

УДК 519.6

ТУРБУЛЕНТНОЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ ДВУХ ПОТОКОВ РАЗНОЙ ПЛОТНОСТИ И СКОРОСТИ, ДВИЖУЩИХСЯ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ. УЧЕТ НЕСИММЕТРИИ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

В. Е. Неуважаев, Т. В. Заболотникова
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Работа посвящена теоретическому изучению турбулентного перемешивания, возникающего в результате совместного действия сдвиговой и гравитационной (конвективной) неустойчивостей. Исследование проведено на базе полумпирической $k\varepsilon$ -модели.

Введение

Будем рассматривать задачу о перемешивании двух веществ с плотностями ρ_1 при $y > 0$ и ρ_2 при $y < 0$ при заданном ускорении $g = \text{const}$, движущихся в направлении оси x с разными скоростями U_1 и U_2 (рис. 1).

Целью данной работы является построение аналитической формулы для ширины L области турбулентного перемешивания в зависимости от начальных параметров задачи: числа Атвуда $A = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$, ускорения g , начальной шероховатости L_0 , скоростей U_1 и U_2 и плотностей ρ_1 и ρ_2 с учетом несимметрии перемешивания. Без учета несимметрии данная формула была получена в [1]:

$$L = L_0 + \frac{(2C_{\varepsilon 2} - 3)^2}{6(4C_{\varepsilon 2} - 3)} C_{\mu} g A \Phi(\eta_1) \left(\frac{x}{U_0}\right)^2 + \left[\frac{C_{\mu}}{24C_{\varepsilon 2}} (2C_{\varepsilon 2} - 3)^2 \eta_1^2 B_0 (1 - A^2) (U_1 - U_2)^2 + \frac{2C_{\mu} (2C_{\varepsilon 2} - 3)^2}{3(4C_{\varepsilon 2} - 3)} g A \Phi(\eta_1) L_0 \right]^{1/2} \frac{x}{U_0}.$$

Здесь C_{μ} , $C_{\varepsilon 2}$, B_0 — эмпирические постоянные; $\eta_1 = 2 \int_0^{\infty} (1 - \Phi(\eta)) d\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$; $\Phi(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-z^2} dz$ —

интеграл вероятности; $U_0 = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2}$ — характеристическая скорость потоков (этот способ вычисления U_0 предложен в работе [2] и получен из закона сохранения массы).

В случае, когда ускорение g равно нулю, имеем

$$L = L_0 + \sqrt{\frac{C_{\mu}}{24C_{\varepsilon 2}} (2C_{\varepsilon 2} - 3)^2 \eta_1^2 B_0 (1 - A^2) (U_1 - U_2)^2} \frac{x}{U_0}.$$

В этой формуле перейдем к новой переменной $\tilde{x} = \frac{|U_1 - U_2|}{U_0} x$, тогда получим

$$L = L_0 + 0,5 \eta_1 |2C_{\varepsilon 2} - 3| \sqrt{\frac{C_{\mu}}{6C_{\varepsilon 2}} B_0 (1 - A^2)} \tilde{x}.$$

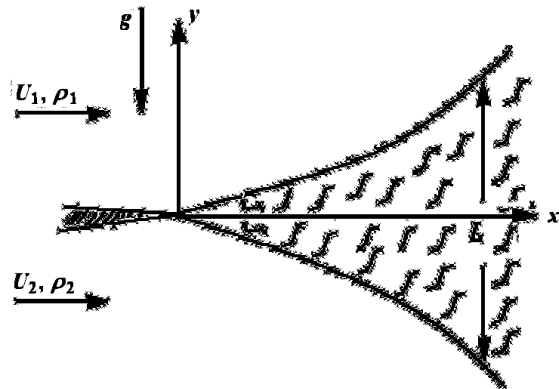


Рис. 1. Схема течения в плоскости (x, y) ; L — ширина области турбулентного перемешивания

Отсюда

$$\frac{dL}{dx} = 0,5\eta_1 |2C_{\varepsilon 2} - 3| \sqrt{\frac{C_\mu}{6C_{\varepsilon 2}} B_0 (1 - A^2)}. \quad (1)$$

Упрощенные уравнения $k\varepsilon$ -модели

В случае стационарного течения несжимаемых жидкостей уравнения $k\varepsilon$ -модели без учета диффузионных членов (в рамках данной задачи они малы относительно источниковых членов — первого и второго членов в правых частях этих уравнений) запишутся следующим образом [3]:

$$U \frac{\partial \rho k}{\partial x} + V \frac{\partial \rho k}{\partial y} = D \frac{\partial \rho}{\partial y} g + \alpha_2 \rho D \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \rho \varepsilon; \quad (2)$$

$$U \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial y} = C_\mu C_{\varepsilon 1} k \frac{\partial \rho}{\partial y} g + C_\mu C_{\varepsilon 1} \alpha_2 \rho k \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (3)$$

Здесь $C_\mu, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, \alpha_2$ — постоянные $k\varepsilon$ -модели; $g = -\frac{\partial P}{\rho \partial y}$ — ускорение свободного падения; U, V — компоненты скорости; k — кинетическая энергия турбулентности; ε — скорость диссипации энергии; D — коэффициент турбулентной диффузии. Система дополняется осредненными уравнениями газовой динамики [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \rho U + \frac{\partial}{\partial x} \rho V &= 0; \\ U \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} + V \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (4)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \alpha_2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(D \rho \frac{\partial U}{\partial y} \right). \quad (5)$$

$$\text{Начальные условия: } \rho(0, y) = \begin{cases} \rho_1, & y > 0; \\ \rho_2, & y < 0; \end{cases} \quad U(0, y) = \begin{cases} U_1, & y > 0; \\ U_2, & y < 0. \end{cases}$$

Приближенное интегрирование. Учет несимметрии турбулентного перемешивания

Сделав некоторые допущения, построим аналитическое решение.

