

УДК 517.9:532

## О СТРУКТУРЕ БЕГУЩИХ ВОЛН В ИДЕАЛЬНОМ ГАЗЕ С ИЗЛУЧЕНИЕМ

Б. П. Тихомиров  
(РФЯЦ–ВНИИЭФ)

Изучается влияние энергии и давления излучения на структуру бегущих волн в высокотемпературной газовой среде. Рассматриваемая автомодельная задача сводится к дифференциальному уравнению, зависящему от четырех параметров. Показано, что структура решения в целом определяется знаком потока тепла в критической точке, который, в свою очередь, зависит от значений показателя адиабаты и параметра, характеризующего поле излучения. Анализируются состояния равновесия изучаемой системы. Установлено, что при наличии излучения могут появиться одна или две дополнительные точки покоя; указаны достаточные условия, когда их нет. Приведен численный пример. Предложен простой способ построения аналитических тестов.

## Введение

В работе [1] в рамках приближения лучистой теплопроводности рассмотрена автомодельная задача о взаимодействии излучения с веществом и построена теория бегущих температурно-гидродинамических волн в высокотемпературной газовой среде для случая, когда можно пренебречь энергией и давлением излучения по сравнению с энергией вещества и материальным давлением. В этом предельном случае влияние излучения на движение газа и энергетический баланс проявляется только через механизм нелинейной теплопроводности. Структура решения зависит от трех параметров. Два из них, характеризующие степень нелинейности уравнения теплопроводности, определяют поведение интегральных кривых в окрестности начального фона и бесконечной плотности, а третий параметр — показатель адиабаты — характеризует картину поведения решения в целом. Возможны три качественно различных поля интегральных кривых. Они соответствуют изменению показателя адиабаты в интервалах  $(1, 3)$  и  $(3, \infty)$  и значению  $\gamma = 3$ . Это значение показателя адиабаты является точкой бифуркации решения.

В настоящей работе результаты исследований [1] обобщаются на случай, когда энергия излучения по порядку величины сопоставима с энергией вещества. Такой режим реализуется

при очень высоких температурах или в сильно разреженном газе. В систему уравнений газовой динамики с теплопроводностью вводятся плотность энергии и давление равновесного излучения. В автомодельных уравнениях появляется четвертый параметр, характеризующий вклад излучения. Исследование усложняется, так как структура решений в целом определяется не одним, а двумя бифуркационными параметрами. Тем не менее при тех значениях показателя адиабаты, которые обычно встречаются в приложениях, удается установить, что и в более общей постановке задачи возможны три качественно различные картины поведения интегральных кривых, аналогичные рассмотренным в работе [1]. В качестве характеристики, определяющей структуру решения, выступает знак потока тепла в критической точке. Вместо точки бифуркации появляются линии бифуркации. Кроме того, при больших значениях показателя адиабаты в системе автомодельных уравнений с излучением появляются две дополнительные точки покоя. В результате структура решения становится более сложной и качественно отличается от структуры решения в идеальном газе без учета энергии и давления излучения.

Исследованию автомодельных решений уравнений газовой динамики с теплопроводностью методом бегущих волн посвящено много работ. Достаточно подробный список литературы приведен в монографии [2].

## 1. Постановка задачи

В рамках модели лучистой теплопроводности рассматривается задача о прогреве газовой среды излучением для плоского одномерного случая. Предполагается, что коэффициент теплопроводности является степенной функцией температуры  $T$  и удельного объема  $V$ . Газ считается идеальным. В уравнение состояния вводятся члены, учитывающие плотность энергии и давление равновесного излучения:

$$p = R\rho T + \frac{a}{3}T^4; \quad E = \frac{R}{\gamma-1}T + \frac{aT^4}{\rho},$$

где  $p$  — давление;  $\rho$  — плотность;  $E$  — энергия единицы массы;  $R$  — газовая постоянная;  $\gamma$  — показатель адиабаты;  $a$  — постоянная Стефана.

Система уравнений газовой динамики с нелинейной теплопроводностью записывается в лагранжевых координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} &= 0; & \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} &= 0; \\ \frac{\partial E}{\partial t} + p \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial m} &= 0; & W &= -\varkappa_0 T^n V^k \frac{\partial T}{\partial m}. \end{aligned}$$

Здесь  $t$  — время;  $m$  — выраженная в граммах массовая переменная;  $u$  — скорость;  $W$  — поток тепла;  $\varkappa_0, n, k$  — константы.

Для данной системы уравнений изучаются решения вида бегущей волны, распространяющейся с постоянной массовой скоростью  $D$  по начальному нулевому фону

$$\rho = \rho_0; \quad T = 0; \quad u = u_0; \quad W = 0.$$

Решение зависит от шести размерных постоянных параметров. Выразив масштабы величин через параметры  $\varkappa_0, D, R, \rho_0$ , имеющие независимые размерности, введем безразмерные независимую и зависимые переменные:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{Dt - m}{\varkappa_0 D^{2n-1} R^{-(n+1)} \rho_0^{-(2n+k)}}; \\ \bar{U}(\xi) &= \frac{u(m, t)}{D \rho_0^{-1}}; & \bar{V}(\xi) &= \rho_0 V(m, t); \\ \bar{T}(\xi) &= \frac{T(m, t)}{D^2 R^{-1} \rho_0^{-2}}; & \bar{p}(\xi) &= \frac{p(m, t)}{D^2 \rho_0^{-1}}; \\ \bar{E}(\xi) &= \frac{E(m, t)}{D^2 \rho_0^{-2}}; & \bar{W}(\xi) &= \frac{W(m, t)}{D^3 \rho_0^{-2}}, \end{aligned}$$

а также безразмерный параметр

$$\alpha = a D^6 R^{-4} \rho_0^{-7},$$

характеризующий вклад излучения в полную плотность энергии и полное давление.

Подставляя безразмерные переменные в уравнение состояния и рассматриваемую систему, получаем два алгебраических уравнения

$$p = \frac{T}{V} + \frac{\alpha}{3}T^4; \quad E = \frac{1}{\gamma-1}T + \alpha T^4 V \quad (1)$$

и систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\xi} - \frac{dp}{d\xi} &= 0; \\ \frac{dV}{d\xi} + \frac{du}{d\xi} &= 0; \\ \frac{dE}{d\xi} - p \frac{du}{d\xi} - \frac{dW}{d\xi} &= 0; \\ W &= T^n V^k \frac{dT}{d\xi}, \end{aligned}$$

из которых первые три уравнения легко интегрируются:

$$u - p = u_0; \quad p + V = 1; \quad W = E - \frac{1}{2}p^2, \quad (2)$$

а четвертое можно записать в виде

$$\frac{dV}{d\xi} = \frac{T^{-n} V^{-k} W}{\frac{dT}{dV}}. \quad (3)$$

За безразмерными величинами сохранены обозначения размерных величин. Все величины в (1)–(3) — безразмерные. Из данных выражений видно, что исследование системы автономных уравнений сводится к изучению одного дифференциального уравнения (3).

