

УДК 519.6

## АДАПТИВНЫЙ ПО УГЛОВЫМ ПЕРЕМЕННЫМ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НА НЕОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СЕТКЕ

Р. М. Шагалиев, А. В. Алексеев, А. И. Бочков, А. В. Гичук, В. В. Евдокимов,  
А. А. Нуждин, Т. В. Шемякина  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Предлагается адаптивный по угловым переменным метод решения двумерного уравнения переноса и взаимодействия излучения со средой. Уравнение переноса записано в цилиндрической системе координат на неортогональных пространственных сетках. В основу численного решения уравнения переноса положен метод дискретных ординат с аппроксимацией по схемам типа  $DS_n$ . Основной целью адаптивного метода является преодоление *лучевых эффектов*. Рассматриваются вопросы конструирования критерия автоматического определения уровня адаптивности на основе анализа сеточного решения, переинтерполяции сеточных величин, а также проблемы организации бегущего счета при решении уравнения переноса с использованием адаптивности.

### Введение

Математическое моделирование многомерных задач, описывающих процессы переноса излучения, в настоящее время вызывает большой интерес. Детерминистические методы, разработанные в течение нескольких последних десятилетий, в сочетании с усовершенствованными методами дискретизации и сокращения времени счета представляются перспективными при решении целого ряда задач переноса в сложной постановке.

Однако, как оказалось, практическая реализация перспективных детерминистических методик достаточно сложна, поэтому необходимо провести дальнейшие работы по совершенствованию алгоритмов решения и методов реализации. Одна из основных проблем состоит в том, что объем вычислений, необходимых для достоверного моделирования заданной системы, может оказаться чрезвычайно большим, поскольку при решении, например, двумерных задач переноса излучения требуется описание шестимерного фазового пространства.

Традиционные методы дискретизации по угловым переменным требуют, чтобы разностная сетка по этим переменным была достаточно мелкой в любой области системы. Если задавать угловую сетку недостаточно подробной, появляются хорошо известные *лучевые эффекты* [1]. При этом в рассчитываемых системах могут содержаться как подобласти с существенно анизотропным распределением потока частиц, где необходимо задание весьма подробной разностной сетки по угловым переменным, так и подобласти, где распределение носит *почти изотропный* характер, вследствие чего для них достаточно относительно небольшого числа направлений полета частиц.

С учетом изложенного выше наиболее перспективным для повышения эффективности решения многомерных задач переноса в случае применения конечно-разностных аппроксимаций представляется подход, основанный на использовании адаптивных дробных сеток [2]. Ожидается, что применение адаптивного по угловым переменным метода позволит решить проблему устранения лучевых эффектов наиболее экономичным образом.

Данная статья является первой из двух статей, посвященных созданию и численному исследованию адаптивного по угловым переменным метода решения двумерного уравнения переноса излучения на неортогональной пространственной сетке. В настоящей работе излагаются основные положения адаптивного алгоритма, идея которого заключается в том, чтобы на основе анализа результатов

счета на временных шагах использовать подробную разностную сетку только в тех областях фазового пространства, которые в данный момент определяют точность сеточного решения. Основной целью разработки является преодоление лучевых эффектов, возникающих при численном решении уравнения переноса излучения.

Создание эффективного адаптивного алгоритма требует решения ряда вопросов. Прежде всего адаптивная схема должна быть реализована на базе существующей методики, основанной на аппроксимации уравнения переноса по схемам типа  $DS_n$ -метода [1, 3]. Пространственная аппроксимация проводится с использованием *схемы с расширенным шаблоном* [4]. Полученная система сеточных уравнений решается методом бегущего счета [5]. Алгоритм бегущего счета основан на учете освещенностей граней пространственных ячеек для каждого направления полета частиц. Вследствие этого при создании адаптивного алгоритма по угловым переменным возникает ряд вопросов, связанных с порядком разрешения пространственных ячеек на подынтервалах адаптивной угловой сетки. Особенно сильно эта проблема проявляется в случае использования неортогональной пространственной сетки в криволинейной геометрии.

Другой проблемой при реализации адаптивной схемы является интерполяция потоков частиц на границе между пространственными ячейками с разным уровнем адаптивности. Отметим, что необходимость такого пересчета может возникать в двух случаях. Во-первых, это переинтерполяция потоков частиц на ребрах и в вершинах (узлах) пространственных ячеек в процессе решения системы сеточных уравнений на текущей итерации методом бегущего счета. А во-вторых, это переинтерполяция функции углового распределения частиц в центрах пространственных ячеек на шагах по времени при изменении порядка адаптивности.