Предположим, что кинетическая энергия турбулентности k и скорость диссипации ε в направлении y постоянны в пределах зоны перемешивания. В таком предположении коэффициент диффузии D будет функцией только переменной x . Предположим также (как это было сделано в [4]), что коэффициент турбулентной диффузии D является функцией с разрывом в точке $y = 0$:

$$D = \begin{cases} C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}}, & \text{если } y > 0; \\ \beta_2 C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}}, & \text{если } y < 0, \end{cases}$$

где $\bar{k}, \bar{\varepsilon}$ — средние значения кинетической энергии турбулентности и скорости диссипации по области перемешивания $[-L_2, L_1]$; β_2 — новый эмпирический коэффициент. В [1] полагалось $\beta_2 = 1$, что приводило к симметричному перемешиванию, при котором $L_1 = L_2$. Настоящее уточнение позволяет учесть несимметрию перемешивания.

Следующее допущение относится к определению функции V . Как это было сделано в [3], полагаем $U = V$ и находим, что

$$V = -D \frac{\partial \ln \rho}{\partial y}.$$

Далее полагалось, что это решение справедливо и при $U \neq V$. В уравнениях (2)–(5) скорость U перед производными положим равной \tilde{U} и примем, что \tilde{U} равно постоянной, $\tilde{U} = U_0$:

$$U_0 = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Была проведена оценка погрешности данного предположения. Рассматривались три случая: скорость перед производными в уравнениях (2)–(5) сначала полагалась равной начальному значению скорости U_1 для всей области решения, затем U_2 , а в последнем случае $\tilde{U} = U_0$. Получено, что решение системы с $\tilde{U} = U_0$ находится между решениями с крайними значениями скорости (Приложение 1).

Далее вводим новую переменную τ , такую что $U_0 \partial \tau = C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\varepsilon} \partial x$. Тогда уравнение для плотности сводится к линейному уравнению диффузии с разрывным коэффициентом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \quad \text{при } y > 0; \\ \frac{\partial \rho}{\partial \tau} &= \beta_2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \quad \text{при } y < 0. \end{aligned}$$

Решение для двух несжимаемых жидкостей с начальными плотностями ρ_1 и ρ_2 представляется через интеграл вероятности Φ [4]:

$$\rho = \begin{cases} \frac{\rho_1 + \rho_2 \sqrt{\beta_2}}{1 + \sqrt{\beta_2}} + \frac{\sqrt{\beta_2} (\rho_1 - \rho_2)}{1 + \sqrt{\beta_2}} \Phi(\eta), & \text{если } \eta > 0; \\ \frac{\rho_1 + \rho_2 \sqrt{\beta_2}}{1 + \sqrt{\beta_2}} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{1 + \sqrt{\beta_2}} \Phi(\eta), & \text{если } \eta < 0. \end{cases}$$

$$\text{Здесь } \Phi(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz, \quad \eta = \begin{cases} \frac{y}{2\sqrt{\tau}}, & \text{если } y > 0; \\ \frac{y}{2\sqrt{\beta_2 \tau}}, & \text{если } y < 0. \end{cases}$$

Уравнение баланса для кинетической энергии турбулентности и уравнение баланса для скорости диссипации будут иметь вид

$$\frac{\partial \rho k}{\partial \tau} = g \frac{D}{D_{\varepsilon+}} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \alpha_2 \rho \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} \frac{D}{D_{\varepsilon+}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \frac{\rho \varepsilon}{D_{\varepsilon+}}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial \tau} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \frac{D}{D_{\varepsilon+}} g \frac{\partial \rho}{\partial y} + C_{\varepsilon 1} \alpha_2 \rho \frac{D}{D_{\varepsilon+}} \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} \frac{\varepsilon}{k} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\rho \varepsilon^2}{k D_{\varepsilon+}}, \quad (7)$$

где $D_{\varepsilon+} = C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\varepsilon}$. Здесь авторы пренебрегли членами $-D_{\varepsilon+} k \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial y}$ и $-D_{\varepsilon+} \varepsilon \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial y}$. При малом изменении плотности эти члены малы.

Ширину области перемешивания будем определять так же, как это было сделано в [3]. Предлагается интегральный способ определения L_1 и L_2 :

$$L_2 = 2 \int_{-\infty}^0 \frac{f_1 dy}{f_1(0)}; \quad L_1 = 2 \int_0^{\infty} \frac{f_2 dy}{f_2(0)},$$

где f_1 и f_2 — объемные концентрации: $f_1 = \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}$; $f_2 = \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1 - \rho_2}$.

Используя полученное решение для плотности, получаем

$$L_1 = 2\eta_1\sqrt{\tau}; \quad L_2 = 2\eta_1\sqrt{\beta_2\tau}; \quad L = L_1 + L_2 = \left(1 + \sqrt{\beta_2}\right) L_1, \quad (8)$$

где $\eta_1 = 2 \int_0^\infty (1 - \Phi(\eta)) d\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

В результате осреднения уравнений (6), (7) по области перемешивания $[-L_2, L_1]$ получим

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \frac{\bar{k}}{\tau} - \frac{\bar{\varepsilon}^2}{C_\mu \bar{k}^2} + \frac{Q_1}{\sqrt{\tau}} + \frac{Q_0}{\tau}; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \frac{\bar{\varepsilon}}{\tau} - C_{\varepsilon 2} \frac{\bar{\varepsilon}^3}{C_\mu \bar{k}^3} + C_{\varepsilon 1} \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} \frac{Q_1}{\sqrt{\tau}} + C_{\varepsilon 1} \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} \frac{Q_0}{\tau}. \quad (10)$$

Здесь

$$Q_1 = \frac{g\sqrt{\beta_2}A_0\Phi(\eta_1)}{2\eta_1};$$

$$Q_0 = \left(\frac{U_1 - U_2}{1 + \sqrt{\beta_2}}\right)^2 \frac{(1 - A^2)\sqrt{\beta_2\alpha_2}}{16\sqrt{2}} \Phi\left(\sqrt{2}\frac{\eta_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right) \left[1 - \frac{A_0(1 - \sqrt{\beta_2})}{2\sqrt{2}\Phi\left(\sqrt{2}\frac{\eta_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right)}\right], \quad (11)$$

где $A_0 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2\sqrt{\beta_2}}$.