## 2. Критическая температура.

### Знак потока тепла в критической точке

Из уравнения состояния (1) и второго из интегралов (2) вытекает соотношение

$$V(1-V) = T + \frac{\alpha T^4}{3}V,$$

из которого следует, что температура является однозначной функцией удельного объема. Напротив, удельный объем — многозначная функция температуры, имеющая две ветви:

$$V = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha}{3}T^4 \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\alpha}{3}T^4 \right)^2 - T}. \quad (4)$$

Производная от температуры по удельному объему

$$\frac{dT}{dV} = \frac{1 - \frac{\alpha}{3}T^4 - 2V}{1 + 4\frac{\alpha T^3}{3}V}$$

на первой ветви (ей соответствует знак плюс в формуле (4)) отрицательна, на второй ветви — положительна и обращается в нуль одновременно с подкоренным выражением в (4). В этой точке температура имеет максимальное значение  $T_*$ . Будем называть эту температуру критической. Соответствующие значения удельного объема и потока тепла обозначим через  $V_*$  и  $W_*$ .

Легко проверить, что максимальное значение температуры удовлетворяет неравенству

$$T_* \leq \min \left\{ \left( \frac{3}{\alpha} \right)^{1/4}, \frac{1}{4} \right\}.$$

Из этой мажорантной оценки следует, что при увеличении параметра  $\alpha$  значение критической температуры стремится к нулю. На рис. 1 показана зависимость температуры от удельного объема для четырех значений параметра  $\alpha$ : 0; 325,2; 3 599; 98 300. Соответствующие значения критической температуры: 0,25; 0,1875; 0,125; 0,0625.

Критическая температура имеет простой физический смысл. При этой температуре массовая скорость распространения волны совпадает с умноженной на плотность изотермической скоростью звука. В безразмерных переменных это означает, что в данной точке  $V = \sqrt{T}$ . Легко видеть, что на первой ветви ( $V_* < V \leq 1$ ) реализуется сверхзвуковой режим распространения температурной волны:  $V > \sqrt{T}$ , а на второй ветви ( $0 \leq V < V_*$ ) — дозвуковой режим:  $V < \sqrt{T}$ .

Зная значение максимальной температуры, поток тепла в критической точке можно рассчитать по формуле

$$W_* = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - 14 \right) T_* + 8\sqrt{T_*} - 1 \right].$$

Как будет в дальнейшем показано, структура бегущих волн определяется знаком потока тепла в критической точке. В свою очередь, знак потока тепла в точке с максимальным значением температуры легко определяется по параметрам  $\gamma$  и  $\alpha$  без вычисления критической температуры. Нетрудно установить, что:

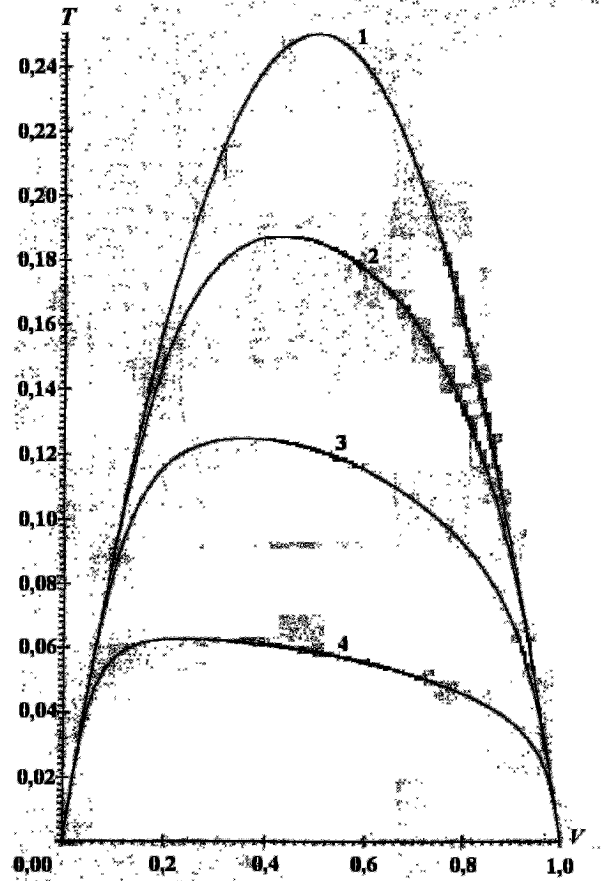


Рис. 1. Зависимость температуры от удельного объема: 1 —  $\alpha = 0$ ; 2 —  $\alpha = 325,2$ ; 3 —  $\alpha = 3599$ ; 4 —  $\alpha = 98300$

а) в интервале  $1 < \gamma < 3$ :

$$\begin{aligned} W_* &> 0, & \text{если } \alpha \in (0, \alpha_2); \\ W_* &< 0, & \text{если } \alpha_2 < \alpha; \\ W_* &= 0 & \text{при } \alpha = \alpha_2(\gamma), \end{aligned}$$

б) в интервале  $3 \leq \gamma$ :

$$\begin{aligned} W_* &> 0, & \text{если } \alpha \in (\alpha_1, \alpha_2); \\ W_* &< 0, & \text{если } \alpha \in (0, \alpha_1) \text{ или } \alpha_2 < \alpha; \\ W_* &= 0 & \text{при } \alpha = \alpha_1(\gamma) \text{ или } \alpha = \alpha_2(\gamma), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1(\gamma) &= 3 \left( 2 - \sqrt{\frac{3\gamma - 1}{\gamma - 1}} \right) \left( 4 - \sqrt{\frac{3\gamma - 1}{\gamma - 1}} \right)^7; \\ \alpha_2(\gamma) &= 3 \left( 2 + \sqrt{\frac{3\gamma - 1}{\gamma - 1}} \right) \left( 4 + \sqrt{\frac{3\gamma - 1}{\gamma - 1}} \right)^7. \end{aligned}$$

На плоскости  $(\gamma, \alpha)$ , представленной на рис. 2, первая кривая выходит из точки  $(3, 0)$  и при

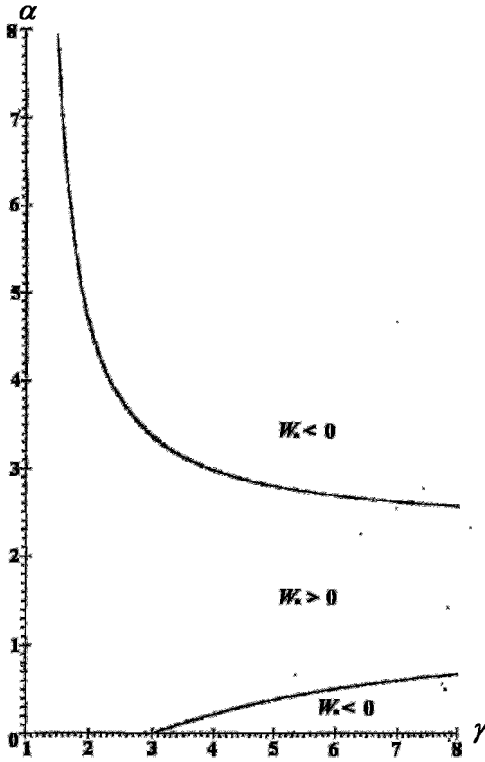


Рис. 2. Зависимость знака потока тепла в критической точке от параметров  $\alpha$  и  $\gamma$

$\gamma \rightarrow \infty$  неограниченно приближается к прямой  $\alpha = 3(2 - \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})^7 \approx 248$ . Вторая кривая имеет асимптоты  $\gamma = 1$  и  $\alpha = 3(2 + \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})^7 \approx 228 \cdot 10^4$ . На данных кривых поток тепла в критической точке равен нулю. Эти кривые являются линиями бифуркации решения.

