (6)$$

$$V_{i+1/2,k} = \frac{h_k}{h_x} (KK^*)_{i+1/2,k} \times (P_{i+1,k} - P_{i,k} - \rho_{i+1/2,k} g \sin \alpha); \quad (7)$$

$$V_{i,k+1/2} = \frac{h_x}{h_k} (KK^*)_{i,k+1/2} \times (P_{i,k+1} - P_{i,k} - \rho_{i,k+1/2} g \cos \alpha); \quad (8)$$

$$V_{1,i+1/2,k} = (fV + K \rho_{1-2} \Psi g \sin \alpha)_{i+1/2,k}; \quad (9)$$

$$V_{1,i,k+1/2} = (fV + K \rho_{1-2} \Psi g \cos \alpha)_{i,k+1/2}.$$

При вычислении $K_{i+1/2,k}^*$ используется значение $S_{i+1/2,k} = 0,5 (J_{i+1,k} + J_{i,k})$. С учетом наличия линии разрывов γ_l функции K по вертикальному направлению в полуузлах с номерами i и $k+1/2$ возьмем аппроксимацию [13]

$$(KK^*)_{i,k+1/2} = \frac{2 (KK^*)_{i,k+1} (KK^*)_{i,k}}{(KK^*)_{i,k+1} \frac{h_k}{h_{k+1}} + (KK^*)_{i,k}}. \quad (10)$$

О методе вычисления давления. Система разностных уравнений (4), (8), (9) суммарного потока используется для определения давления $P_{i,k}$. При заданных значениях $J_{i,k}$ она может быть эффективно решена итерационным методом [3, 11], обладающим высокой скоростью схо-

димости. При построении этого метода учитывается, что абсолютная проницаемость K может существенно различаться по слоям пласта и при этом шаги h_k могут быть в десятки раз меньше h_x .

Метод вычисления насыщенности. Прежде всего отметим, что для вычисления потоков $V_{1,i+1/2,k}$, $V_{1,i,k+1/2}$ через границы элементарных ячеек обычный метод с аппроксимацией скорости *против потока* [14–17] не пригоден (при двухфазной фильтрации разностную схему этого метода часто называют схемой *уголок* [18]), и должен быть построен специальный алгоритм, отражающий характерные особенности решения задачи. Продемонстрируем это на примере решения задачи фильтрации в вертикальной трубке тока единичного сечения.

1. *Фильтрация в однородной пористой среде.* Пусть ось ξ направлена вниз вдоль трубки тока, тогда скорость фильтрации первой фазы может быть записана в виде

$$V_1 = S[V + A(1 - S)], \quad A = \frac{K}{\mu_2 \rho_{1-2} g},$$

где $A > 0$, а суммарный поток V будет положительным, если он направлен в ту же сторону, что и вектор силы тяжести. Как показано в работе [1], скорость V_1 принимает максимальное значение \bar{V}_1 при $S = \bar{S}$ (рис. 1,а), которое определяется из соотношения

$$\bar{S} = \begin{cases} 0, & \text{если } V \leq -A; \\ 0,5 \left(1 + \frac{V}{A}\right), & \text{если } |V| < A; \\ 1, & \text{если } V \geq A. \end{cases}$$

Перепишем уравнение переноса насыщенности (1) в виде $m \frac{\partial S}{\partial \tau} + V_1' \frac{\partial S}{\partial \xi} = 0$, где коэффициент $V_1' = \frac{\partial V_1}{\partial S} = V + A(1 - 2S)$ характери-

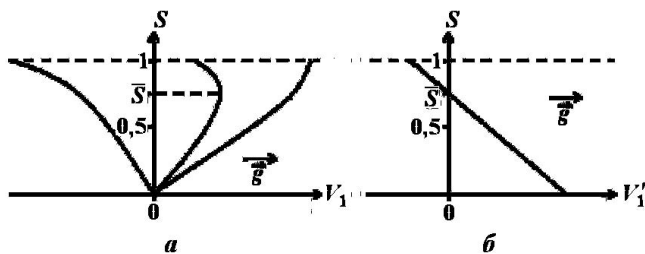


Рис. 1. Зависимости V_1 (а) и V_1' (б) от насыщенности S

зует скорость распространения насыщенности и является знакопеременной функцией, обращающейся в нуль при $S = \bar{S}$ (рис. 1,б). Отметим, что именно это обстоятельство осложняет разработку численных методов решения задач переноса.

Рассматриваемое одномерное уравнение переноса может быть решено методом характеристик. Пусть $\xi(S, 0)$ — распределение насыщенности в начальный момент времени $\tau = 0$. Тогда

$$\xi = \xi(S, 0) + V_1'(S) \frac{\tau}{m}. \quad (11)$$

Из решения (11) следует, что частицы со значениями насыщенности $S < \bar{S}$ будут двигаться по оси ξ в положительном направлении, со значениями $S > \bar{S}$ — в отрицательном направлении по отношению к начальному их расположению, а частицы со значением $S = \bar{S}$ останутся неподвижными. Если уравнение (11) приводит к многозначному решению, то вводят скачок насыщенности, определяемый из балансовых соотношений.

Теперь рассмотрим задачу о распаде начального разрыва при $|V| < A$. Пусть в некоторой точке $\bar{\xi}$ имеется скачок насыщенности и нужно определить поток V_1 в этой точке при $\tau > 0$.

Обозначим через D^- и D^+ некоторые окрестности слева и справа от точки $\xi = \bar{\xi}$, S^- и S^+ — постоянные (в начальный момент времени $\tau = 0$) значения насыщенности в областях D^- и D^+ соответственно. Это значит, что S^- и S^+ являются значениями насыщенности S слева (при $\xi < \bar{\xi}$) и справа (при $\xi > \bar{\xi}$) на скачке в точке $\bar{\xi}$. Вектор силы тяжести направлен из области D^- в область D^+ .

Покажем, что решение задачи (а значит, и скорость $V_1|_{\xi=\bar{\xi}}$) существенно зависит от соотношения значений S^- , S^+ и \bar{S} , и построим алгоритм вычисления $V_1|_{\xi=\bar{\xi}}$.

1.1. Для $S^- < \bar{S}$ и $S^+ < \bar{S}$ производная $V_1'(S) > 0$, и, следовательно, частицы с такими значениями насыщенности будут двигаться только в области D^+ в положительном направлении. В этом случае возможны два типа решения, показанные на рис. 2. Одно из них (см. рис. 2,а) соответствует случаю распада начального разрыва и находится из уравнения (11), другое (см. рис. 2,б) — случаю сохранения начального скачка насыщенности, так как уравнение (11) в данном случае приводит к многозначному решению, показанному на рис. 2,б тонкой

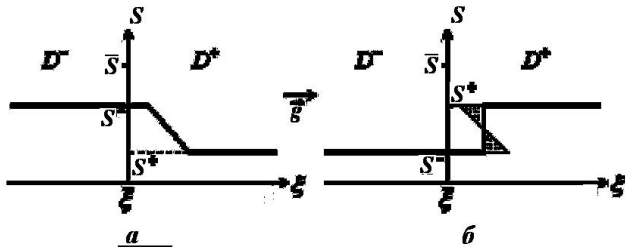


Рис. 2. Профили насыщенности в окрестности точки разрыва: $a - \bar{S} > S^- > S^+$; $b - \bar{S} > S^+ > S^-$

сплошной линией. При этом площади заштрихованных треугольников одинаковы.

Из рис. 2 видно, что поток V_1 в точке ξ в течение всего времени τ определяется значением S^- , т. е. $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1(S^-) = V_1^-$.

1.2. Для $S^- > \bar{S}$ и $S^+ > \bar{S}$ производная $V_1'(S) < 0$, и, следовательно, частицы с такими значениями насыщенности будут двигаться только в области D^- в направлении убывания координаты ξ . Обратим внимание, что при этом потоки V и V_1 могут быть противоположно направленными (например, при $V \in (0, A)$). Здесь, как и в случае 1.1, возможны два типа решения: или с распадом начального разрыва (рис. 3,а), или с сохранением скачка насыщенности (рис. 3,б). В точке $\xi = \bar{\xi}$ при $\tau > 0$ сохраняется значение S^+ , так что $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1(S^+) = V_1^+$.