Следующей важной частью адаптивного алгоритма является построение критерия, согласно которому в соответствующих пространственных ячейках используется более подробная адаптивная сетка для направлений полета частиц. Анализ проводится на основе сеточного решения, полученного на предыдущем этапе счета. Алгоритм действия критерия должен обеспечивать автоматическое введение более подробной угловой сетки в пространственных подобластях, оказывающих влияние на сеточное решение.

Наконец, адаптивный по угловым переменным алгоритм должен быть так организован с точки зрения программной реализации, чтобы не сильно увеличивать вычислительные затраты, связанные с анализом решения, переинтерполяциями потоков частиц и т. п.

В данной работе адаптивный по угловым переменным алгоритм рассматривается на примере задачи решения двумерного уравнения переноса излучения, при этом созданная методика естественным образом может быть обобщена на случай переноса нейтронов, а также на трехмерную геометрию.

### Постановка задачи решения двумерного уравнения переноса излучения

Методика основывается на кинетической групповой модели описания процессов переноса излучения с использованием классической интегродифференциальной формы записи нестационарного двумерного кинетического уравнения. Уравнения записываются в следующем виде [1, 3]:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} + L\varepsilon_i + \chi_{ti}\varepsilon_i = \frac{\chi_{ai}}{2\pi} \varepsilon_{ip} + \frac{\chi_{si}}{2\pi} \varepsilon_i^{(0)} + \frac{Q_i}{2\pi}; \quad (1)$$

$$L\varepsilon_i = \mu \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi \varepsilon_i \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi \varepsilon_i \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \sum_{i=1}^{i_1} \chi_{ai} \varepsilon_i^{(0)} \Delta \omega_i - \sum_{i=1}^{i_1} \chi_{ai} \varepsilon_{ip} \Delta \omega_i; \quad (3)$$

$$\varepsilon_i^{(0)} = \int_{-1}^1 \int_0^\pi \varepsilon_i d\mu d\varphi. \quad (4)$$

Уравнения требуется решить в осесимметричной области  $D = \{(r, z) \in L\}$ , где  $L$  — сечение тела вращения плоскостью, проходящей через ось  $Z$  (рис. 1).

В записи уравнений (1)–(4) приняты следующие обозначения:  $r, z$  — координаты положения