### 3. Неподвижные точки дифференциального уравнения

Качественное поведение решений обыкновенного дифференциального уравнения (3) определяется неподвижными точками уравнения, т. е. точками, в которых правая часть дифференциального уравнения равна нулю. Поэтому для анализа структуры решения важно знать расположение корней зависящего от параметров  $\gamma$ ,  $\alpha$  уравнения

$$W(V, \alpha, \gamma) \equiv \frac{1}{\gamma - 1} T + \alpha T^4 V - \frac{1}{2} (1 - V)^2 = 0 \quad (5)$$

внутри допустимого интервала  $(0, 1)$  изменения удельного объема. Отметим, что поток тепла является аналитической функцией удельного объема.

На левом конце интервала  $(0, 1)$  поток тепла отрицателен, на правом конце он равен нулю. На дозвуковой ветви решения производная от потока тепла по удельному объему

$$\frac{dW}{dV} = \left( \frac{1}{\gamma - 1} + 4\alpha T^3 V \right) \frac{dT}{dV} + 1 - V + \alpha T^4$$

положительна, на правом конце — отрицательна. Поэтому внутри изучаемого интервала обязательно найдется хотя бы одна точка, в которой поток тепла обращается в нуль, причем число таких точек, если нет кратных корней, нечетно.

Если преобразовать левую часть уравнения (5) к виду

$$W = \frac{T}{2V} \left[ \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left( V - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) + 7 \frac{\alpha T^3}{3} V \left( V - \frac{1}{7} \right) \right],$$

то легко можно установить, что при  $\alpha = 0$ , а также при  $\gamma = 4/3$  и любых  $\alpha > 0$  уравнение имеет единственный корень  $V = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ . В остальных случаях корни уравнения лежат между значениями  $(\gamma - 1)/(\gamma + 1)$  и  $1/7$  при  $\gamma < 4/3$  и  $1/7$  и  $(\gamma - 1)/(\gamma + 1)$  при  $\gamma > 4/3$ . В этом состоит одна из особенностей движения газа в поле излучения.

Относительно корней уравнения (5) справедливы два утверждения.

**Теорема 1.** При  $1 < \gamma \leq 21,7$  и всех  $\alpha > 0$  уравнение (5) имеет внутри интервала  $(0, 1)$  изменения  $V$  один вещественный корень.

**Теорема 2.** При достаточно больших значениях показателя адиабаты и значениях  $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ , где  $0 < \alpha_{\min} < \alpha_{\max}$ , у уравнения (5) появляются два дополнительных вещественных корня (с учетом кратности), расположенных на сверхзвуковой ветви решения.

Для обоснования первого утверждения рассматриваются "подозрительные" на экстремум точки функции  $W = W(V, \alpha, \gamma)$  и показывается, что в них поток тепла положителен. Для доказательства второй теоремы на плоскости  $(V, \alpha)$  рассматриваются кривые равновесных состояний

$$\alpha = \frac{3(\gamma + 1)}{2(3\gamma - 4)} \left[ \frac{2(3\gamma - 4)}{7(\gamma - 1)} \right]^4 \frac{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} - V}{V(1 - V)^3 (V - 1/7)^4} \quad (6)$$

и устанавливается, что при достаточно больших значениях показателя адиабаты эти кривые имеют две стационарные точки, в первой из которых

функция (6) имеет локальный минимум  $\alpha_{\min}$ , а во второй — локальный максимум  $\alpha_{\max}$ . Таким образом, удельный объем, вообще говоря, является неоднозначной функцией параметра, характеризующего вклад излучения, и уравнение (5) может иметь три вещественных корня. В этом состоит основная особенность фазового портрета автомодельного движения идеального газа с учетом излучения.

Заметим, что появившаяся в формулировке теоремы 1 константа 21,7, ограничивающая сверху значение показателя адиабаты, разумеется, не является точной и целиком диктуется избранным методом доказательства, а не существом дела. Об этом, в частности, свидетельствует численный анализ корней уравнения (5), проведенный для значений  $\gamma \in [22, 200]$  и  $\alpha > 0$ . В расчетах было обнаружено, что три корня появляются при значениях  $\gamma = 25,8$  и  $\gamma \geq 28$  (рис. 3).

Итак, уравнение (5) внутри интервала  $(0, 1)$  имеет один, два или три вещественных корня. Очевидно, что вещественные корни, не совпадающие с критической точкой, являются точками покоя (неподвижными точками) дифференциального уравнения.

Отметим, что производная от потока тепла по удельному объему в критической точке отлична от нуля. Поэтому если критическая точка является корнем уравнения (5), то этот корень простой. Отсюда, так как производная от температуры по удельному объему в критической точке равна нулю, следует, что критическая точка не может быть неподвижной точкой дифференциального уравнения.

Обратимся к соотношению (6). При каждом фиксированном значении показателя адиабаты оно дает связь между параметром, характеризующим вклад излучения, и корнем уравнения (5). Легко видеть, что при стремлении этого параметра к  $+\infty$  значение корня уравнения неограниченно приближается к  $1/7$ . Это вполне естественно, так как в этом случае вклад излучения становится определяющим, а связь между плотностью энергии излучения и давлением излучения, как известно, можно интерпретировать как уравнение состояния идеального газа с показателем адиабаты  $4/3$ .

#### 4. Поведение решения около опорных точек

Перейдем к исследованию поведения интегральных кривых в окрестности опорных точек,

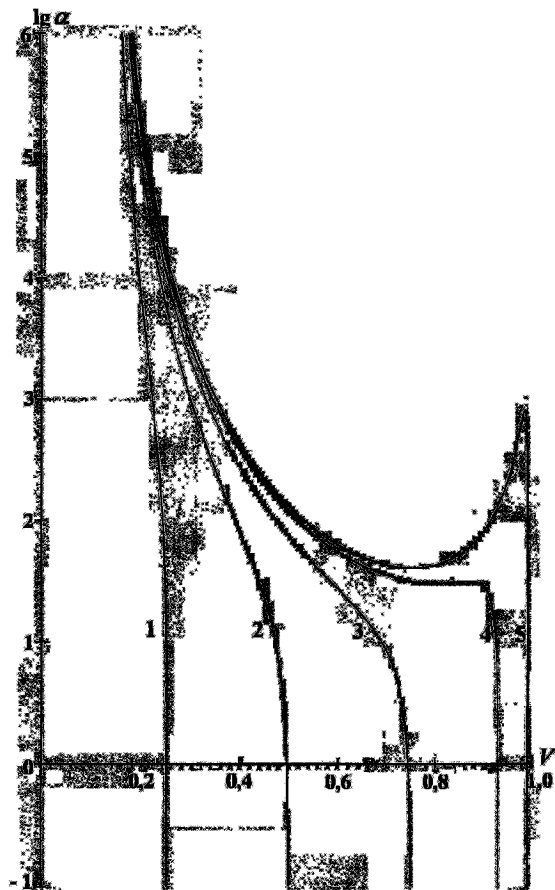


Рис. 3. Диаграммы равновесных состояний: 1 —  $\gamma = 5/3$ ; 2 —  $\gamma = 3$ ; 3 —  $\gamma = 7$ ; 4 —  $\gamma = 28$ ; 5 —  $\gamma = 200$

под которыми будем понимать начальный фон  $V = 1$ , точку  $V = 0$ , критическую точку  $V_*$  и точки покоя  $V_s$ , лежащие внутри интервала  $(0, 1)$ . Разложение решения около опорных точек на плоскости  $(\xi, V)$  получается стандартным методом: сначала дифференциальное уравнение линеаризуется вблизи опорной точки, а затем линеаризованное уравнение интегрируется. Приведем результаты интегрирования для указанных опорных точек.