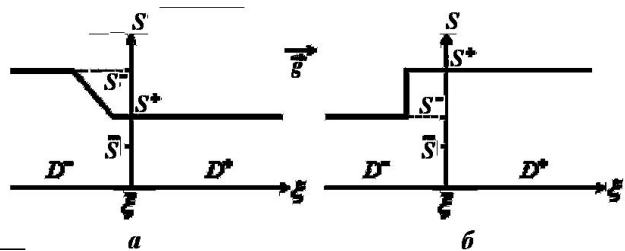


Рис. 3. Профили насыщенности в окрестности точки разрыва: $a - \bar{S} < S^+ < S^-$; $b - \bar{S} < S^- < S^+$

1.3. Пусть $S^- > \bar{S}$, а $S^+ < \bar{S}$. Так как $V_1'(S) < 0$ при $S \in (S^-, \bar{S})$, $V_1'(S) > 0$ при $S \in (S^+, \bar{S})$ и $V_1'(\bar{S}) = 0$, то при $\tau > 0$ частицы со значением \bar{S} останутся неподвижными в точке $\xi = \bar{\xi}$, а частицы со значениями S^- и S^+ будут двигаться в противоположных направлениях (каждая в своей области), удаляясь от границы $\xi = \bar{\xi}$ (рис. 4). Таким образом, в данной ситуации происходит распад начального разрыва с образованием неподвижной точки \bar{S} при $\xi = \bar{\xi}$, т. е. при $\tau > 0$ имеем $S|_{\xi=\bar{\xi}} = \bar{S}$; $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1(\bar{S}) = \bar{V}_1$.

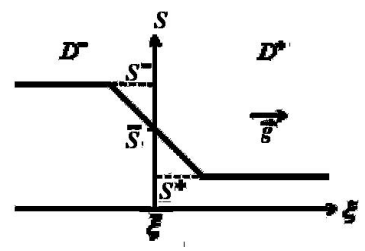


Рис. 4. Профиль насыщенности в окрестности точки разрыва при $S^+ < \bar{S} < S^-$

1.4. При $S^- < \bar{S}$ и $S^+ > \bar{S}$ начальный разрыв насыщенности сохраняется и скачок будет двигаться от точки $\bar{\xi}$ или в область D^- , или в область D^+ . Из балансовых соотношений и линейной зависимости $V_1'(S)$ следует, что если среднее значение насыщенности $S_{cp} = \frac{S^+ + S^-}{2} < \bar{S}$, то при $\tau > 0$ скачок будет двигаться в области D^+ и $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1^-$ (рис. 5). Если же $S_{cp} > \bar{S}$, то движение происходит в области D^- и $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1^+$. Нетрудно также убедиться в том, что $V_1^- < V_1^+$ при $S_{cp} < \bar{S}$ и $V_1^- > V_1^+$ при $S_{cp} > \bar{S}$, так что $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = \min\{V_1^+, V_1^-\}$.

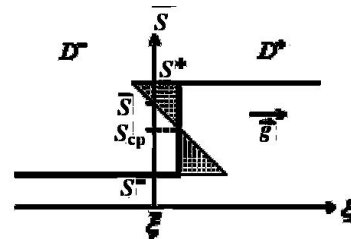


Рис. 5. Профиль насыщенности в окрестности точки разрыва при $S^- < S_{cp} < \bar{S} < S^+$

2. *Фильтрация в неоднородном пласте.* Теперь рассмотрим более сложный случай, когда точка $\xi = \bar{\xi}$ является точкой разрыва абсолютной проницаемости K . Как показано в работах [1, 2], в такой точке имеет место разрыв функции S . Кроме того, здесь может зарождаться отраженный скачок насыщенности. Так как суммарный поток V на линии разрыва K остается непрерывным, то скорость фильтрации V_1 первой фазы в областях D^- и D^+ в зависимости от параметра A будет определяться соотношениями $V_1 = S[V + A^-(1 - S)]$ и $V_1 = S[V + A^+(1 - S)]$.

Важную роль при решении задачи играет значение \bar{S} , при котором скорость V_1 в области с меньшей проницаемостью максимальна. Введем

обозначения: $\bar{A} = \min \{A^+, A^-\}$; $\bar{S} = \max \{0; \min \{0,5 (1 + V/\bar{A}), 1\}\}$; $\bar{V}_1 = \bar{S} [V + \bar{A} (1 - \bar{S})]$. На рис. 6 показаны характерные графики зависимостей $V_1^-, V_1^+, V_1'^-, V_1'^+$ от насыщенности S при $\bar{S} \in (0, 1)$, т. е. при $|V| < \bar{A}$.

Обратим еще раз внимание на важное свойство решения: в процессе фильтрации в области с большей проницаемостью при $\xi \rightarrow \bar{\xi}$ насыщенность не может принимать значения из интервала (S_1, S_2) (см. рис. 6,а), что следует из условия сопряжения $V_1^- = V_1^+$ при $\xi = \bar{\xi}$.

Перейдем теперь к задаче о распаде начального скачка насыщенности, расположенного в точке $\bar{\xi}$, в которой происходит разрыв абсолютной проницаемости K , и определим поток $V_1|_{\xi=\bar{\xi}}$ при $\tau > 0$.

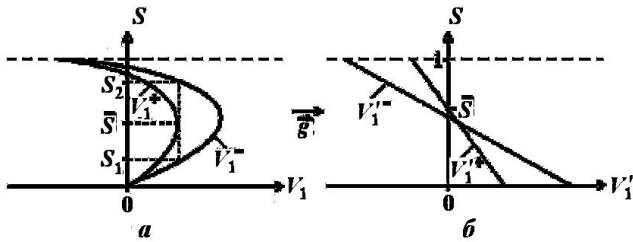


Рис. 6. Зависимости V_1^-, V_1^+ (а), $V_1'^-, V_1'^+$ (б) от насыщенности S при $A^- > A^+$

2.1. Пусть $S^- < \bar{S}$ и $S^+ < \bar{S}$. Здесь необходимо учесть все характерные особенности поведения решения на линии разрыва абсолютной проницаемости K , которые проявляются при определенных соотношениях между значениями S^-, S^+ и S_1 .

Сначала рассмотрим решение при $S^- \in (0, S_1)$. Так как частицы со значением S^- будут распространяться в положительном направлении, то при $\xi = \bar{\xi}$ возникнет скачок насыщенности от S^- до \bar{S} , значение которого определяется из условия сопряжения $V_1^- = \tilde{S} [V + (1 - \tilde{S}) A^+]$. При $\tau > 0$ этот скачок в точке $\xi = \bar{\xi}$ сохраняется неподвижным. В области D^+ поведение скачка, мгновенно образовавшегося за счет изменения насыщенности от \bar{S} до S^+ , зависит от знака разности $\bar{S} - S^+$. Если $\bar{S} > S^+$, то происходит распад разрыва, насыщенность вычисляется из уравнения (11) при $A = A^+$ и будет изменяться непрерывно от \bar{S} до S^+ (рис. 7,а). Если $\bar{S} < S^+$, то этот скачок при $\tau > 0$ сохраняется и движется в области D^+ (рис. 7,б). Таким образом, начальный скачок распадается на два скачка: неподвижный — от S^- до \bar{S} — и подвижный — от \bar{S} до S^+ . В обоих вариантах $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1^-$.

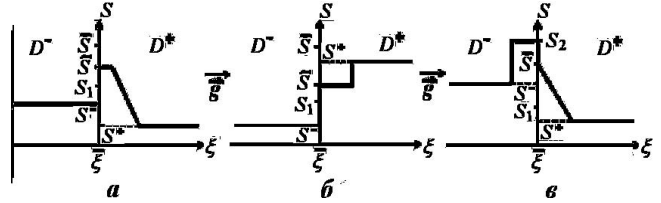


Рис. 7. Профили насыщенности в окрестности точки разрыва: а — $S^+ < S^- < S_1 < \bar{S} < \tilde{S}$; б — $S^- < S_1 < \tilde{S} < S^+ < \bar{S}$; в — $S^+ < S_1 < S^- < \bar{S} < S_2$

Существенно иное решение получается при $S^- \in (S_1, \bar{S})$. Так как при $\tau > 0$ в области D^- при $\xi = \bar{\xi}$ насыщенность не может принимать значения из рассматриваемого интервала, то на линии разрыва абсолютной проницаемости мгновенно устанавливается скачок насыщенности со значением \bar{S} со стороны области D^+ и значением S_2 со стороны области D^- . В результате в области D^- при $\xi = \bar{\xi}$ появляется отраженный скачок от S^- до S_2 , а в D^+ в силу условия $V_1^+(S^+) > V_1^+(\bar{S}) = 0$ насыщенность будет непрерывно убывать от \bar{S} до S^+ (рис. 7,в). Таким образом, при $\tau > 0$ в точке разрыва $\xi = \bar{\xi}$ насыщенность имеет постоянный скачок от \bar{S} до S_2 , при этом поток $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = \bar{V}_1$.