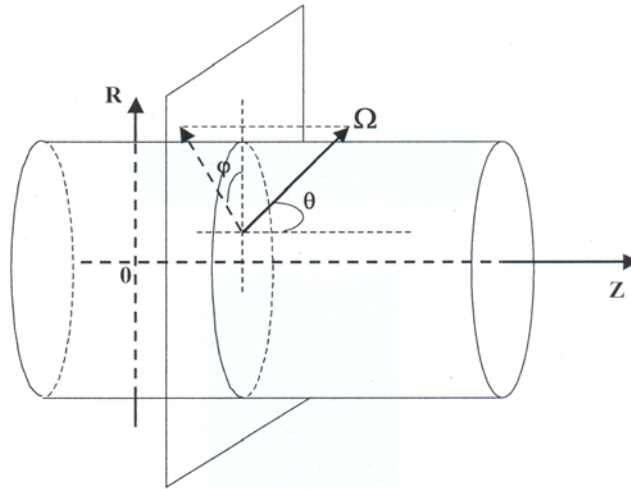


Рис. 1. Геометрическая постановка задачи двумерного переноса

частицы в цилиндрической системе координат (рис. 1);  $\vec{\Omega}(\mu, \varphi)$  — единичный вектор в направлении полета частиц;  $\mu = \cos(\theta)$ ,  $(-1 \leq \mu \leq 1)$ ,  $\theta$  — угол между вектором  $\vec{\Omega}$  и осью симметрии  $Z$ ;  $\varphi$  — угол между проекцией вектора  $\vec{\Omega}$  на плоскость, проходящую через точку  $(r, z)$  перпендикулярно оси  $Z$ , и вектором, соединяющим точки  $(0, z)$  и  $(r, z)$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ ;  $i = 1, \dots, i_1$  — номер энергетической группы;  $\varepsilon_i = \varepsilon_i(r, z, \mu, \varphi, \omega_i, t)$  — функция интенсивности излучения группы  $i$  (искомая функция);  $\omega_i$  — средняя энергия фотонов в группе  $i$ ;  $\Delta\omega_i$  — ширина интервала по энергетической переменной  $\omega$ ;  $Q_i = Q_i(r, z, \omega_i)$  — независимый источник частиц группы  $i$ ;  $\chi_{ai} = \chi_{ai}(\rho, T, \omega_i)$  — сечение поглощения;  $\chi_{si} = \chi_{si}(\rho, T, \omega_i)$  — сечение рассеяния;  $\chi_{ti} = \chi_{ai} + \chi_{si}$  — полное сечение;  $\varepsilon_{ip} = \varepsilon_{ip}(T, \omega_i)$  — функция Планка;  $T = T(r, z)$  — температура среды;  $E = E(\rho, T)$  — внутренняя энергия.

Учитываются процессы поглощения и рассеяния фотонов. Процессы переизлучения энергии средой моделируются в приближении локального термодинамического равновесия (по функции Планка).

Граничное условие на внешней поверхности при  $(\vec{\Omega}, \vec{n}) < 0$  задается в виде

$$\varepsilon(t, r, z, \mu, \varphi)_{(r,z) \in \Gamma} = \phi(t, r_\Gamma, z_\Gamma, \mu, \varphi). \quad (5)$$

Здесь  $\Gamma$  — образующая тела вращения;  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к образующей  $\Gamma$ ;  $\phi(t, r_\Gamma, z_\Gamma, \mu, \varphi)$  — заданная функция (поток входящих частиц).

Кроме того, в нестационарном случае система уравнений (1)–(5) дополняется начальными условиями.

В однокрупном случае (в приближении *серой материи*) уравнения (1)–(4) принимают более простой вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + L\varepsilon + \chi_t \varepsilon &= \frac{\chi_a}{2\pi} \varepsilon_p + \frac{\chi_s}{2\pi} \varepsilon^{(0)} + \frac{Q}{2\pi}; \\ L\varepsilon &= \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi \varepsilon \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi \varepsilon \right); \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \chi_a \varepsilon^{(0)} - \chi_a \varepsilon_p; \\ \varepsilon^{(0)} &= \int_{-1}^1 \int_0^\pi \varepsilon d\mu d\varphi. \end{aligned}$$

## Описание адаптивного по угловым переменным алгоритма

Предварительные исследования, проведенные на тестовых задачах, показали, что измельчение разностной сетки по переменной  $\varphi$  практически не оказывает влияния на лучевые эффекты. Значение имеет только степень подробности разностной сетки по переменной  $\mu$ . Соответственно, разработанный алгоритм использует адаптивность только по этой переменной. Тем не менее заметим, что данный алгоритм может быть обобщен на случай использования адаптивности для обеих угловых переменных.

**Основные положения адаптивного алгоритма.** Рассмотрим основные положения адаптивного метода аппроксимации по угловым переменным уравнения переноса.

1. Вводится понятие опорной сетки по угловой переменной  $\mu$ . В процессе счета задачи опорная сетка не укрупняется, но допускается возможность дробления отдельных ее интервалов по угловой переменной  $\mu$  на подынтервалы. Подчеркнем, что дробление осуществляется строго внутри интервалов опорной сетки. Первоначально предполагается, что дробление по переменной  $\mu$  при выполнении адаптивного алгоритма будет проводиться равномерным образом. Число подынтервалов в опорном интервале сетки по  $\mu$  должно представлять собой  $2^N$ , переменная  $N$  соответствует уровню адаптивности.

Для каждого подынтервала адаптивной сетки по  $\mu$  используется разностная сетка по переменной  $\varphi$ , соответствующая опорной сетке по  $\mu$ .

2. Дробление угловой сетки осуществляется только для выбранного множества пространственных ячеек. В нестационарных расчетах элементы данного множества, как правило, фиксируются на одном временном шаге, но допускается изменение (расширение либо сужение) множества при переходе на следующий временной шаг. В разных пространственных ячейках допускается дробление на разное число подынтервалов.
3. Выбор множества пространственных ячеек, где необходимо дробление угловой опорной сетки на более мелкие интервалы сетки адаптивного метода, осуществляется с использованием специального критерия. С его помощью определяется также уровень дробления (адаптивности), т. е. количество подынтервалов, на которые разбивается соответствующий интервал опорной угловой сетки.
4. Граничные условия для системы (входящий поток по направлениям) при наличии адаптивности в граничных ячейках хранятся на мелкой адаптивной сетке. В случае граничного условия типа *зеркало* адаптивность при необходимости вводится не только для текущего, но и для симметричного по переменной  $\mu$  направления полета частиц.