Рассмотрим поведение решения в окрестности неподвижных точек. Пусть точка покоя  $V_s$  соответствует простому корню уравнения (5). Обозначим через  $Q_s$  отношение производных от потока тепла и температуры по удельному объему в точке покоя. Тогда из линеаризованного уравнения (3) следует, что вблизи линии  $V = V_s$  справедливо разложение

$$V = V_s + C \exp\left(T_s^{-n} V_s^{-k} Q_s \xi\right).$$

В этом выражении константа  $C > 0$ , если  $V > V_s$ , и  $C < 0$ , если  $V < V_s$ . При  $Q_s < 0$  и  $Q_s > 0$  инте-

гральные кривые неограниченно приближаются к линии  $V = V_s$ , когда аргумент стремится к  $+\infty$  и  $-\infty$  соответственно.

Пусть точка покоя соответствует двукратному корню. Обозначим корни уравнения в порядке возрастания через  $V_s^{(1)}$ ,  $V_s^{(2)}$ ,  $V_s^{(3)}$ . Введем величину

$$B_s = 2T_s^n V_s^k \left( \frac{dT}{dV} \right)_s / \left( \frac{d^2W}{dV^2} \right)_s.$$

Возможны два случая:

- 1)  $V_s = V_s^{(2)} = V_s^{(3)}$ ;
- 2)  $V_s = V_s^{(1)} = V_s^{(2)}$ .

Нетрудно показать, что решение в окрестности точки покоя имеет вид

$$V = V_s - \frac{B_s}{\xi + C},$$

где  $C$  — константа. Легко убедиться, что в первом случае  $B_s < 0$ . Константа  $C$  берется положительной для интегральных кривых  $V > V_s$  и отрицательной для  $V < V_s$ . Во втором случае  $B_s > 0$  и константа должна быть положительной при  $V < V_s$ , отрицательной при  $V > V_s$ .

Проанализируем теперь поведение решения в окрестности граничных точек рассматриваемого интервала.

Точка  $V = 1$  соответствует начальному фону. Она является точкой покоя дифференциального уравнения. Структура решения в ее окрестности не зависит от параметра  $\alpha$  и полностью определяется показателем степени  $n$ . Поэтому формулы разложения решения в окрестности начального фона совпадают с формулами, приведенными в работе [1]. Рассмотрим два случая.

Пусть  $n > 0$ . Разложение решения вблизи фронта волны с точностью до членов более высокого порядка имеет вид

$$V = 1 - \left( \frac{n}{\gamma - 1} \xi \right)^{1/n} + \dots, \quad \xi \geq 0.$$

Фронт волны находится на конечном расстоянии  $\xi = 0$ . Производная от удельного объема по координате вблизи фронта отрицательна, а от температуры — положительна. Поэтому по мере удаления от фронта плотность и температура возрастают. На самом фронте волны производная от удельного объема обращается в нуль при  $0 < n < 1$ , конечна при  $n = 1$  и равна  $-\infty$  при  $n > 1$ .

Пусть  $n = 0$ . Разложение удельного объема около линии начальных данных имеет вид

$$V = 1 - C \exp \left( \frac{1}{\gamma - 1} \xi \right), \quad C = \text{const} > 0.$$

При  $\xi \rightarrow -\infty$  интегральные кривые асимптотически приближаются к этой линии. Таким образом, в данном случае фронт волны удален на бесконечное расстояние.

Вблизи линии  $V = 0$ , на которой плотность равна бесконечности, температура — нулю, а давление имеет конечное значение, структура решения также не зависит от параметра  $\alpha$  и определяется показателями степени  $n$  и  $k$ .

Пусть  $n + k + 1 > 0$ . Разложение решения с точностью до членов второго порядка малости имеет вид

$$V = \left[ \frac{n + k + 1}{2} (\xi_0 - \xi) \right]^{1/(n+k+1)}.$$

Решение определено при  $\xi \leq \xi_0$ . Производная от удельного объема отрицательна, поэтому удельный объем и температура являются убывающими функциями. В точке  $\xi_0$  производная при  $n + k > 0$  равна  $-\infty$ , при  $n + k = 0$  равна  $-0,5$  и обращается в нуль при  $n + k < 0$ .

Пусть теперь  $n + k + 1 \leq 0$ . В этом случае интегральные кривые при  $\xi \rightarrow +\infty$  асимптотически приближаются к прямой  $V = 0$ . При  $n + k + 1 < 0$  разложение имеет ту же форму, что и в первом случае, с тем отличием, что  $\xi > \xi_0$ , где  $\xi_0$  — произвольная постоянная. При  $n + k + 1 = 0$  разложение имеет вид  $V = C \exp(-0,5\xi) + \dots$ , где  $C > 0$ .

Для исследования поведения интегральных кривых в окрестности критической точки рассмотрим следующие два случая.

Пусть критическая точка не является корнем уравнения (5). Тогда в ее окрестности справедливы следующие разложения решения:

$$\begin{aligned} V &= V_* \pm \left[ (4 - 7\sqrt{T_*}) T_*^{-[n+(k+1)/2]} \right]^{1/2} \times \\ &\quad \times [W_* (\xi_* - \xi)]^{1/2}; \\ T &= T_* - T_*^{-(n+k/2)} W_* (\xi_* - \xi); \\ W &= W_* + (4 - 7\sqrt{T_*}) (V - V_*). \end{aligned}$$

Знак плюс в формуле для удельного объема соответствует первой (сверхзвуковой) ветви решения, знак минус — второй (дозвуковой) ветви решения.

В критической точке производная от удельного объема по координате обращается в бесконечность, производная от температуры конечна.

При положительном потоке тепла независимая переменная не превышает критического значения  $\xi_*$ , при котором температура имеет максимум. Наоборот, когда поток тепла отрицателен, независимая переменная не может быть меньше критического значения.

Пусть критическая точка совпадает с корнем уравнения (5). В этом случае разложения решения в окрестности критической точки имеют вид

$$\begin{aligned} V &= V_* + \frac{1}{2} \left(4 - 7\sqrt{T_*}\right)^2 T_*^{-[n+(k+1)/2]} (\xi_* - \xi); \\ T &= T_* - \frac{\sqrt{T_*}}{4 - 7\sqrt{T_*}} (V - V_*)^2; \\ W &= \left(4 - 7\sqrt{T_*}\right) (V - V_*). \end{aligned}$$

Из разложений следует, что производная от удельного объема по координате конечна и отрицательна, производная от температуры обращается в нуль. Таким образом, в окрестности критической точки удельный объем, а следовательно, и поток тепла являются убывающими функциями координаты.

## 5. Описание поля интегральных кривых

Фазовый портрет дифференциального уравнения при  $\alpha = 0$ , как установлено в работе [1], полностью определяется одним параметром — показателем адиабаты. Дифференциальное уравнение имеет точку бифуркации  $\gamma = 3$ , и в зависимости от значения показателя адиабаты возможны три качественно различных решения.

Если в системе есть энергия и давление излучения ( $\alpha > 0$ ), структура решения в целом зависит от двух параметров:  $\gamma$  и  $\alpha$ . Поведение интегральных кривых определяется положением критической точки на фазовой прямой относительно неподвижных точек, а также числом и характером неподвижных точек. Существенно различные структуры решения получаются в трех случаях: когда критическая точка лежит на фазовой прямой справа от точки покоя, совпадает с ней или находится слева от точки покоя. В свою очередь, положение критической точки на фазовой прямой однозначно определяется знаком потока тепла при критической температуре.