При выводе (9), (10) были использованы следующие приближенные вычисления:

$$\int_{-L_2}^{L_1} \rho k dy = 2\eta_1\sqrt{\tau\bar{k}}(\rho_1 + \rho_2\sqrt{\beta_2}); \quad \int_{-L_2}^{L_1} g \frac{D}{D_{\varepsilon+}} \frac{\partial \rho}{\partial y} dy = g\sqrt{\beta_2}(\rho_1 - \rho_2)\Phi(\eta_1);$$

$$\int_{-L_2}^{L_1} \frac{D}{D_{\varepsilon+}} \rho \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 dy = \left(\frac{U_1 - U_2}{1 + \sqrt{\beta_2}}\right)^2 \frac{\eta_1\sqrt{\beta_2}(\rho_1 + \rho_2\sqrt{\beta_2})}{2\sqrt{2}\alpha_2\tau} \Phi\left(\sqrt{2}\frac{\eta_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right) \times$$

$$\times \left[1 - \frac{(\rho_1 - \rho_2)(1 - \sqrt{\beta_2})}{2\sqrt{2}(\rho_1 + \rho_2\sqrt{\beta_2})\Phi\left(\sqrt{2}\frac{\eta_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right)}\right];$$

$$\int_{-L_2}^{L_1} \frac{\rho\varepsilon}{D_{\varepsilon+}} dy = 2\eta_1\sqrt{\tau}\frac{\bar{\varepsilon}^2}{C_\mu\bar{k}^2}(\rho_1 + \rho_2\sqrt{\beta_2}); \quad \int_{-L_2}^{L_1} \rho\varepsilon dy = 2\eta_1\sqrt{\tau}\bar{\varepsilon}(\rho_1 + \rho_2\sqrt{\beta_2});$$

$$\int_{-L_2}^{L_1} \frac{D}{D_{\varepsilon+}} \frac{\varepsilon}{k} g \frac{\partial \rho}{\partial y} dy = g\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}}\sqrt{\beta_2}(\rho_1 - \rho_2)\Phi(\eta_1);$$

$$\int_{-L_2}^{L_1} \frac{D}{D_{\varepsilon+}} \frac{\varepsilon}{k} \rho \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 dy = \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} \left(\frac{U_1 - U_2}{1 + \sqrt{\beta_2}}\right)^2 \frac{\eta_1\sqrt{\beta_2}(\rho_1 + \rho_2\sqrt{\beta_2})}{2\sqrt{2}\alpha_2\tau} \Phi\left(\sqrt{2}\frac{\eta_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right) \times$$

$$\times \left[1 - \frac{(\rho_1 - \rho_2)(1 - \sqrt{\beta_2})}{2\sqrt{2}(\rho_1 + \rho_2\sqrt{\beta_2})\Phi\left(\sqrt{2}\frac{\eta_1}{\sqrt{\alpha_2}}\right)}\right];$$

$$\int_{-L_2}^{L_1} \frac{\rho\varepsilon^2}{kD_{\varepsilon+}} dy = 2\eta_1\sqrt{\tau}\frac{\bar{\varepsilon}^3}{C_\mu\bar{k}^3}(\rho_1 + \rho_2\sqrt{\beta_2}).$$

При осреднении вторых членов в правых частях уравнений (6), (7) было использовано решение для U :

$$U = \begin{cases} \frac{U_1 + U_2 \sqrt{\beta_2}}{1 + \sqrt{\beta_2}} + \frac{\sqrt{\beta_2} (U_1 - U_2)}{1 + \sqrt{\beta_2}} \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{y}{2\sqrt{\tau}} \right), & \text{если } y > 0; \\ \frac{U_1 + U_2 \sqrt{\beta_2}}{1 + \sqrt{\beta_2}} + \frac{U_1 - U_2}{1 + \sqrt{\beta_2}} \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_2 \beta_2}} \frac{y}{2\sqrt{\tau}} \right), & \text{если } y < 0. \end{cases}$$

Оно получается, если в упрощенном уравнении (5)

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{D}{D_{\varepsilon+}} (\alpha_2 + 1) \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} = \alpha_2 \frac{D}{D_{\varepsilon+}} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

пренебречь вторым членом в левой части уравнения. Это приближение верно при малом изменении плотности. В Приложении 2 исследовано влияние члена $\frac{D}{D_{\varepsilon+}} (\alpha_2 + 1) \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y}$.

Найдем решение системы (9), (10), удовлетворяющее начальному условию

$$\bar{k}(\tau = 0) = \text{const}; \quad \bar{\varepsilon}(\tau = 0) = 0.$$

Далее знак осреднения будем опускать.

Рассмотрим случай, когда $g = \text{const}$ ($Q_1 = \text{const}$). Подобная задача была решена ранее в [1]. Было получено следующее решение:

$$\begin{aligned} k &= \frac{2(2C_{\varepsilon_2} - 3)}{4C_{\varepsilon_2} - 3} \left(\frac{4C_{\varepsilon_2} - 3}{2C_{\varepsilon_2}} Q_0 + Q_1 \sqrt{\tau} \right); \\ \varepsilon &= 2 \frac{2C_{\varepsilon_2} - 3}{4C_{\varepsilon_2} - 3} \sqrt{\frac{3C_{\mu}}{(4C_{\varepsilon_2} - 3)\tau}} \left(\frac{4C_{\varepsilon_2} - 3}{2C_{\varepsilon_2}} Q_0 + Q_1 \sqrt{\tau} \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (12)$$

при условии, что $C_{\varepsilon_1} = 1,5$.