Учитывая соотношение $V_1^- > \bar{V}_1$, выполняющееся при $S^- \in (S_1, \bar{S})$, можем записать $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = \min \{V_1^-, \bar{V}_1\}$.

2.2. При $S^- > \bar{S}$ и $S^+ > \bar{S}$, возможны два типа решения задачи, показанные на рис. 8.

Так как $S^+ \in (\bar{S}, 1)$, то $V_1^+(S^+) < 0$ (см. рис. 6,б), и при $\tau > 0$ частицы со значением насыщенности S^+ будут двигаться в сторону убывания координаты ξ . Поэтому при $\xi = \bar{\xi}$ мгновенно появляется скачок от S^+ до \bar{S} , определяемый из условия сопряжения $V_1^+ = \tilde{S} [V + (1 - \tilde{S}) A^-]$.

В области D^- при $S^- \in (\bar{S}, \tilde{S})$ мгновенно появится скачок насыщенности, движущийся в сто-

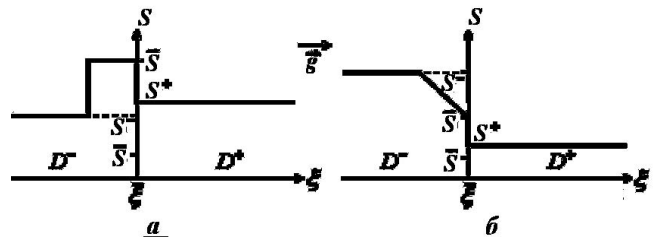


Рис. 8. Профили насыщенности в окрестности точки разрыва: а — $\bar{S} < S^- < S^+ < \tilde{S}$; б — $\bar{S} < S^+ < \tilde{S} < S^-$

рону убывания ξ (см. рис. 8,а), а при $S^- \in (\tilde{S}, 1)$ насыщенность определяется из уравнения (7) при $A = A^+$ и меняется непрерывно от S^- до \tilde{S} (см. рис. 8,б).

В области D^+ при $\tau > 0$ насыщенность равна S^+ и остается постоянной вплоть до границы $\xi = \bar{\xi}$.

Таким образом, при $\tau > 0$ поток $V_1|_{\xi=\bar{\xi}}$ определяется значением S^+ независимо от типа решения, т. е. $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1^+$.

2.3. Если $S^- > \bar{S}$, а $S^+ < \bar{S}$, то аналогично предыдущему случаю возможны два варианта решения задачи. При этом характер поведения решения изменяется только в области D^+ , где насыщенность S определяется из уравнения (11) при $A = A^+$ и меняется от значения \bar{S} , расположенного в точке $\xi = \bar{\xi}$, до значения S^+ (рис. 9).

На линии разрыва $\xi = \bar{\xi}$ мгновенно образуется не изменяющийся при $\tau > 0$ скачок насыщенности от \bar{S} до S_2 . В области D^- появляется отраженный скачок (см. рис. 9,а), если $S^- \in (\bar{S}, S_2)$, так как при $\tau > 0$ насыщенность S не может принимать значения из этого интервала при $\xi = \bar{\xi}$, и ее значение мгновенно становится равным S_2 . Если $S^- \in (0, 1)$, то функция S меняется непрерывно от S^- до S_2 (см. рис. 9,б). Следовательно, независимо от типа решения $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = \bar{V}_1$ при $\tau > 0$.

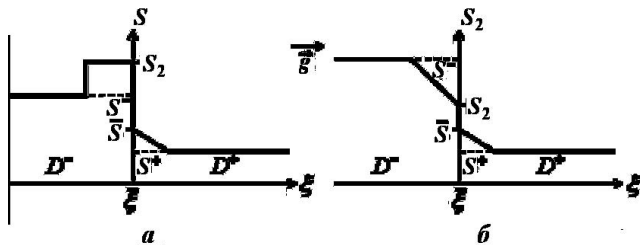


Рис. 9. Профили насыщенности в окрестности точки разрыва: а — $S^+ < \bar{S} < S^- < S_2$; б — $S^+ < \bar{S} < S_2 < S^-$

2.4. При $S^+ > \bar{S}$ и $S^- < \bar{S}$, более легкая жидкость находится над тяжелой и, следовательно, фронт насыщенности будет устойчивым, т. е. распада начального разрыва не произойдет. Действительно, насыщенность будет иметь подвижный скачок, так как $V_1^+(S^+) > 0$, а $V_1^-(S^-) < 0$. В какой области будет двигаться скачок, зависит от соотношения значений V_1^+ и V_1^- .

Если $V_1^+ < V_1^-$, то скачок будет двигаться в области D^- в направлении убывания координаты

ξ , а в области D^+ насыщенность S^+ изменяться не будет (рис. 10,а). Следовательно, при $\tau > 0$ будем иметь $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1^+$. Второе значение \tilde{S} скачка насыщенности при $\xi = \bar{\xi}$ определяется из условия сопряжения $V_1^+ = \tilde{S} [V + (1 - \tilde{S}) A^-]$. Это же значение определяет скачок (от S^- до \tilde{S}) в области D^- .

Если $V_1^+ > V_1^-$, то скачок от \tilde{S} до S^+ будет двигаться в области D^+ в сторону возрастания координаты ξ (рис. 10,б); $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1^-$, а значение \tilde{S} вычисляется из соотношения $V_1^- = \tilde{S} [V + (1 - \tilde{S}) A^+]$.

Таким образом, при $S^+ \in (\bar{S}, 1)$ и $S^- \in (0, \bar{S})$ будем иметь $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = \min \{V_1^-, V_1^+\}$.

Рис. 2–5 и 7–10 наглядно демонстрируют тот факт, что решения задачи о распаде начального разрыва в окрестности точки $\bar{\xi}$ при $K^+ = K^-$ и при $K^+ < K^-$ могут существенно различаться. В то же время формулы для определения потока $V_1|_{\xi=\bar{\xi}}$ отличаются только при $S^+ < \bar{S}$ и $S^- < \bar{S}$. Однако если учесть, что $V_1^- = \min \{V_1^-, \bar{V}_1\}$ при $K^+ = K^-$ (\bar{V}_1 обозначает минимальное значение потока V_1), то определение потока соотношением $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = \min \{V_1^-, \bar{V}_1\}$ при $S^+ < \bar{S}$ и $S^- < \bar{S}$ имеет место как для кусочно-постоянной, так и для постоянной абсолютной проницаемости пористой среды.

Аналогично можно рассмотреть решение задачи о распаде начального разрыва при $K^+ > K^-$. В этом случае различие в определении $V_1|_{\xi=\bar{\xi}}$ будет только при $S^+ > \bar{S}$ и $S^- > \bar{S}$, а именно вместо соотношения $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1^+$ должно быть $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = \min \{V_1^+, \bar{V}_1\}$. Нетрудно убедиться в том, что такое определение справедливо как при $K^+ = K^-$, так и при $K^+ < K^-$.

Итак, как следует из аналитического решения, поток $V_1|_{\xi=\bar{\xi}}$ в точке $\bar{\xi}$ расположения начального

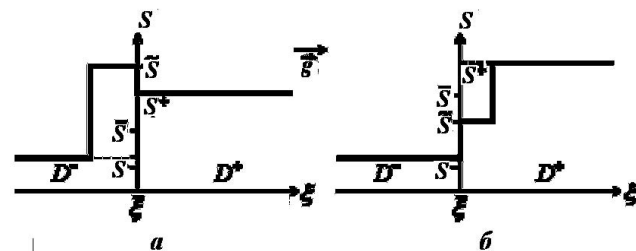


Рис. 10. Профили насыщенности в окрестности точки разрыва: а — $S^- < \bar{S} < S^+ < \tilde{S}$; б — $S^- < \tilde{S} < \bar{S} < S^+$

скачка насыщенности S определяется при $\tau > 0$ в зависимости от соотношения значений S^+ , S^- и \bar{S} независимо от наличия или отсутствия в этой точке скачка абсолютной проницаемости:

$$V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = \begin{cases} \min \{V_1^-, \bar{V}_1\}, & S^+ < \bar{S}, \quad S^- < \bar{S}; \\ \min \{V_1^+, \bar{V}_1\}, & S^+ > \bar{S}, \quad S^- > \bar{S}; \\ \bar{V}_1, & S^+ < \bar{S}, \quad S^- > \bar{S}; \\ \min \{V_1^-, V_1^+\}, & S^+ > \bar{S}, \quad S^- < \bar{S}, \end{cases} \quad (12)$$

где $\bar{S} = \max \{0; \min \{0,5 (1 + V/\bar{A}), 1\}\}$; $\bar{V}_1 = \bar{S} [V + (1 - \bar{S}) \bar{A}]$; $\bar{A} = \min \{A^+, A^-\}$. Очевидно, что при $\bar{S} = 0$ или $\bar{S} = 1$ в соотношении (12) реализуется только одно из условий.