Рассмотрим варианты возможных структур решения дифференциального уравнения (3).

**Положительный тепловой поток в критической точке.** Пусть внутри изучаемого интервала есть только одна точка покоя. Тогда она

находится на второй ветви решения, так как при  $V = 0$  поток тепла отрицателен.

Поведение интегральных кривых схематично показано на рис. 4, а. Выходящая из точки  $(0, 1)$  кривая касается оси ординат. Такой характер поведения решения вблизи начального фона соответствует показателю нелинейности  $n > 1$ . Для других значений параметра кривая либо ортогональна оси ординат ( $0 < n < 1$ ), либо подходит к ней под острым углом ( $n = 1$ ), либо ( $n = 0$ ) асимптотически приближается к прямой  $V = 1$  при  $\xi \rightarrow -\infty$ .

Напомним, что на первой ветви решения производная от температуры по удельному объему всегда отрицательна. Поток тепла в рассматриваемом случае, напротив, больше нуля, так как на этой ветви нет точек покоя. Поэтому из уравнения (3) следует, что при возрастании независимой переменной удельный объем убывает. Независимая переменная растет до критического значения  $\xi_*$ , при котором удельный объем становится равным  $V_*$ , а производная обращается в  $-\infty$ . Критическая точка является точкой поворота интегральной кривой. В этой точке происходит переход с одной ветви решения на другую.

Прямая  $V = V_s$  является константным решением уравнения (3). Из разложения решения в ее окрестности видно, что все интегральные кривые, лежащие выше константного решения, асимптотически приближаются к этой прямой при  $\xi \rightarrow -\infty$ . В полосе  $0 < V < V_s$  поток тепла отрицателен, а значит, отрицательна и производная от удельного объема по координате. Поэтому при стремлении независимой переменной к  $-\infty$  лежащие в этой полосе интегральные кривые асимптотически приближаются к прямой константного решения.

Как следует из разложений решения вблизи прямой  $V = 0$ , интегральные кривые для показателей нелинейности, удовлетворяющих неравенству  $n+k+1 > 0$ , пересекают указанную прямую при некотором конечном значении  $\xi_0$ . Именно этот вариант изображен на рис. 4, а. Если показатели нелинейности таковы, что  $n+k+1 \leq 0$ , интегральные кривые асимптотически приближаются к указанной прямой при  $\xi \rightarrow +\infty$ .

Пусть теперь внутри рассматриваемого интервала есть три точки покоя. Очевидно, что на первой ветви решения расположены две из них, а на второй — одна, так как поток тепла на этой ветви является монотонной функцией удельного объема.

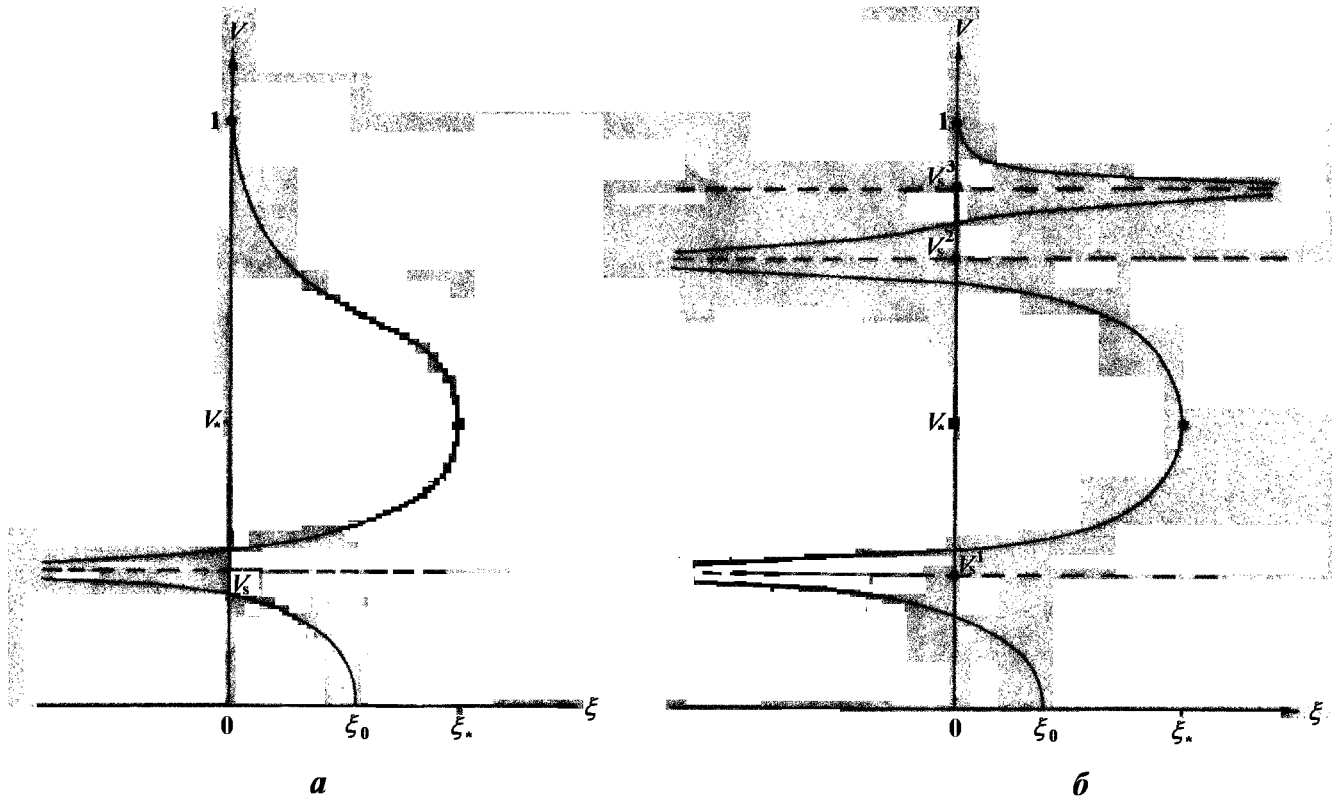


Рис. 4. Структура решения при положительном тепловом потоке в критической точке: *a* — вариант с одной точкой покоя; *b* — вариант с тремя точками покоя

Перенумеруем точки покоя в порядке возрастания удельного объема. Они разбивают поле интегральных кривых на пять полос. Три из них включают первую ветвь решения, две — вторую. Ясно, что структура второй ветви решения ничем не отличается от только что рассмотренного случая, когда уравнение имеет одну точку покоя.

Качественное поведение интегральных кривых показано на рис. 4, *b*. Заметим, что производная от потока тепла по удельному объему в третьей точке покоя положительна, а во второй — отрицательна. Отсюда и из разложения решения в окрестности точек покоя вытекает, что в полосе  $V_s^{(3)} < V < 1$  интегральные кривые стремятся к прямой  $V = V_s^{(3)}$  при  $\xi \rightarrow +\infty$ , а в полосе  $V_s^{(2)} < V < V_s^{(3)}$  — асимптотически приближаются к прямым  $V = V_s^{(2)}$  и  $V = V_s^{(3)}$ , когда независимая переменная стремится соответственно к  $-\infty$  и  $+\infty$ .

Такова структура решения, когда корни уравнения (5) простые. Однако возможна ситуация, когда некоторые корни совпадают. Очевидно, что совпадающие корни могут быть только на первой ветви решения, при этом кратность кор-

ня равна двум даже в том случае, когда на этой ветви расположены три корня (случай  $W_* < 0$ ).