Воспользовавшись решением (12) системы (9), (10), решим уравнение $\frac{d\tau}{dx} = \frac{C_{\mu} k^2}{U_0 \varepsilon}$. Найдем τ в зависимости от x , а затем (так как ширина области перемешивания L связана с переменной τ соотношением (8)) найдем L . Начальное условие: $\tau(x = 0) = \tau_0$ либо $L(x = 0) = L_0$. После интегрирования получим выражение для τ :

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \frac{Q_1 (2C_{\varepsilon_2} - 3)^2}{12 (4C_{\varepsilon_2} - 3)} C_{\mu} \left(\frac{x}{U_0} \right)^2 + \sqrt{\frac{C_{\mu} (2C_{\varepsilon_2} - 3)^2 Q_0}{6C_{\varepsilon_2}} + \frac{C_{\mu} (2C_{\varepsilon_2} - 3)^2 Q_1 \sqrt{\tau_0}}{3(4C_{\varepsilon_2} - 3)}} \frac{x}{U_0}.$$

В результате будем иметь формулу для вычисления ширины области перемешивания:

$$\begin{aligned} L &= L_0 + (1 + \sqrt{\beta_2}) \eta_1 \frac{Q_1 (2C_{\varepsilon_2} - 3)^2}{6 (4C_{\varepsilon_2} - 3)} C_{\mu} \left(\frac{x}{U_0} \right)^2 + \\ &+ \sqrt{\frac{2(2C_{\varepsilon_2} - 3)^2}{3C_{\varepsilon_2}} C_{\mu} (1 + \sqrt{\beta_2})^2 Q_0 \eta_1^2 + \frac{2C_{\mu} (2C_{\varepsilon_2} - 3)^2}{3(4C_{\varepsilon_2} - 3)} (1 + \sqrt{\beta_2}) \eta_1 Q_1 L_0} \frac{x}{U_0}. \end{aligned} \quad (13)$$

Сравнение формулы (13) с экспериментальными данными и известными численными решениями в случае $g = 0$.

Рассмотрим случай $g = 0$, т. е. $Q_1 = 0$. Тогда получим

$$L = L_0 + |2C_{\varepsilon_2} - 3| (1 + \sqrt{\beta_2}) \eta_1 \sqrt{\frac{2C_{\mu} Q_0}{3C_{\varepsilon_2}}} \frac{x}{U_0}.$$

Подставим в данную формулу выражение (11) для Q_0 и получим

$$L = L_0 + \frac{\alpha_u}{2} \sqrt{1 - A^2} \frac{|U_1 - U_2| x}{U_0}, \quad (14)$$

где $\alpha_u = \eta_1 |2C_{\varepsilon 2} - 3| \left(\frac{\beta_2 \alpha_2}{2} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{C_\mu}{6C_{\varepsilon 2}} \Phi \left(\sqrt{2} \frac{\eta_1}{\sqrt{\alpha_2}} \right) \left[1 - \frac{A_0 (1 - \sqrt{\beta_2})}{2\sqrt{2} \Phi \left(\sqrt{2} \frac{\eta_1}{\sqrt{\alpha_2}} \right)} \right]}$.

В (14) перейдем к новой переменной $\tilde{x} = \frac{|U_1 - U_2|}{U_0} x$:

$$L = L_0 + \frac{\alpha_u}{2} \sqrt{1 - A^2} \tilde{x}$$

и отсюда получим

$$\frac{dL}{d\tilde{x}} = \frac{\alpha_u}{2} \sqrt{1 - A^2}. \quad (15)$$

Осталось определить значения постоянных C_μ , $C_{\varepsilon 2}$, α_2 , β_2 .

В [4] было определено следующее соотношение для β_2 : $\sqrt{\beta_2} = (1 + A)^{0,45}$. Значения C_μ и $C_{\varepsilon 2}$ брались равными $C_\mu = 3,5$; $C_{\varepsilon 2} = 1,85$, как в [5]. Значение коэффициента α_2 подбираем таким образом, чтобы результаты расчетов по аналитической формуле (15) согласовывались с экспериментальными данными [6] и с расчетами [2, 7–9].

На рис. 2 изображены графики зависимости $\frac{dL}{d\tilde{x}} = \frac{\alpha_u}{2} \sqrt{1 - A^2}$ от числа Атвуда, где $\alpha_u =$

$$= \eta_1 |2C_{\varepsilon 2} - 3| \left(\frac{\beta_2 \alpha_2}{2} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{C_\mu}{6C_{\varepsilon 2}} \Phi \left(\sqrt{2} \frac{\eta_1}{\sqrt{\alpha_2}} \right) \left[1 - \frac{A_0 (1 - \sqrt{\beta_2})}{2\sqrt{2} \Phi \left(\sqrt{2} \frac{\eta_1}{\sqrt{\alpha_2}} \right)} \right]}$$
, в сравнении с данными экс-

периментов [6] и результатами численных расчетов [2, 7–9]. Совпадения с экспериментами и расчетами можно достигнуть с помощью постоянной α_2 .

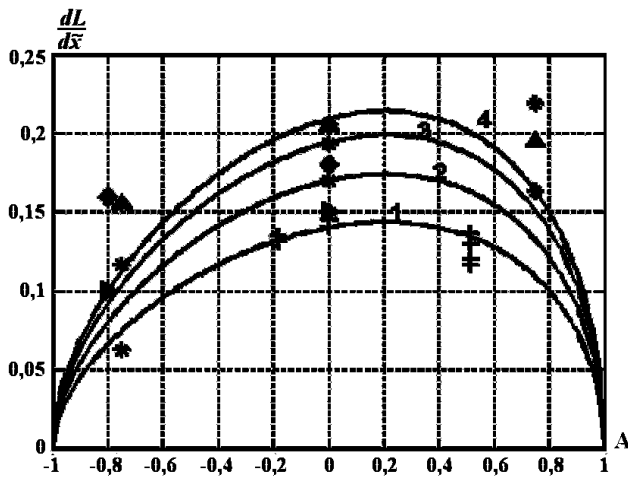


Рис. 2. Зависимость $\frac{dL}{d\tilde{x}}$ от числа Атвуда: \blacktriangle — результаты расчетов [7]; $*$ — данные экспериментов [6]; $+$ — результаты расчетов [2]; \blacklozenge — результаты расчетов по двумерной методике ЭГАК [8]; \blacktriangleright — результаты расчетов по трехмерной методике ТРЭК [9]; 1 — 4 — расчет по формуле (15) при $C_{\varepsilon 2} = 1,85$; $C_\mu = 3,5$: 1 — $\alpha_2 = 0,32$; 2 — $\alpha_2 = 0,7$; 3 — $\alpha_2 = 1,3$; 4 — $\alpha_2 = 2$

Результаты расчета по формуле (15) при $C_{\varepsilon 2} = 1,85$; $C_\mu = 3,5$ и $\alpha_2 = 0,32$ на рис. 2 обозначены линией 1. При таком наборе получено согласие с результатами [2].