Как известно, при численном решении задачи фильтрации в каждой элементарной ячейке сеточной области определяется среднеинтегральная величина насыщенности и $S(\xi)$ представляет собой кусочно-постоянную функцию. Таким образом, на каждом временном слое и на каждой границе ячейки необходимо решать задачу о распаде начального разрыва функции S .

Принципиальным моментом расчета является правильный выбор значений S , при которых следует вычислять поток V_1 через границы элементарных ячеек на следующем временном слое. Метод *против потока* предписывает брать значения насыщенности из той ячейки, из которой вытекает рассматриваемый поток. Однако здесь не только возникает неопределенность в выборе значения насыщенности на границе ячейки, когда V_1 имеет разные знаки при значениях S в соседних ячейках (такая ситуация может возникнуть, если значения суммарного потока V принадлежат диапазону $(-A, 0)$), но и само определение потока V_1 является неверным (ошибочным). Покажем, что этот факт имеет место, на примере случая, когда $V \in (0, A)$, а скорость V_1 тоже положительна при любых значениях S .

Пусть вектор силы тяжести направлен через границу $\xi = \bar{\xi}$ элементарных ячеек D^- и D^+ из области D^- в область D^+ . Обозначим соответствующие значения насыщенности в этих ячейках через S^- и S^+ . Так как $V \in (0, A)$, то $V_1(S) > 0$ при $S \in (0, 1)$ и, следовательно, при любых значениях насыщенности S поток направлен из ячейки D^- в ячейку D^+ . Тогда в соответствии с методом *против потока* будем иметь $V_1|_{\xi=\bar{\xi}} = V_1(S^-) = V_1^-$ при любых S^- и S^+ , принадлежащих интервалу $(0, 1)$. Однако, как показывает аналитическое решение задачи о распаде

начального разрыва насыщенности, такое определение потока V_1 верно лишь в некоторых частных случаях (см. первую и четвертую строки формулы (12)). В общем случае поток V_1^- должен определяться не только значением S^- , но и значением S^+ или \bar{S} . Поэтому для корректного вычисления потока V_1 следует использовать соотношение (12), которое справедливо при любых значениях V и A и не приводит к неопределенности ни при каких значениях этих величин.

Следует отметить, что использование схем сквозного счета при линейных фазовых проницаемостях приводит к сильному *размазыванию* переднего фронта насыщенности. Поэтому применяется прием *отслеживания* положения фронта с точностью до шага сетки на основе оценки времени τ_e подхода насыщенности к границе элементарной ячейки.

При нисходящем перемещении загрязнения, когда образуются языки рассола, наибольшая скорость движения насыщенности происходит при $S = 0$. В этом случае время, за которое фронт насыщенности проходит ячейку от входа в нее до выхода из нее, вычисляется из соотношения $\tau_e = e_{i,k}/v'_S(0)$, где $e_{i,k}$ — объем элементарной ячейки $D_{i,k}$; v'_S — производная от скорости рассола при $S = 0$ на границе втекания в рассматриваемую ячейку.

При восходящем движении рассола не происходит распада начального разрыва насыщенности и она движется скачком. Время прохождения ячейки фронтом насыщенности определяется по формуле $\tau_e = e_{i,k}S^+/v(S^+)$.

В алгоритме учитывается также то, что загрязнение занимает лишь область, ограниченную фронтом, так что вычисление потоков загрязнения проводится только в этой области.

Все это позволило значительно сократить время счета и повысить эффективность описанных выше алгоритмов при проведении многовариантных вычислительных экспериментов.

Тестирование численных решений на модельных задачах

Для качественной и количественной проверки разработанного численного метода были подобраны специальные одномерные тестовые задачи, позволяющие выявить характерные особенности искомого решения, а именно:

- 1) возникновение и развитие зоны неустойчивого движения (в которой $S < 1$);

- 2) возникновение и эволюцию скачка насыщенности, отраженного от линии разрыва абсолютной проницаемости и имеющего переменную амплитуду;
- 3) движение скачков насыщенности с переменной амплитудой как по направлению суммарной скорости фильтрации, так и против нее;
- 4) формирование неподвижного ядра загрязнения на границе разрыва абсолютной проницаемости в восходящем фильтрационном потоке.

Сегрегация (расслоение) рассола и воды в однородном пласте. Задача *рассол над водой*. Данный пример позволяет оценить точность численного решения на основе аналитического, имеющего особенности 1–3 при нулевой суммарной скорости фильтрации V .

Пусть в вертикальной трубке тока единичного сечения длиной $H = 100$ м с проницаемостью $K = 1$ мк², пористостью $m = 0,2$ в начальный момент времени $\tau = 0$ рассол занимает верхнюю половину трубки, $Z > Z_0 = 50$ м, а вода — нижнюю ее часть. Разность относительных удельных весов фаз равна $0,05$, $\mu = 1$, так что $A = 0,05$. Верхний и нижний концы трубки тока непроницаемы.

Запишем основные соотношения [19], получаемые из аналитического решения тестовой задачи:

$Z = Z_0 + A(1 - 2S)\tau/m$ — распределение насыщенности в области непрерывного ее изменения;

$\tau_1 = m(H - Z_0)/A$ — момент времени, в который передний фронт насыщенности достигает нижней границы области $Z = H$. Под передним фронтом подразумевается точка $Z = \zeta$, с одной стороны которой $S(\zeta + 0) = 0$, а с другой — $S(\zeta - 0) > 0$;

$\tau_2 = mZ_0/A$ — момент времени, в который задний фронт насыщенности достигает верхней границы $Z = 0$ (задний фронт — это точка $Z = \xi$, такая что $S(\xi + 0) > 0$, $S(\xi - 0) = 0$);

$S_n^- = 1 - \sqrt{\tau_1/\tau}$ — меньшее значение скачка насыщенности при $\tau > \tau_1$, отраженного от нижней непроницаемой границы $Z = H$;

$S_b^+ = \sqrt{\tau_1/\tau}$ — большее значение скачка насыщенности при $\tau > \tau_1$, возникшего на верхней непроницаемой границе $Z = 0$;

$T = \tau_1 \left(1 + \sqrt{\tau_2/\tau_1}\right)^2$ — время завершения процесса сегрегации рассола.

Отметим, что большее значение S_n^+ отраженного скачка не изменяется во времени и равно 1, а у верхнего скачка, наоборот, остается постоянным меньшее его значение $S_b^- = 0$.

Некоторые результаты численных расчетов по модели (1)–(3), иллюстрирующие динамику изменения насыщенности пористой среды рассолом, представлены на рис. 11. Линия 1 соответствует начальной границе контакта между рассолом и водой, где насыщенность меняется скачком от 0 до 1. Расстояние от этой линии до верхней и нижней границ трубки тока специально выбрано одинаковым с целью проверки идентичности расчетных времен образования и перемещения передних и задних фронтов, а также скачков насыщенности, движущихся вдоль и против направления силы тяжести.

В силу неустойчивости при $\tau > 0$ происходит распад начального скачка насыщенности. Частицы со значениями $S < 0,5$ движутся вниз за счет языков рассола, а со значениями $S > 0,5$ — вверх за счет языков воды. При этом обе фазы перемещаются по своей системе поровых каналов.

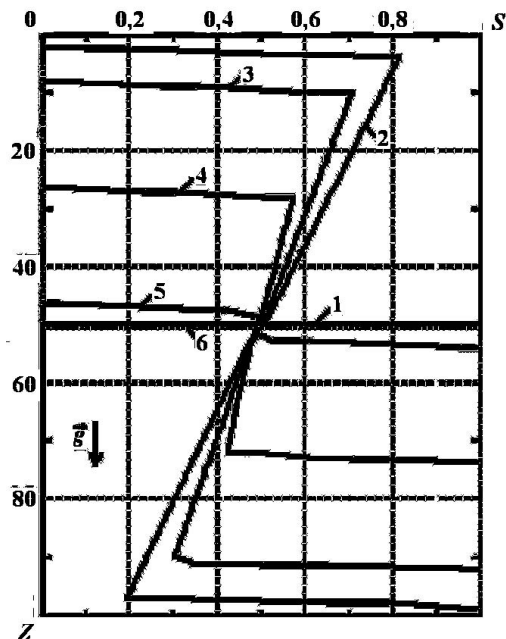


Рис. 11. Графики функции $S(Z)$ при осаждении рассола в однородной пористой среде (задача *рассол над водой*): 1 — $\tau = 0$; 2 — $\tau = 300$ сут; 3 — $\tau = 400$ сут; 4 — $\tau = 600$ сут; 5 — $\tau = 770$ сут; 6 — $\tau = 800$ сут

Передний и задний фронты достигают соответствующих непроницаемых границ трубки тока в один и тот же момент времени $\tau = 200$ сут, что совпадает с $\tau_1 = \tau_2 = 200$ сут из аналитического решения.