Итак, пусть уравнение (5) имеет кратный корень. Тогда точки  $V_s^{(2)}$  и  $V_s^{(3)}$  сливаются в одну и на рис. 4, *b* полоса  $V_s^{(2)} < V < V_s^{(3)}$  исчезает. В рассматриваемой кратной точке вторая производная от потока тепла по удельному объему положительна. Поэтому из разложения решения в окрестности этой точки вытекает, что интегральные кривые, расположенные выше и ниже прямой константного решения, асимптотически приближаются к ней, когда независимая переменная стремится соответственно к  $+\infty$  и  $-\infty$ .

**Отрицательный тепловой поток в критической точке.**

В этом случае все точки покоя расположены на первой ветви решения. Поле интегральных кривых изображено на рис. 5. На рис. 5, *a* представлен вариант с одной точкой покоя, на рис. 5, *b* — с тремя точками.

В случае кратного корня могут возникнуть две ситуации: либо точка покоя  $V_s^{(2)}$  совпадает с точкой  $V_s^{(3)}$ , и тогда на рис. 5, *b* исчезает полоса



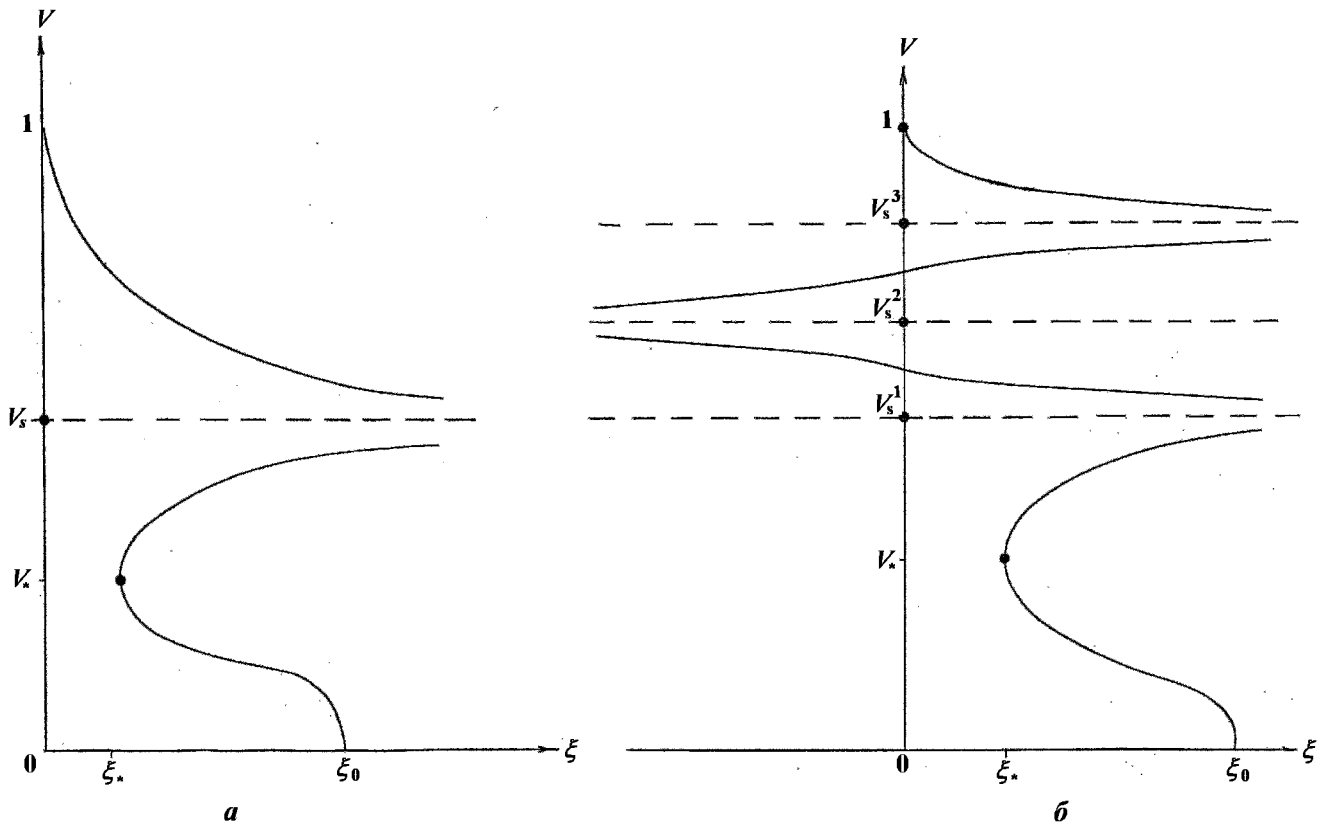


Рис. 5. Структура решения при отрицательном тепловом потоке в критической точке: *a* — вариант с одной точкой покоя; *б* — вариант с тремя точками покоя

$V_s^{(2)} < V < V_s^{(3)}$ , либо точка  $V_s^{(2)}$  совмещена с точкой  $V_s^{(1)}$ , и тогда исчезает полоса  $V_s^{(1)} < V < V_s^{(2)}$ . Заметим, что в первом случае вторая производная в кратной точке покоя положительна, во втором случае — отрицательна.

**Нулевой поток тепла в критической точке.** Для случая, когда у уравнения (3) нет точек покоя, характер поля интегральных кривых представлен на рис. 6, *a*. Видно, что интегральные кривые, выходящие с линии начальных данных, доходят до прямой  $V = 0$ , при этом структура решения около этих линий, а также прямой  $V = 0$ , естественно, остается прежней. Однако критическая точка уже не является точкой поворота интегральных кривых, и в этом состоит принципиальное отличие структуры данного решения от уже рассмотренных выше вариантов.

Непрерывное решение существует в интервале  $0 < \xi < \xi_0$ , где  $\xi_0 > \xi_*$ . Профиль температуры имеет колоколообразную форму: температура монотонно возрастает от нуля до критического значения, а затем монотонно убывает до нуля (см. рис. 1).

Если дифференциальное уравнение имеет две точки покоя, в структуре решения появляются три полосы:  $0 < V < V_s^{(2)}$ ,  $V_s^{(2)} < V < V_s^{(3)}$ ,  $V_s^{(3)} < V < 1$ . Они изображены на рис. 6, *б*. В случае кратного корня уравнения (5) точка  $V_s^{(2)}$  сливается с точкой  $V_s^{(3)}$  и исчезает полоса  $V_s^{(2)} < V < V_s^{(3)}$ . Из-за отсутствия полос интегральные кривые, начинающиеся на линии начальных данных, уже не могут быть непрерывным образом продолжены до прямой  $V = 0$ .