При $C_{\varepsilon 2} = 1,85$; $C_\mu = 3,5$ и $\alpha_2 = 0,7$ (кривая 2) значение $\frac{dL}{d\tilde{x}}$, полученное по аналитической формуле (15) при $A = 0$, совпадает с данными эксперимента [6] и отличается от значения, полученного по трехмерной методике ТРЭК [9], на 0,02. При $A = -0,8$ это отличие также составляет 0,02.

При $C_{\varepsilon 2} = 1,85$; $C_\mu = 3,5$ и $\alpha_2 = 1,3$ (кривая 3) значение $\frac{dL}{d\tilde{x}}$, полученное по аналитической формуле (15) при $A = 0$, совпадает с данными эксперимента [6]. При $A = -0,75$ значение $\frac{dL}{d\tilde{x}}$, полученное из (15), отличается от эксперимента на 0,01, и при $A = 0,75$ это отличие составляет также 0,01. При $A = -0,8$ значение $\frac{dL}{d\tilde{x}}$ из (15) отличается от результата, полученного по трехмерной методике ТРЭК [9], на 0,007.

При $C_{\varepsilon 2} = 1,85$; $C_{\mu} = 3,5$ и $\alpha_2 = 2$ (кривая 4) значение $\frac{dL}{d\tilde{x}}$, полученное из (15) при $A = 0$, совпадает с экспериментальным значением, а также с результатом прямого численного расчета [7].

При $A = -0,75$ отличие значения $\frac{dL}{d\tilde{x}}$ из (15) от результата [7] составляет 0,04, а при $A = 0,75$ — 0,03. Для $A = -0,75$ и $A = 0,75$ значения $\frac{dL}{d\tilde{x}}$ из (15) совпадают с результатами эксперимента [6]. При $A = -0,8$ значение $\frac{dL}{d\tilde{x}}$ из (15) совпадает с результатом расчета по трехмерной методике ТРЭК [9].

На рис. 3 приведено сравнение значений $\frac{dL}{d\tilde{x}}$, рассчитанных по формуле (15) при $C_{\varepsilon 2} = 1,85$; $C_{\mu} = 3,5$; $\alpha_2 = 2$, со значениями, рассчитанными по формуле (1) при $C_{\varepsilon 2} = 1,85$; $C_{\mu} = 3,5$; $B_0 = 0,94$. Также для сравнения приведены результаты опытов [6] и результаты расчетов по численным методам [7–9]. Формула (15) описывает результаты опытов [6], а также удовлетворительно согласуется с результатами прямого численного расчета [7]. Введение несимметрии привело к лучшему согласию точного решения с разностным.

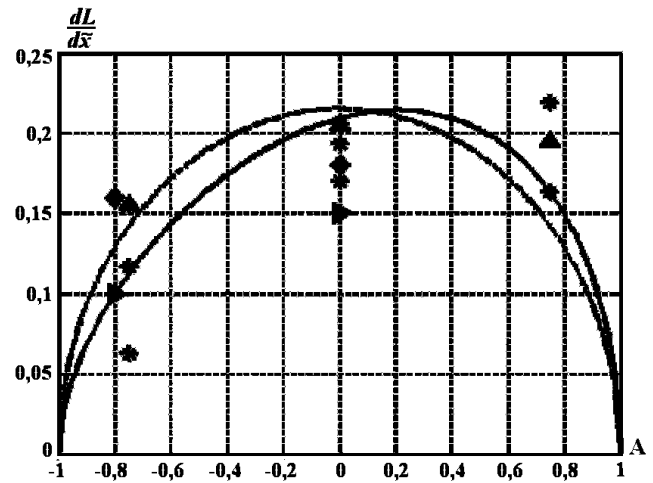


Рис. 3. Зависимость $\frac{dL}{d\tilde{x}}$ от числа Атвуда: \blacktriangle — результаты расчетов [7]; $*$ — данные экспериментов [6]; \blacklozenge — результаты расчетов по двумерной методике ЭГАК [8]; \blacktriangleright — результаты расчетов по трехмерной методике ТРЭК [9]; — — — расчет по формуле (15) при $C_{\varepsilon 2} = 1,85$; $C_{\mu} = 3,5$; $\alpha_2 = 2$; - - - - расчет по формуле (1) при $C_{\varepsilon 2} = 1,85$; $C_{\mu} = 3,5$; $B_0 = 0,94$

Заключение

На основании полуэмпирической $k\varepsilon$ -модели, описывающей турбулентное перемешивание двух потоков разной плотности и скорости, построено приближенное решение, позволяющее определять закон развития ширины области турбулентного перемешивания от исходных параметров задачи: числа Атвуда, числа A_u , ускорения g и начальной шероховатости L_0 . Была учтена несимметрия турбулентного перемешивания. При постоянном ускорении этот закон описывается формулой, сочетающей в себе квадратичный и линейный законы.

В случае, когда ускорение равно нулю, при переходе к новой системе координат, связанной с движением центра масс: $\tilde{x} = \frac{|U_1 - U_2|}{U_0}x$, была получена та же формула, что и в [1], а именно

$\frac{dL}{d\tilde{x}} = \frac{\alpha_u}{2} \sqrt{1 - A^2}$. Отличие состоит в том, что коэффициент α_u зависит от числа Атвуда. Значения C_{μ} и $C_{\varepsilon 2}$ брались следующие: $C_{\mu} = 3,5$; $C_{\varepsilon 2} = 1,85$, как в [5]. Постоянная α_2 подбиралась так, чтобы формула удовлетворяла экспериментам и расчетам. Было получено согласие с экспериментом [6] при $C_{\mu} = 3,5$; $C_{\varepsilon 2} = 1,85$; $\alpha_2 = 2$. Также формула удовлетворительно согласуется с результатами прямого численного расчета [7]. При $C_{\mu} = 3,5$; $C_{\varepsilon 2} = 1,85$; $\alpha_2 = 0,32$ получено согласие с [2]. Введение несимметрии привело к лучшему согласию точного решения с разностным.

Авторы выражают благодарность Н. Н. Бокову и В. Д. Фролову за полезные советы при подготовке данной публикации. Авторы учли ряд замечаний, сделанных И. Э. Паршуковым, которого они также благодарят за помощь.