Отметим, что если временной шаг h_τ будет меньше значения, полученного из условия Куранта, то произойдет размазывание фронтов насыщенности. Однако используемый авторами алгоритм отслеживания положения фронтов позволяет свести этот отрицательный эффект к минимуму и определять их с точностью до одного или двух временных слоев.

При $\tau > \tau_1$ образуются верхний и нижний скачки, движущиеся навстречу друг другу (см. линии 2–5 на рис. 11). Распределения насыщенности, полученные из аналитического решения, практически совпадают с расчетными кривыми и поэтому на рис. 11 не приводятся. Так, например, при $\tau = 300; 400; 600; 770$ сут соответствующие точные значения S_b^- равны 0,184; 0,293; 0,423; 0,490, а расчетные — 0,19; 0,30; 0,42; 0,49. Время завершения процесса сегрегации рассола в вычислительном эксперименте, как и в точном решении, составляет $\tau = 800$ сут (при этом линии 1 и 6 совпадают, но для наглядности линия 6 показана точками с некоторым смещением).

Формирование неподвижного ядра рассола в неоднородном пласте на границе разрыва проницаемости K . Следующий пример не только отражает свойства решения, указанные в предыдущем примере, но и служит для оценки точности численного расчета при возникновении такого эффекта [2, 6, 9], как формирование неподвижных ядер рассола в восходящем фильтрационном потоке, препятствующем их сегрегации из высокопроницаемых зон пласта в менее проницаемые.

Пусть вертикальная трубка тока пористостью $m = 0,2$ имеет длину $H = 100$ м. В точке $\bar{Z} = 90$ м абсолютная проницаемость меняется скачком от $K_1 = 1$ мк² до $K_2 = 0,1$ мк². В начальный момент $\tau = 0$ рассол насыщает часть трубки при $Z_1 < Z < Z_2$, $Z_1 = 35$ м, $Z_2 = 76$ м, а вода — всю оставшуюся ее часть (рис. 12). Как и в предыдущем примере, разность удельных весов фаз равна 0,05. При $\tau > 0$ вода поступает в нижнюю часть трубки тока и создает восходящий фильтрационный поток со скоростью $V = 0,02$ м/с. Такое задание величины V обеспечивает выполнение неравенства $A_2 < V < A_1$ ($A_2 = 0,005$, $A_1 = 0,05$), необходимого для фор-

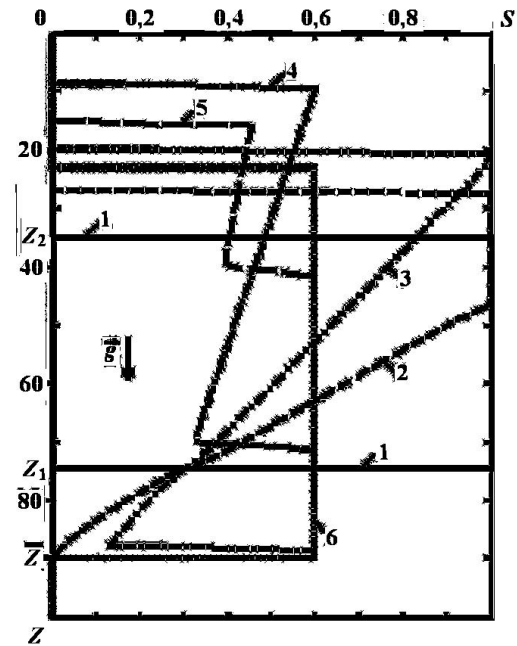


Рис. 12. Графики функции $S(Z)$ при наличии разрыва проницаемости, $K_1/K_2 = 0,1$: 1 — $\tau = 0$; 2 — $\tau = 85$ сут; 3 — $\tau = 160$ сут; 4 — $\tau = 450$ сут; 5 — $\tau = 780$ сут; 6 — $\tau = 980$ сут

мирования неподвижного ядра рассола, так как при таком условии рассол может двигаться в высокопроницаемой зоне как вдоль, так и против направления суммарного потока, а в слабопроницаемой — только в направлении скорости \vec{V} .

Приведем основные соотношения [19], получаемые из аналитического решения данной тестовой задачи:

$\tau_1 = m(\bar{Z} - Z_1) / (A_1 - V)$ — момент времени, в который передний фронт насыщенности достигает точки $Z = \bar{Z}$;

$\tau_2 = m(Z_1 - Z_2) / A_1$ — момент времени, в который значение насыщенности $S = 1$ на переднем фронте "догоняет" верхний скачок;

$S_n^+ = 1 - V/A_1$ и $S_n^- = S_n^+ (1 - \sqrt{\tau_1/\tau})$ — большее и меньшее значения скачка насыщенности, отраженного от точки разрыва абсолютной проницаемости при $\tau > \tau_1$;

$S_b^+ = \sqrt{\tau_1/\tau}$ — большее значение верхнего скачка насыщенности при $\tau > \tau_2$;

$T = \tau_1 (1 + \sqrt{\tau_2/\tau_1} / S_n^+)^2$ — время завершения процесса сегрегации рассола.

Результаты численных расчетов для данного примера представлены на рис. 12. Сплошная ли-

ния 1 соответствует начальной границе контакта между рассолом и водой. Так же, как и в предыдущем примере, точное и приближенное решения весьма близки, поэтому на рисунке приведены только результаты вычислительного эксперимента.

Остановимся подробнее на специфической особенности этой тестовой задачи, а именно на образовании неподвижного ядра рассола в точке $Z = \bar{Z}$.

При подходе переднего фронта (кривая 2 на рис. 12) к проницаемой границе \bar{Z} возникает отраженный скачок, большее значение которого $S_n^+ = 0,60$ (точное значение 0,6) остается в дальнейшем постоянным (см. линии 3–6), как это и вытекает из аналитического решения. Как следствие, совпадают и конечные размеры неподвижного ядра загрязнения (точечная линия 6).

Отметим, что неизменность S_n^+ при $\tau > \tau_1$ и непроницаемость рассола ни в один узел сетки ниже границы разрыва проницаемости обеспечиваются разработанной численной моделью, которая учитывает подобные особенности и свойства решения.

Верхний скачок движется сначала вверх с постоянной скоростью V до момента времени τ_2 (линия 3). Затем при $\tau > \tau_2$ его скорость уменьшается, и, когда значение S_n^+ достигает S_n^+ , она обращается в нуль (линия 4). В этот момент ядро рассола достигает своего максимального размера ($9 \leq Z \leq 90$ м), который при численном решении отличается от точного всего лишь на один или два шага сетки. После этого направление скорости меняется на противоположное и верхний скачок начинает двигаться навстречу отраженному (линия 5) вплоть до их слияния при $\tau = 980$ сут.

Сравнение численного решения фильтрационной модели с решением задачи о свободной границе

В работе [20] приведены результаты численного решения модельной задачи о движении первоначально вертикальной границы между рассолом и пресной водой в неоднородном пласте, содержащем зоны с различной проницаемостью K_1 и K_2 . Постановка задачи дана в предположении отсутствия перемешивания жидкостей, движение которых подчиняется обобщенному закону Дарси с учетом силы тяжести. Согласно методу Дюпюи функция тока Ψ пред-

ставляется в виде нелинейной зависимости вида $\Psi \left(K(x, z), \Gamma_c(x, z, t), \frac{\partial \Gamma_c}{\partial x} \right)$ и задача нахождения свободной границы Γ_c раздела между несмешивающимися жидкостями сводится к известному нелинейному одномерному уравнению Дюпюи $\frac{\partial \Gamma_c}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ относительно неизвестной функции $\Gamma_c(x, z, t)$.

Ниже обсуждаются некоторые результаты расчетов из работы [20] и по модели (1)–(3), иллюстрирующие особенности процесса перемещения границы $\Gamma_c(x, z, t)$ при наличии в пласте вертикальной и горизонтальной границ разрыва абсолютной проницаемости. В обоих вариантах разница удельных весов рассола и пресной воды γ_{1-2} равна 0,005.