Итак, из рассмотренных вариантов следует, что в целом структура решения зависит от знака потока тепла в критической точке. Последний однозначно определяется соотношениями, приведенными в разд. 2 (см. рис. 2). Линии  $\alpha = \alpha_1(\gamma)$ ,  $\alpha = \alpha_2(\gamma)$  являются линиями бифуркации дифференциального уравнения. Если известны параметры  $\alpha$ ,  $\gamma$ , причем  $\gamma \in (1; 21,7)$ , то, как следует из теоремы 1, известна и структура решения. В этом случае фазовый портрет решения для  $\alpha = 0$  и  $\alpha > 0$  одинаковый. При достаточно больших значениях показателя адиабаты уравнение имеет больше одной точки покоя (три

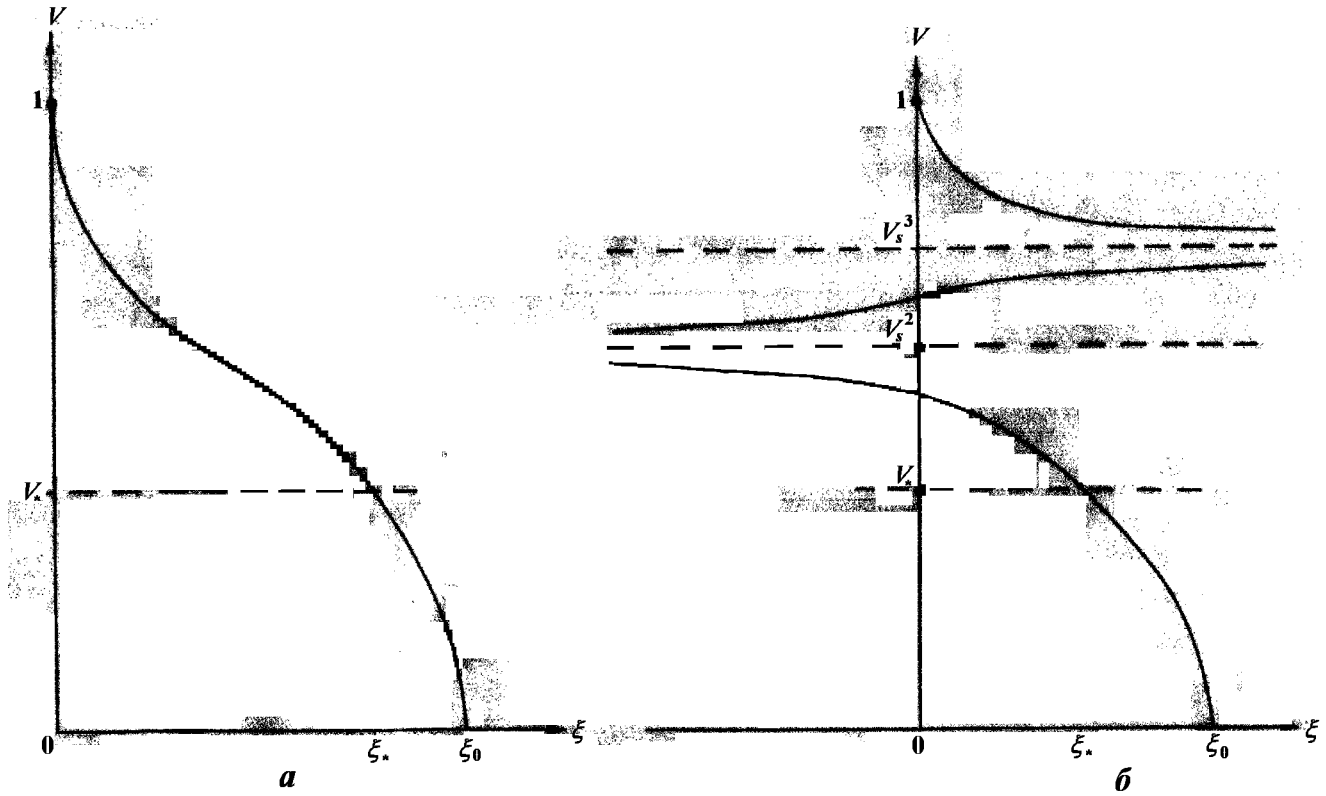


Рис. 6. Структура решения при нулевом тепловом потоке в критической точке: *a* — при отсутствии точек покоя; *б* — при наличии двух точек покоя

или две) и его решение из-за появления дополнительных полос качественно отличается от решения, соответствующего случаю  $\alpha = 0$ .

### 6. Составные решения

Как показано в работе [1], из интегральных кривых уравнения (3) в случае  $\alpha = 0$  можно образовать составные бегущие волны с изотермическим скачком. Покажем, что составные решения возможны и в случае  $\alpha > 0$ .

В лагранжевых координатах условия на ударных волнах в теплопроводном газе имеют вид

$$[u]D - [p] = 0; \quad [V]D + [u] = 0;$$

$$\left[ E + \frac{u^2}{2} \right] D - [pu + W] = 0.$$

Они записаны для размерных величин. Квадратные скобки обозначают разность величин за и перед фронтом ударной волны.

Переходя к безразмерным величинам, получаем

$$V_2 + p_2 = V_1 + p_1; \quad u_2 - p_2 = u_1 - p_1;$$

$$E_2 - \frac{1}{2}p_2^2 - W_2 = E_1 - \frac{1}{2}p_1^2 - W_1.$$

Индексы 1, 2 относятся к величинам соответственно до и после скачка. Эти соотношения совпадают с первыми интегралами системы автомодельных уравнений. Таким образом, для рассматриваемых бегущих волн условия Гюгоньо выполняются автоматически.

Так как изучаются бегущие волны, распространяющиеся по нулевому фону, указанные соотношения с учетом условия непрерывности температуры  $T_2 = T_1$  и уравнения состояния (1) можно записать в виде

$$V_2 = 1 - \frac{\alpha}{3}T_1^4 - V_1; \quad p_2 = 1 - V_2;$$

$$u_2 = u_0 + 1 - V_2;$$

$$W_2 = \frac{1}{\gamma - 1}T_1 + \alpha T_1^4 V_2 - \frac{1}{2}(1 - V_2)^2.$$

Температура на каждой ветви решения изменяется от нуля до критического значения. Плотность на второй ветви решения больше, чем на первой. Поэтому всегда можно осуществить переход с первой ветви решения на вторую с соблюдением условий Гюгоньо. Ясно, что в составном

решении перед фронтом ударной волны реализуется сверхзвуковой режим распространения тепла, а за фронтом — дозвуковой.

Обсудим, как строится составное решение, на примере конфигурации, представленной на рис. 4, а. Обозначим температуру в точке покоя через  $T_s$ , а в точке стыковки решений через  $T_1$ . В зависимости от температуры стыковки возможны три способа образования составных бегущих волн.

Пусть  $0 < T_1 < T_s$ . Первая кривая составного решения выходит из точки  $\xi = 0, V = 1$ . На этой кривой с ростом независимой переменной плотность и температура возрастают соответственно до значений  $1/V_1$  и  $T_1$ . Вторая интегральная кривая, лежащая в полосе  $0 < V < V_s$ , начинается на прямой  $V = V_2$  и либо пересекает прямую  $V = 0$ , если  $n + k + 1 > 0$ , либо асимптотически приближается к ней при  $\xi \rightarrow +\infty$ , если  $n + k + 1 \leq 0$ .

В первом случае бегущая волна метастабильна, так как в соответствующей задаче о поршне решение существует лишь до конечного момента времени. Во втором случае решение определено для любого момента времени. На второй интегральной кривой при увеличении независимой переменной плотность неограниченно возрастает, температура стремится к нулю, при этом давление остается конечным.

Пусть  $T_1 = T_s$ . Первая интегральная кривая составного решения строится аналогично предыдущему случаю. В качестве второй кривой берется константное решение  $V = V_s$ .

Если  $T_s < T_1 < T_*$ , то вторая интегральная кривая лежит в полосе  $V_s < V < V_*$ , начинается на линии  $V = V_2$  и заканчивается в критической точке. Поэтому бегущая волна также метастабильна.