Приложения

Приложение 1. В уравнениях (2)–(5) скорость U перед производными полагается равной \tilde{U} и принимается, что \tilde{U} постоянна, $\tilde{U} = U_0$:

$$U_0 = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Оценим погрешность данного предположения, рассматривая три случая: скорость перед производными в уравнениях (2)–(5) сначала полагается равной начальному значению скорости U_1 для всей области решения, затем U_2 , а в последнем случае $\tilde{U} = U_0$.

Рассмотрим решение (13):

$$L = L_0 + C_\mu \frac{Q_1 \eta_1 (1 + \sqrt{\beta_2}) (2C_{\varepsilon_2} - 3)^2}{6(4C_{\varepsilon_2} - 3)} \left(\frac{x}{\tilde{U}} \right)^2 + \sqrt{\frac{C_\mu 2\eta_1^2 (1 + \sqrt{\beta_2})^2 (2C_{\varepsilon_2} - 3)^2 Q_0}{3C_{\varepsilon_2}} + \frac{2\eta_1 C_\mu Q_1 L_0 (1 + \sqrt{\beta_2}) (2C_{\varepsilon_2} - 3)^2}{3(4C_{\varepsilon_2} - 3)} \frac{x}{\tilde{U}}}.$$

В случае $g = 0$ выражение (13) переписывается следующим образом:

$$L = L_0 + \eta_1 |2C_{\varepsilon_2} - 3| (1 + \sqrt{\beta_2}) \sqrt{Q_0} \sqrt{\frac{2C_\mu}{3C_{\varepsilon_2}} \frac{x}{\tilde{U}}}.$$

Подставим выражение (11) для Q_0 , получим

$$L = L_0 + \frac{\alpha_u}{2} \sqrt{(1 - A^2)} \frac{|U_1 - U_2|}{U_0} x,$$

где

$$\alpha_u = \eta_1 |2C_{\varepsilon_2} - 3| \sqrt{\frac{C_\mu \sqrt{\beta_2} \alpha_2}{6C_{\varepsilon_2} \sqrt{2}} \Phi \left(\sqrt{2} \frac{\eta_1}{\sqrt{\alpha_2}} \right) \left[1 - \frac{A_0 (1 - \sqrt{\beta_2})}{2\sqrt{2} \Phi \left(\sqrt{2} \frac{\eta_1}{\sqrt{\alpha_2}} \right)} \right]}.$$

Введем новую переменную $\tilde{x} = \frac{|U_1 - U_2|}{U_0} x$. Тогда

$$L = L_0 + \frac{\alpha_u}{2} \sqrt{(1 - A^2)} \frac{U_1 \rho_1 + U_2 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \frac{\tilde{x}}{\tilde{U}}, \quad \text{или} \quad L = L_0 + \frac{\alpha_u}{2} \sqrt{(1 - A^2)} U_1 \frac{1 + AA_u}{1 + A_u} \frac{\tilde{x}}{\tilde{U}},$$

откуда $\frac{dL}{d\tilde{x}} = \frac{\alpha_u}{2} \sqrt{(1 - A^2)} U_1 \frac{1 + AA_u}{1 + A_u} \frac{1}{\tilde{U}}$.

Рассмотрим изменение величины $\frac{dL}{d\tilde{x}}$ в зависимости от \tilde{U} при $-1 \leq A \leq 1$ и $0 \leq A_u \leq 1$ в трех случаях:

- 1) $\tilde{U} = U_1$; $\frac{dL}{d\tilde{x}} = \frac{\alpha_u}{2} \sqrt{(1 - A^2)} \frac{1 + AA_u}{1 + A_u}$;
- 2) $\tilde{U} = U_2$; $\frac{dL}{d\tilde{x}} = \frac{\alpha_u}{2} \sqrt{(1 - A^2)} \frac{1 + AA_u}{1 - A_u}$;
- 3) $\tilde{U} = U_0 = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} = U_1 \frac{1 + AA_u}{1 + A_u}$; $\frac{dL}{d\tilde{x}} = \frac{\alpha_u}{2} \sqrt{(1 - A^2)}$.

При $-1 \leq A \leq 1$ и $0 \leq A_u \leq 1$ верно следующее неравенство: $\frac{1 + AA_u}{1 + A_u} \leq 1 \leq \frac{1 + AA_u}{1 - A_u}$. Следовательно, $\frac{dL}{d\tilde{x}} (\tilde{U} = U_1) \leq \frac{dL}{d\tilde{x}} (\tilde{U} = U_0) \leq \frac{dL}{d\tilde{x}} (\tilde{U} = U_2)$.

Приложение 2. При осреднении системы уравнений (6), (7) по области перемешивания использовалось решение уравнения для скорости

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \alpha_2 \frac{D}{D_{\varepsilon+}} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (1 + \alpha_2) \frac{D}{D_{\varepsilon+}} \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (\text{П.1})$$

без учета при решении члена $\frac{D}{D_{\varepsilon+}}(1 + \alpha_2) \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y}$.

Сначала найдем решение уравнения (П.1) с учетом $\frac{D}{D_{\varepsilon+}}(1 + \alpha_2) \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y}$, предположив, что $(1 + \alpha_2) \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} = C$. При этом

$$D = \begin{cases} C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}}, & y > 0; \\ C_\mu \beta_2 \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}}, & y < 0; \end{cases} \quad D_{\varepsilon+} = C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}}; \quad U(y, 0) = \begin{cases} U_1, & y > 0; \\ U_2, & y < 0. \end{cases}$$

Будем решать следующее уравнение: $\frac{\partial U}{\partial \tau} - C \frac{D}{D_{\varepsilon+}} \frac{\partial U}{\partial y} = \alpha_2 \frac{D}{D_{\varepsilon+}} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, т. е.