Вертикальный разрыв проницаемости.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда пласт содержит две области, $x < 0$ и $x > 0$, с проницаемостью K_1 и K_2 соответственно, $K_1 < K_2$ (рис. 13). В приведенном примере $K_1/K_2 = 0,1261$. В начальный момент времени $t = 0$ рассол и пресная вода занимают области пласта $x > 0$ и $x < 0$ соответственно, так что исходное положение границы Γ_c задано вертикальной прямой, проходящей через начало $x = 0$ координатной оси OX (линия 1 на рис. 13). Вертикальная граница разрыва абсолютной проницаемости K проходит через точку $x = 0$ и совпадает с начальным положением Γ_c (та же линия 1).

При построении графиков используется нормировка функции Γ_c и координаты Z на толщину H , а исходной координаты X — на длину L пласта.

При интерпретации результатов [20] на рис. 13,а время нормировано таким образом, что значение $t = 1$ соответствует моменту достижения нижней точкой границы Γ_c координаты $x = -1,25$.

На рис. 13,б для сравнения приведены результаты расчетов, полученные с помощью модели двухфазной фильтрации (1)–(3). В этом случае положение подвижной границы Γ_c (кривые 2–8) определялось по изолинии насыщенности рассола $S = 0,01$ в моменты времени, когда координата верхней точки этой изолинии, движущейся по кровле пласта, совпадала с положением такой точки границы Γ_c на кривых 2–8 рис. 13,а.

Сопоставление представленных результатов показывает, что характеристики процесса качественно и количественно согласуются между со-

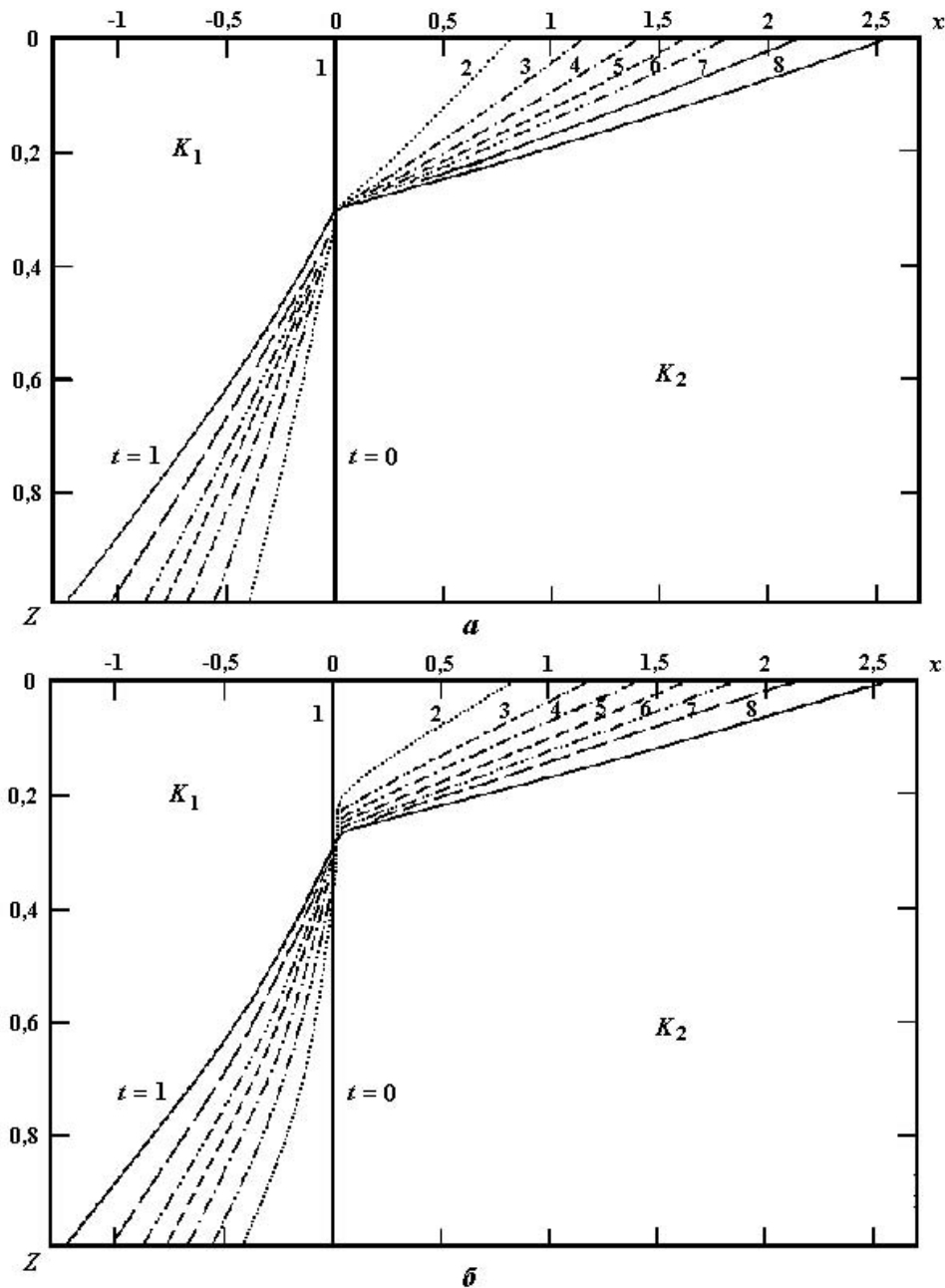


Рис. 13. Процесс перемещения первоначально вертикальной границы Γ_c раздела между рассолом и пресной водой в пласте при наличии вертикальной линии разрыва абсолютной проницаемости ($K_1/K_2 = 0,1261$): a — решение [20]: 1 — $t = 0$; 2 — $t = 0,1$; 3 — $t = 0,2$; 4 — $t = 0,3$; 5 — $t = 0,4$; 6 — $t = 0,5$; 7 — $t = 0,7$; 8 — $t = 1,0$; b — расчет по модели (1)—(3): 1 — $t = 0$; 2 — $t = 0,13$; 3 — $t = 0,24$; 4 — $t = 0,33$; 5 — $t = 0,42$; 6 — $t = 0,52$; 7 — $t = 0,71$; 8 — $t = 1,0$

бой. В обоих случаях формируется гидродинамически устойчивый режим течения типа *вода над рассолом*. Так как плотность рассола выше, чем у пресной воды, в окрестности вертикальной границы возникает горизонтальная составляющая градиента давления. В начальный момент $t = 0$ она направлена вдоль отрицательного направления оси x и увеличивается с ро-

стом координаты Z . В силу этого в пласте начинается перераспределение фаз, причем у подошвы оно происходит гораздо более интенсивно, чем у кровли, и в пласте возникает вращательное движение жидкостей (рис. 14). Следствием такого движения является изменение положения подвижной границы Γ_c (см. рис. 13).

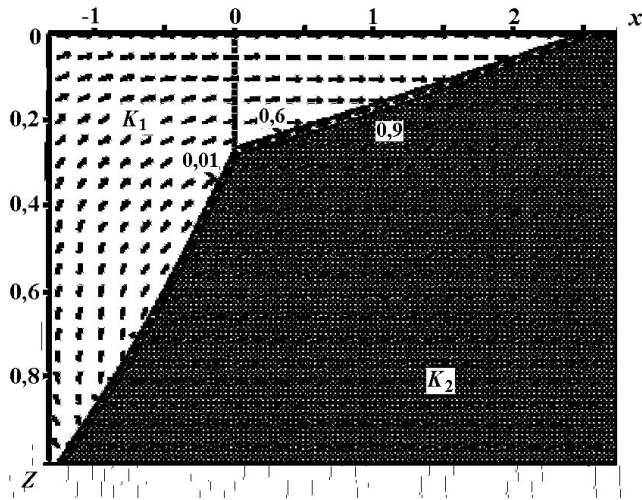


Рис. 14. Распределение насыщенности S рассола и поле направлений вектора \vec{V} суммарного потока при $t = 1$: светлая часть области пласта — $S = 0$; затемненная часть — $S = 1$

Различие представленных результатов заключается, во-первых, в том, что в [20] кривые Γ_c в точке их пересечения с линией разрыва абсолютной проницаемости K имеют более пологий наклон справа от линии разрыва (см. рис. 13,а), чем соответствующие кривые на рис. 13,б. Отметим, что положение этой точки определяется в [20] только отношением K_1/K_2 и не меняется в процессе перемещения рассола (в примере ее координата равна 0,3). В расчетах же по фильтрационной модели (1)–(3) наклон кривых Γ_c в правой области пласта с течением времени постепенно уменьшается. К моменту $t = 1$ положение границы Γ_c в обоих случаях становится практически идентичным.

Во-вторых, распространение рассола в модели (1)–(3) происходит более медленно, чем в случае [20]. Это видно по разнице времени движения верхней точки границы Γ_c по кровле пласта (ср. значения t для случаев а и б в подписи к рис. 13).