Итак, если первая кривая составного решения выбрана, вторая кривая строится следующим образом. Сначала по температуре на скачке находится значение удельного объема за фронтом ударной волны. Затем проводится прямая  $V = V_2$ . Она попадает в одну из двух полос, на которые вторая ветвь делится константным решением. В качестве искомой кривой берется интегральная кривая, выходящая из точки пересечения с прямой  $V = V_2$  в направлении возрастания независимой переменной.

Когда на второй ветви решения нет точек покоя (см. рис. 5, 6), составное решение строится аналогично.

## 7. Численный и аналитический тесты

Задача о бегущих температурно-гидродинамических волнах является хорошей моделью для анализа точности методов численного решения уравнений газовой динамики с лучистой теплопроводностью. Аналитическое решение данной задачи построено в случае, когда можно пренебречь энергией и давлением излучения [1]. Если же последние оказывают существенное влияние на гидродинамические и тепловые процессы, точное решение удастся получить при специальном выборе зависимости длины свободного пробега от температуры и плотности. При произвольной зависимости решение задачи с необходимой точностью можно построить численно методом Рунге—Кутты.

Для численного решения уравнение (3) удобно преобразовать к другой форме. Записав его относительно температуры и введя новую неизвестную функцию  $\varphi = T^n$ , приходим к уравнению

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = nV^{-k}s,$$

$$\text{где } s = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - \frac{1}{V} \right) + \frac{\alpha T^3}{3} (7V - 1) \right].$$

Значение  $\xi_*$ , при котором температура имеет максимум, неизвестно. Ввиду этого в уравнении удобно поменять ролями независимую и зависимую переменные, положив  $x = T^n, y = \xi$ . В результате получаем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} \frac{V^k}{s},$$

которое и используется при численном интегрировании от начальной точки до критической температуры.

В качестве конкретного примера рассмотрим задачу, в которой волна распространяется со скоростью  $D = 8$ . Перед волной заданы следующие начальные значения:  $\rho_0 = 1, u_0 = 0, T_0 = 0, W_0 = 0$ . Удельная теплоемкость равна 12, показатель адиабаты  $5/3$ ; параметры, определяющие теплопроводность:  $n = 4, k = 1$ . В данном случае безразмерный параметр  $\alpha = 87,68$ . Значение температуры в критической точке  $T_* = 0,218054$ . В точке покоя  $T_s = 0,177020; V_s = 0,243087$ . Максимальная температура соответственно достигается в точке  $\xi_* = 0,000251828$ . Результаты расчета представлены на рис. 7, 8. На них приведены в безразмерных переменных распределения температуры и плотности по координате.

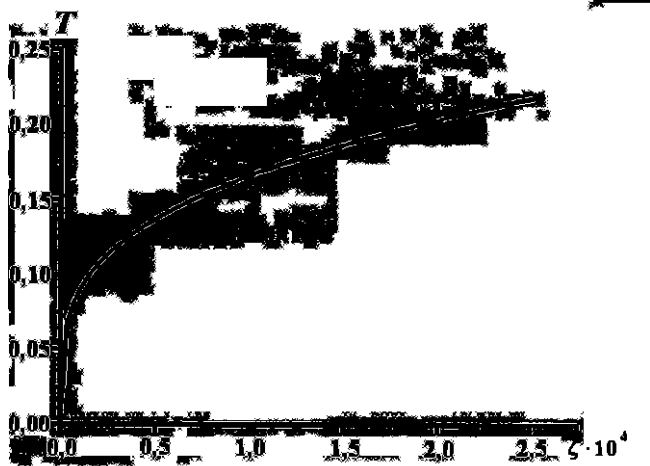


Рис. 7. Распределение температуры по координате (в безразмерных переменных)

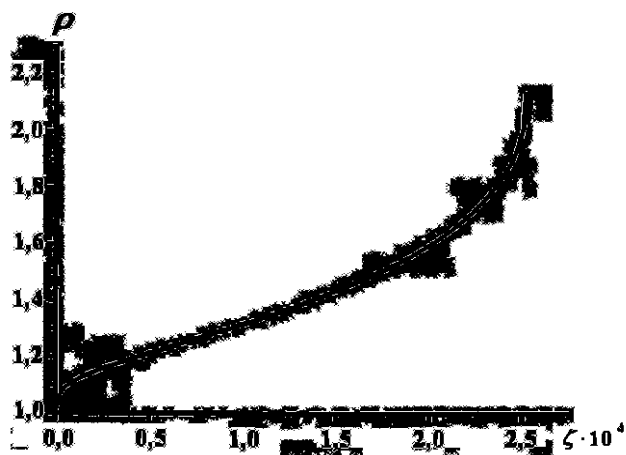


Рис. 8. Распределение плотности по координате (в безразмерных переменных)

Укажем простой способ построения аналитических тестов для методик расчета задач газовой динамики с нелинейной теплопроводностью. Идея метода состоит в представлении коэффициента теплопроводности в виде

$$\kappa = \kappa_0 T^n F(\bar{V}, \bar{T})$$

(здесь используются размерные и безразмерные величины) и выборе безразмерной функции  $F(\bar{V}, \bar{T})$  так, чтобы в дифференциальном уравнении (3), записанном относительно температуры, исчезла зависимость от удельного объема. Очевидно, что это условие выполняется, когда  $k = 0$  и  $F(\bar{V}, \bar{T}) \equiv s(\bar{V}, \bar{T})$ . Таким образом, коэффициент теплопроводности нужно взять в виде

$$\kappa = \kappa_0 T^n \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - \frac{\rho}{\rho_0} \right) + \frac{\alpha T^3}{3R\rho_0} \left( 7 \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \right].$$

При таком выборе коэффициента теплопроводности дифференциальное уравнение (3) существенно упрощается, так как исчезает зависимость от удельного объема, и легко интегрируется:

$$T(t, m) = \frac{D^2}{R\rho_0^2} \left[ \frac{nR^{n+1}\rho_0^{2n+k}}{\kappa_0 D^{2n-1}} (Dt - m) \right]^{1/n}.$$

Это простое решение соответствует сверхзвуковой ветви в формуле (4). Оно существует до критического значения температуры, т. е. от  $\xi = 0$  до  $\xi_* = T_*/n$ . Безразмерные удельный объем, давление и скорость находятся соответственно из соотношения (4) и первых интегралов (2).

### Заключение

В рамках газодинамической модели и приближения лучистой теплопроводности исследована структура бегущих волн в идеальном газе с учетом плотности энергии и давления равновесного излучения.

Показано, что структура решения в целом определяется знаком потока тепла в критической точке. В свою очередь, знак потока однозначно определяется показателем адиабаты  $\gamma$  и параметром  $\alpha$ , характеризующим вклад энергии и давления излучения в полную плотность энергии и в полное давление. Установлено, что решение перестраивается при тех значениях параметров  $\gamma$  и  $\alpha$ , для которых поток тепла в критической точке равен нулю.

Основное содержание настоящей работы было доложено автором на международной школе-семинаре "Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа" (САМГОП-94) в 1994 г. в г. Сарове.

### Список литературы

1. Самарский А. А., Курдюмов С. П., Волосевич П. П. Бегущие волны в среде с нелинейной теплопроводностью // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1965. Т. 5, № 2. С. 199—217.

2. *Волосевич П. П., Леванов Е. И., Фетисов С. А.* Автомоделные решения задач нагрее-

ва и динамики плазмы. М.: Изд-во МФТИ, 2001.

Статья поступила в редакцию 29.12.05.

---