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - C \frac{\partial U}{\partial y} = \alpha_2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \text{если } y > 0; \quad (\text{П.2})$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - C \beta_2 \frac{\partial U}{\partial y} = \alpha_2 \beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \text{если } y < 0; \quad (\text{П.3})$$

$$U(y, 0) = \begin{cases} U_1, & y > 0; \\ U_2, & y < 0. \end{cases}$$

Решение будем искать в виде $U(y, \tau) = G(y, \tau) e^{\mu y + \lambda \tau}$, тогда

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial G}{\partial \tau} + \lambda G \right) e^{\mu y + \lambda \tau}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{\partial G}{\partial y} + \mu G \right) e^{\mu y + \lambda \tau}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + 2\mu \frac{\partial G}{\partial y} + \mu^2 G \right) e^{\mu y + \lambda \tau}.$$

Подставив в уравнения (П.2) и (П.3), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \tau} - (C + 2\alpha_2 \mu) \frac{\partial G}{\partial y} + (\lambda - \mu C - \alpha_2 \mu^2) G &= \alpha_2 \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}, & \text{если } y > 0; \\ \frac{\partial G}{\partial \tau} - \beta_2 (C + 2\alpha_2 \mu) \frac{\partial G}{\partial y} + (\lambda - \mu C \beta_2 - \alpha_2 \beta_2 \mu^2) G &= \alpha_2 \beta_2 \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}, & \text{если } y < 0. \end{aligned}$$

Параметры μ и λ выбираем так, чтобы коэффициенты при $\frac{\partial G}{\partial y}$ и G были равны нулю, т. е.

$$\begin{aligned} C + 2\alpha_2 \mu &= 0 \quad \text{при любом } y; \\ \lambda - \mu C - \alpha_2 \mu^2 &= 0, \quad \text{если } y > 0; \quad \lambda - \mu C \beta_2 - \alpha_2 \beta_2 \mu^2 = 0, \quad \text{если } y < 0. \end{aligned}$$

Отсюда $\mu = -\frac{C}{2\alpha_2}$; $\lambda = -\frac{C^2}{4\alpha_2}$, если $y > 0$ и $\lambda = -\frac{C^2 \beta_2}{4\alpha_2}$, если $y < 0$.

Таким образом, решаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \tau} &= \alpha_2 \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}, & y > 0; \\ \frac{\partial G}{\partial \tau} &= \alpha_2 \beta_2 \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}, & y < 0 \end{aligned}$$

с начальным условием $G(y, 0) = \begin{cases} U_1 e^{\frac{C}{2\alpha_2} y}, & y > 0; \\ U_2 e^{\frac{C}{2\alpha_2} y}, & y < 0. \end{cases}$

Решением поставленной задачи будет функция

$$G(y, \tau) = G_1(y, \tau) + G_2(y, \tau),$$

где G_1 и G_2 удовлетворяют уравнению теплопроводности и следующим начальным данным:

$$\begin{aligned} G_1(y, 0) &= U_1 e^{\frac{C}{2\alpha_2} y}; & G_1(0, \tau) &= 0; & G_2(y, 0) &= 0; & G_2(0, \tau) &= G_0, & \text{если } y > 0; \\ G_1(y, 0) &= U_2 e^{\frac{C}{2\alpha_2} y}; & G_1(0, \tau) &= 0; & G_2(y, 0) &= 0; & G_2(0, \tau) &= G_0, & \text{если } y < 0. \end{aligned}$$

1) Пусть $y > 0$, тогда решаем следующие задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial G_1}{\partial \tau} = \alpha_2 \frac{\partial^2 G_1}{\partial y^2}; \\ G_1(y, 0) = U_1 e^{\frac{C}{2\alpha_2} y}; \\ G_1(0, \tau) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial G_2}{\partial \tau} = \alpha_2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2}; \\ G_2(y, 0) = 0; \\ G_2(0, \tau) = G_0. \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{U_1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 \tau}} \left(e^{-\frac{(y-\xi)^2}{4\alpha_2 \tau}} - e^{-\frac{(y+\xi)^2}{4\alpha_2 \tau}} \right) e^{\frac{C\xi}{2\alpha_2}} d\xi; \\ G_2 &= \frac{\alpha_2 G_0}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{y}{(\alpha_2(\tau-h))^{3/2}} e^{-\frac{y^2}{4\alpha_2(\tau-h)}} dh = G_0 - G_0 \Phi\left(\frac{y}{2\sqrt{\alpha_2 \tau}}\right); \\ G(y, \tau) &= G_0 - G_0 \Phi\left(\frac{y}{2\sqrt{\alpha_2 \tau}}\right) + \frac{U_1}{2} \left[e^{\frac{C(2y+C\tau)}{4\alpha_2}} \left(1 + \Phi\left(\frac{y+C\tau}{2\sqrt{\alpha_2 \tau}}\right) \right) - e^{-\frac{C(2y-C\tau)}{4\alpha_2}} \left(1 - \Phi\left(\frac{y-C\tau}{2\sqrt{\alpha_2 \tau}}\right) \right) \right]. \end{aligned}$$

2) Пусть $y < 0$, тогда

$$\begin{cases} \frac{\partial G_1}{\partial \tau} = \alpha_2 \beta_2 \frac{\partial^2 G_1}{\partial y^2}; \\ G_1(y, 0) = U_2 e^{\frac{C}{2\alpha_2} y}; \\ G_1(0, \tau) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial G_2}{\partial \tau} = \alpha_2 \beta_2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2}; \\ G_2(y, 0) = 0; \\ G_2(0, \tau) = G_0. \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{U_2 e^{\frac{C}{2\alpha_2}}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{e^\xi}{\sqrt{\alpha_2 \beta_2 \tau}} \left(e^{-\frac{(y-\xi)^2}{4\alpha_2 \beta_2 \tau}} - e^{-\frac{(y+\xi)^2}{4\alpha_2 \beta_2 \tau}} \right) d\xi; \\ G_2 &= \frac{\alpha_2 \beta_2 G_0}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{y}{(\alpha_2 \beta_2 (\tau-h))^{3/2}} e^{-\frac{y^2}{4\alpha_2 \beta_2 (\tau-h)}} dh = G_0 + G_0 \Phi\left(\frac{y}{2\sqrt{\alpha_2 \beta_2 \tau}}\right); \\ G(y, \tau) &= G_0 + G_0 \Phi\left(\frac{y}{2\sqrt{\alpha_2 \beta_2 \tau}}\right) + \frac{U_2}{2} \left[e^{\frac{C(2y+C\beta_2 \tau)}{4\alpha_2}} \left(1 - \Phi\left(\frac{y+C\beta_2 \tau}{2\sqrt{\alpha_2 \beta_2 \tau}}\right) \right) - e^{-\frac{C(2y-C\beta_2 \tau)}{4\alpha_2}} \left(\Phi\left(\frac{y-C\beta_2 \tau}{2\sqrt{\alpha_2 \beta_2 \tau}}\right) + 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь $G_0 = \frac{U_1 + U_2 \sqrt{\beta_2}}{1 + \sqrt{\beta_2}}$.