Данный пример наглядно иллюстрирует высокую точность предложенного метода расчета движения скачка насыщенности, который перемещается при $x > 0$ по направлению силы тяжести, а при $x < 0$ — против нее. Действительно, размазывание скачка весьма мало (не более двух узлов сетки) и не зависит от направления его движения (см. рис. 14). Подчеркнем, что зона размазывания скачка со временем не увеличивается.

Горизонтальный разрыв проницаемости.

Перейдем теперь к случаю, когда пласт образован двумя слоями одинаковой толщины с различной проницаемостью K_1 и K_2 , $K_1 < K_2$. В примере, представленном на рис. 15, $K_2/K_1 = 5$. Горизонтальная линия разрыва абсолютной проницаемости (граница слоев) показана на рисунке точечным пунктиром, исходная граница Γ_c — линией 1.

При обработке результатов расчетов, заимствованных из работы [20] (см. рис. 15,а), значение безразмерного времени $t = 1$ соответствует моменту, когда нижняя точка границы Γ_c достигает координаты $x = -0,5$. Кривые 2–6 соответствуют тем моментам времени, в промежутках между которыми эта точка, двигаясь по подошве пласта, проходит равные отрезки длиной 0,1.

На рис. 15,б для сравнения приведены аналогичные кривые, полученные в рамках модели (1)–(3) двухфазной фильтрации. Отметим, что в данном случае подвижная граница Γ_c определялась по текущему положению изолинии насыщенности рассола $S = 0,1$.

Легко видеть, что в обоих случаях процесс перемещения свободной границы не только носит качественно одинаковый характер, но и его количественные характеристики согласуются между собой. Спецификой процесса в рассматриваемом примере является возникновение вращательного движения границы раздела жидкостей из-за наличия горизонтальной составляющей градиента давления на линии раздела Γ_c .

В отличие от предыдущего примера наличие горизонтальной границы разрыва абсолютной проницаемости приводит к тому, что в ее окрестности при $t > 0$ возникает гидродинамически неустойчивая зона типа *рассол над водой*, протяженность которой вдоль границы слоев со временем возрастает. Такое состояние является неустойчивым и приводит к *пальцеобразному* внедрению тяжелого рассола в пресную воду. Как отмечается в [20], *пальцы*, образующиеся в этой зоне при численном решении задачи со свободной границей (см. рис. 15,а), являются следствием неустойчивости разностной схемы. Их появление связано с ошибками, неизбежно возникающими и накапливающимися в ходе счета из-за дискретной аппроксимации функции Γ_c , так что использование такой модели дает результаты, справедливые лишь при малых временах перемещения свободной границы.

В модели двухфазной фильтрации (1)–(3) с линейными фазовыми проницаемостями K_i^* эф-

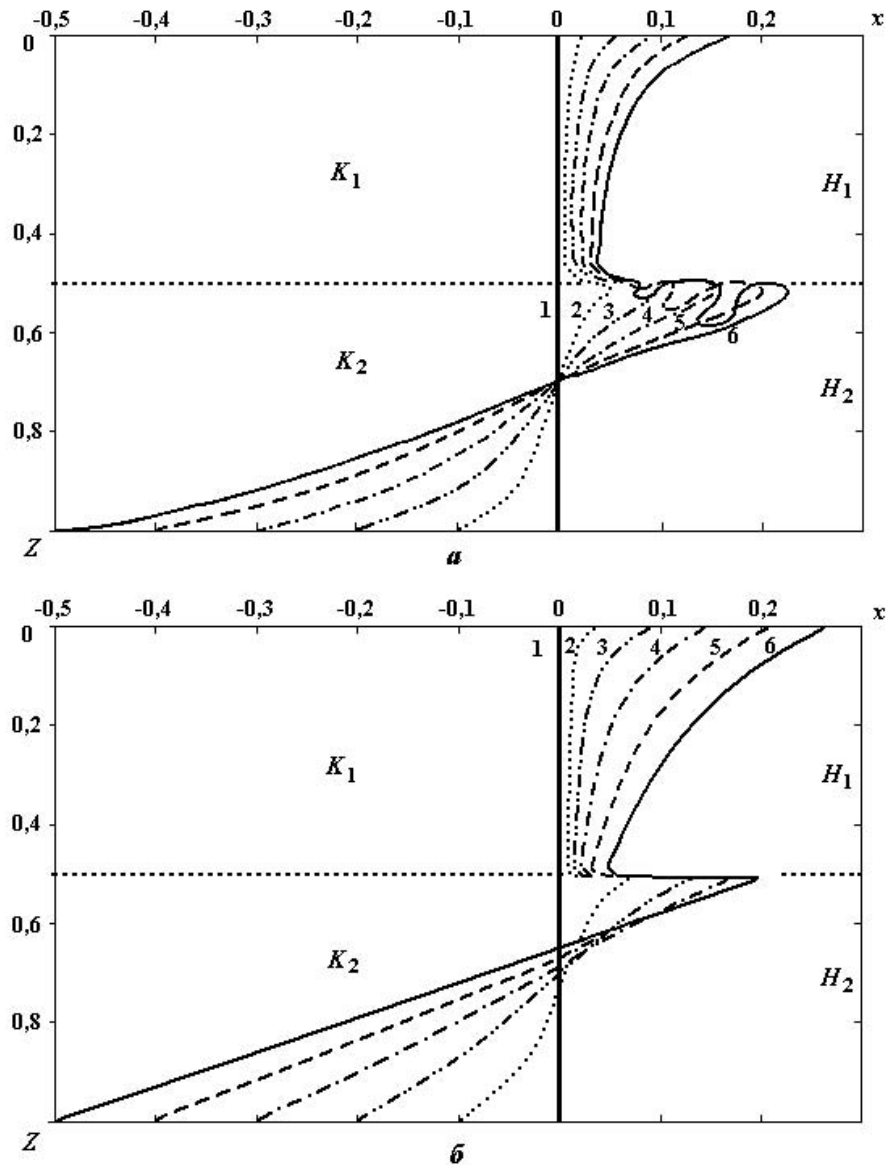


Рис. 15. Процесс перемещения первоначально вертикальной границы Γ_c раздела между рассолом и пресной водой в пласте при наличии горизонтальной линии разрыва абсолютной проницаемости, $K_2/K_1 = 5$: *a* — решение [20]: 1 — $t = 0$; 2 — $t = 0,14$; 3 — $t = 0,31$; 4 — $t = 0,52$; 5 — $t = 0,78$; 6 — $t = 1,0$; *b* — расчет по модели (1)—(3): 1 — $t = 0$; 2 — $t = 0,12$; 3 — $t = 0,28$; 4 — $t = 0,49$; 5 — $t = 0,8$; 6 — $t = 1,0$

факт образования пальцев приводит к интенсивному внедрению рассола по всей длине зоны гидродинамической неустойчивости на границе слоев. Это хорошо видно на рис. 16, *b* по векторам скорости \vec{V}_1 рассола, которые под участком *рассол над водой* направлены вертикально вниз (в то время как векторы суммарного потока \vec{V} в окрестности границы Γ_c практически ортогональны \vec{V}_1 — см. рис. 16, *a*), а также по наличию области пониженной насыщенности S над этим участком. Именно в силу струйного характера течения в этой зоне рассол из верхнего слоя вне-

дряется в нижний, более проницаемый слой и, быстро опускаясь до границы раздела Γ_c в нижнем слое, в дальнейшем продолжает растекаться вместе с основным ядром загрязнения.

Как видно из рис. 15, *a* и 16, решения [20] и (1)—(3) дают принципиально различные результаты на границе слоев над и под зоной гидродинамической неустойчивости. При расчетах по модели (1)—(3) здесь формируется область малых значений насыщенности S и фактически граница раздела фаз определяется изолинией $S = 0,01$. При этом граница ядра, которой

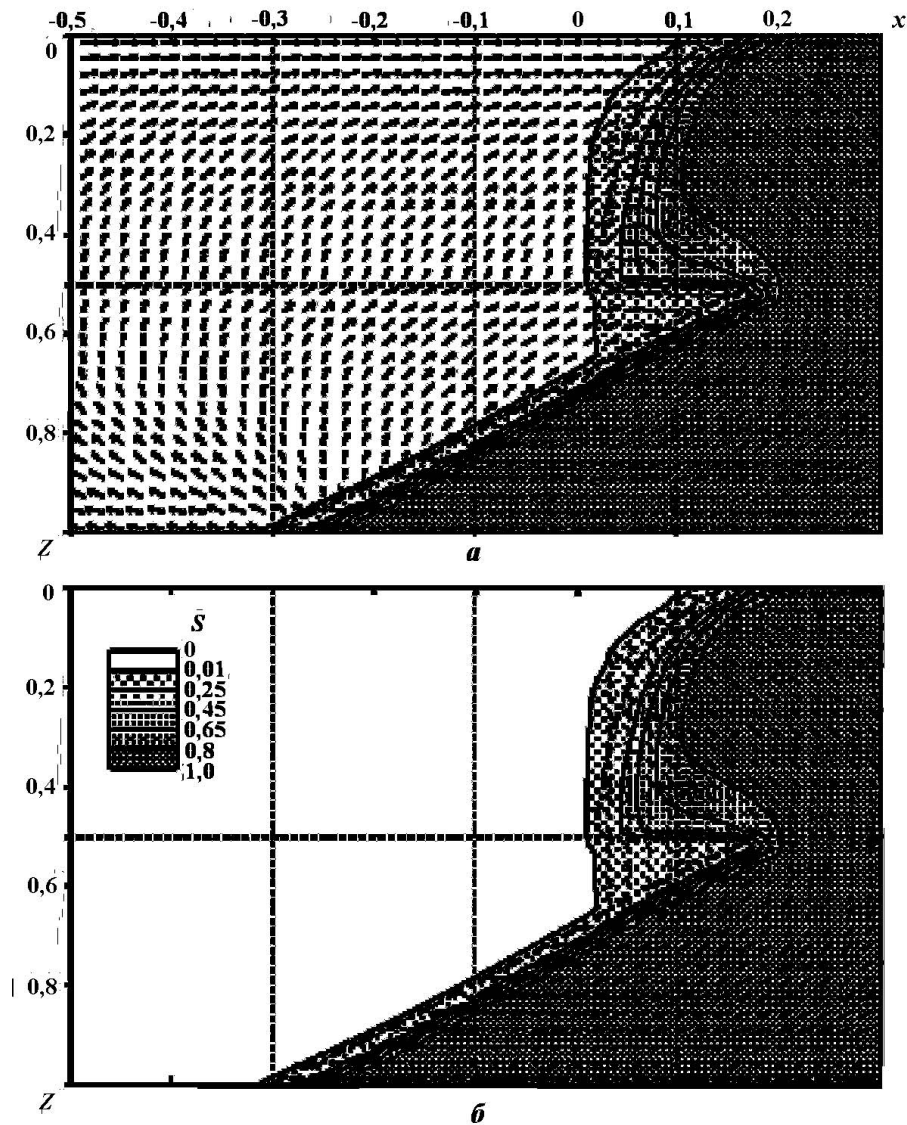


Рис. 16. Распределение насыщенности S рассола в двухслойном пласте при $t = 0,49$, полученное по модели (1)–(3). Поля направлений векторов скоростей \vec{V} (а) и \vec{V}_1 (б)

соответствует изолиния $S = 0,1$, в некотором приближении соответствует границе Γ_c в расчетах [20].

Представленные результаты демонстрируют возможность применения разработанной модели и численного метода для расчета таких фильтрационных течений, в которых область неустойчивого движения возникает в некоторый момент времени (в данном примере при $t = 0$) и в дальнейшем увеличивается. При этом в отличие от решения [20] численная модель двухфазной фильтрации (4)–(10) дает устойчивое решение (при выполнении условия Куранта) как при малых, так и при больших временах процесса миграции рассола для задач типа *вода над рассолом* и *рассол над водой*.

Таким образом, проведенные исследования показывают высокую эффективность разработанной численной модели (4)–(10) для решения нелинейного уравнения переноса. Она позволяет с высокой точностью рассчитывать границы переднего и заднего фронтов ядра загрязнения, возникновение и эволюцию скачков, движущихся как вдоль, так и против направления суммарного потока. При этом положение фронтов и скачков определяется с точностью до одного-двух узлов сетки.

Работа выполнена в рамках проекта МНТЦ № 2364.

Список литературы

1. *Конюхов В. М., Храмченков М. Г., Чекалин А. Н.* Моделирование распространения тяжелых жидких загрязнений в слоистом водоносном пласте // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1998. Вып. 4. С. 36—43.
2. *Конюхов В. М., Костерин А. В., Чекалин А. Н.* Моделирование распространения тяжелых жидких загрязнений в анизотропном неоднородном водоносном пласте с учетом инфильтрации // Материалы науч.-метод. конф. "Экологические проблемы гидрогеологии. VIII Толстихинские чтения". Санкт-Петербург, 16—17 ноября 1999 г. С.-Пб., 1999. С. 190—195.
3. *Конюхов В. М., Чекалин А. Н.* Численное моделирование миграции тяжелого загрязнения в неоднородном водоносном пласте // Сб. тр. Всерос. конф. "Математическое моделирование и проблемы экологической безопасности". Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 2000. С. 127—136.
4. *Конюхов В. М., Храмченков М. Г., Чекалин А. Н.* Моделирование миграции разноточностных жидкостей в сильно неоднородных пластах // Современные проблемы гидрогеологии и гидрогеомеханики. Сб. докл. конф. С.-Пб.: Изд-во С.-Пб. ун-та, 2002. С. 405—412.
5. *Конюхов В. М., Храмченков М. Г., Чекалин А. Н.* Влияние структуры водоносного пласта на процесс миграции тяжелого жидкого загрязнения // В кн. "На рубеже веков. НИИ математики и механики Казанского университета. 1998—2002 гг." Казань: Изд-во Казан. матем. общества, 2003. С. 279—288.
6. *Конюхов В. М., Храмченков М. Г., Чекалин А. Н.* Фильтрационно-диффузионная модель миграции рассолов в неоднородных водоносных пластах // МЖГ. 2004. № 2. С. 140—151.
7. *Konyukhov V. M., Kosterin A. V., Chekalin A. N.* Migration of heavy liquid contaminations in layered reservoir // 2nd Symp. "Protection of Groundwater from Pollution and Seawater Intrusion". Bari, September 27 — October 1, 1999. Bari, 2001. P. 313—325.
8. *Chekalin A. N., Khratchenkov M. G., Konyukhov V. M., Kosterin A. V.* Simulation of filtration of heavy liquid contaminant in inhomogeneous aquifer stratum // Poster Papers. TRAM—2000. Int. Conf. on Tracers and Modelling in Hydrogeology. Liege, May 23—26, 2000. Liege, Belgium, 2000. P. 49—54.
9. *Chekalin A. N., Khratchenkov M. G., Konyukhov V. M., Kosterin A. V.* Two-phase model of filtration of heavy liquid contamination in layered aquifer // Int. Center for Heat and Mass Transfer. Int. Symp. on Multiphase Flow and Transport Phenomena. Antalya, Turkey, November 5—10, 2000. New-York, Wallingford (UK): Begel house inc. P. 454—461.
10. *Chekalin A. N., Konyukhov V. M., Kosterin A. V.* Motion of heavy liquid contaminations in layered groundwater reservoir // Математическое моделирование. 2001. Т. 13, № 3. С. 41—48.
11. *Chekalin A. N., Khratchenkov M. G., Konyukhov V. M., Kosterin A. V.* Computational modelling of brine migration in anisotropic inhomogeneous freshwater reservoir // Proc. 14th. Int. Conf. on Comput. Methods in Water Resources. Delpht, Netherlands, 2002. P. 1—8.
12. *Конюхов В. М., Румынин В. Г., Синдаловский Л. Н.* Особенности численного моделирования фильтрации потоков переменной плотности // Современные проблемы гидрогеологии и гидрогеомеханики. Сб. докл. конф. Санкт-Петербург, 2002. С.-Пб.: Изд-во С.-Пб. ун-та, 2002. С. 533—550.
13. *Чекалин А. Н.* Численные решения задач фильтрации в водонефтяных пластах. Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 1982.
14. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
15. *Самарский А. А., Попов Ю. П.* Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975.
16. *Годунов С. К., Рябенский В. С.* Разностные схемы (введение в теорию). М.: Наука, 1973.
17. *Головизнин В. М., Самарский А. А.* Разностная аппроксимация конвективного пере-

носа с пространственным расщеплением временной производной // Журнал мат. моделирования. 1998. Т 10, № 1. С. 86—100.

18. Максимов М. М., Рыбницкая Л. П. Математическое моделирование процессов разработки нефтяных месторождений. М.: Недра, 1976.
19. Колюхов В. М., Чекалин А. Н. Тестовые аналитические решения одномерного уравнения переноса рассола в водоносном пла-

сте // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 4. С. 86—97.

20. Schotting R. J. Mathematical Aspects of Salt Transport in Porous Media. Amsterdam: Centrum voor Wiskunde en Informatica, 1998.

Статья поступила в редакцию 21.10.05.