Рассмотрим зависимость решения от C .

При $y > 0$ решением является следующая функция:

$$U(y, \tau) = \frac{U_1 + U_2 \sqrt{\beta_2}}{1 + \sqrt{\beta_2}} e^{-\frac{C(2y+C\tau)}{4\alpha_2}} \left(1 - \Phi\left(\frac{y}{2\sqrt{\alpha_2 \tau}}\right) \right) +$$

$$+ \frac{U_1}{2} \left[\left(1 + \Phi \left(\frac{y + C\tau}{2\sqrt{\alpha_2\tau}} \right) \right) - e^{-\frac{C}{\alpha_2}y} \left(1 - \Phi \left(\frac{y + C\tau}{2\sqrt{\alpha_2\tau}} \right) \right) \right]. \quad (\text{П.4})$$

Если $C = 0$, то

$$U(y, \tau) = \frac{U_1 + U_2\sqrt{\beta_2}}{1 + \sqrt{\beta_2}} + \frac{\sqrt{\beta_2}}{1 + \sqrt{\beta_2}} (U_1 - U_2) \Phi \left(\frac{y}{2\sqrt{\alpha_2\tau}} \right). \quad (\text{П.5})$$

При $y < 0$ решением является следующая функция:

$$U(y, \tau) = \frac{U_1 + U_2\sqrt{\beta_2}}{1 + \sqrt{\beta_2}} e^{-\frac{C(2y+C\beta_2\tau)}{4\alpha_2}} \left(1 + \Phi \left(\frac{y}{2\sqrt{\alpha_2\beta_2\tau}} \right) \right) + \frac{U_2}{2} \left[\left(1 - \Phi \left(\frac{y + C\beta_2\tau}{2\sqrt{\alpha_2\beta_2\tau}} \right) \right) - e^{-\frac{C}{\alpha_2}y} \left(\Phi \left(\frac{y - C\beta_2\tau}{2\sqrt{\alpha_2\beta_2\tau}} \right) + 1 \right) \right].$$

Если $C = 0$, то

$$U(y, \tau) = \frac{U_1 + U_2\sqrt{\beta_2}}{1 + \sqrt{\beta_2}} + \frac{U_1 - U_2}{1 + \sqrt{\beta_2}} \Phi \left(\frac{y}{2\sqrt{\alpha_2\beta_2\tau}} \right).$$

Проиллюстрируем случай $y > 0$.

На рис. 4 показаны профили решения уравнения (П.1) в зависимости от C . Видно, что с увеличением C возрастает разница между упрощенным решением (П.5) и уточненным решением (П.4).

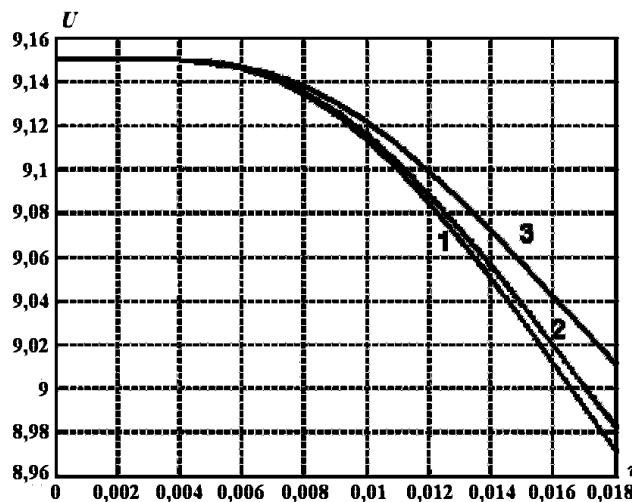


Рис. 4. Зависимость решения уравнения (П.1) от τ с различными значениями C ($U_1 = 9,15$; $U_2 = 1,3$; $\sqrt{\beta_2} = (1 + A)^{0,45}$; $A = -0,75$; $C_{\varepsilon 2} = 1,85$; $C_\mu = 3,5$; $\alpha_2 = 2$; $y = 0,5$): 1 — $C = 0$; 2 — $C = 0,5$; 3 — $C = 2$

Список литературы

1. Заболотникова Т. В., Неуважаев В. Е. Турбулентное перемешивание двух потоков разной плотности и скорости, движущихся в поле силы тяжести // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 3. С. 3—13.
2. Яковлевский О. В. К вопросу о толщине зоны турбулентного перемешивания на границе двух потоков газа разной скорости и плотности // Изв. АН СССР. Отд. тех. наук. 1958. № 10. С. 153 — 155.
3. Neuvazhayev V. E. Turbulent mixing of two fluids moving in gravitational field // 6th Int. Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing. Marseil, 1997. P. 362.
4. Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г. Турбулентное перемешивание двух жидкостей при произвольном законе ускорения // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 4. С. 11—19.

5. *Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г.* Описание гравитационного турбулентного перемешивания по $k\varepsilon$ -модели // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1986. Вып. 1. С. 28.
6. *Brown G. L., Roshko A.* On density effects and large structure in turbulent mixing layers // J. of Fluid Mechanics. 1974. Vol. 64(4). P. 775—815.
7. *Еськов Н. С., Козловских А. С., Неуважаев Д. В.* Численное моделирование развитой сдвиговой турбулентности // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 1. С. 77—83.
8. *Бахрах С. М., Жмайло В. А., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В.* Численное моделирование турбулентного перемешивания в сдвиговых течениях // Числ. методы мех. спл. среды. 1983. Т. 14, № 2. С. 11—27.
9. *Stadnik A. A., Statsenko V. P., Yanilkin Yu. V. Zhmailo V. A.* Direct numerical simulation of turbulent mixing in shear flows // Laser and Particle Beams. 1997. Vol. 15(1). P. 115—125.

Статья поступила в редакцию 6.03.06.