Основываясь на этих положениях, адаптивный по угловым переменным алгоритм решения двумерного уравнения переноса можно сформулировать следующим образом:

1. Перед началом счета на основе информации о физических и геометрических параметрах задачи существует возможность предварительного формирования адаптивной угловой сетки. С помощью специального сервисного модуля программы можно задавать адаптивную сетку необходимого уровня в выбранных геометрических подобластях для соответствующих интервалов изменения угловой переменной  $\mu$ .
2. В процессе счета в начале шага по времени производится анализ решения, полученного на предыдущем шаге. Анализ проводится во всех ячейках пространственной сетки для всех направлений полета частиц. На основе этого анализа определяются пространственные ячейки и интервалы угловой сетки по  $\mu$ , на которых требуется использовать более мелкую адаптивную угловую сетку, а также необходимый уровень адаптивности.

Аналогичным образом проводится анализ решения в пространственных ячейках, где уже использовалась более мелкая адаптивная сетка. При изменении решения в этих ячейках уровень адаптивности может быть изменен (увеличен или уменьшен вплоть до отказа от адаптивности).

3. В адаптивных ячейках в соответствии с определенным ранее уровнем адаптивности проводится переинтерполяция значений потока частиц по направлениям. Все данные, необходимые для счета в адаптивном режиме, заносятся в специальные структуры.
4. Выполняются циклы по итерациям и направлениям полета частиц. Циклы по направлениям выполняются по количеству интервалов опорной угловой сетки.
5. Для каждого направления полета частиц, определяемого парой  $(\mu, \varphi)$  опорной сетки, решается система сеточных уравнений по пространству. Решение осуществляется по методу бегущего счета.

В ходе счета проводится анализ на наличие адаптивности в ячейках. При необходимости использования в ячейке более мелкой угловой сетки в этой ячейке проводится дополнительный расчет соответствующих направлений. В процессе бегущего счета при переходе к ячейке с другим уровнем адаптивности выполняется переинтерполяция входящих потоков на соответствующих гранях ячейки.

**Правила переинтерполяции сеточных величин при использовании адаптивного алгоритма.** Как уже говорилось, при создании адаптивного алгоритма решения уравнения переноса возникают вопросы переинтерполяции величин, участвующих в численном решении. При изменении уровня адаптивности в той или иной пространственной ячейке требуется переинтерполяция значения функции углового распределения частиц в центре ячейки. Кроме того, в процессе бегущего счета при решении системы сеточных уравнений, соответствующих текущему направлению полета частиц, в случае перехода между ячейками с разным уровнем адаптивности необходимо выполнить переинтерполяцию значений потоков частиц на ребрах пространственных ячеек. Ниже рассматриваются эти алгоритмы интерполяции. Необходимо отметить, что переинтерполяция всегда проводится в рамках одного опорного интервала  $[\mu_{m-1}, \mu_m]$ .

*Переинтерполяция в центрах пространственных ячеек.* Единственная величина в центре  $P_0$  пространственной ячейки, для которой требуется переинтерполяция в центрах интервалов по  $\mu$  при перестроении угловой сетки, — это интенсивность излучения  $\varepsilon$ .

Будем использовать индекс  $m - 1/2$  для обозначения принадлежности  $\varepsilon$  к соответствующему интервалу сетки по  $\mu$ .

Пусть в некоторой пространственной ячейке на опорном интервале  $[\mu_{m-1}, \mu_m]$  построена адаптивная сетка  $\{\mu_{m-1/2}^i\}_{i=1}^{\bar{s}_m+1}$ . Здесь  $\bar{s}_m$  — число интервалов адаптивной сетки на данном опорном интервале, первое и последнее узловые значения адаптивной сетки совпадают со значениями  $\mu_{m-1}$  и  $\mu_m$  соответственно;  $i$  — номер узлового значения на адаптивной сетке. Если на следующем временном шаге в этой пространственной ячейке на этом опорном интервале строится адаптивная сетка  $\{\mu_{m-1/2}^j\}_{j=1}^{\bar{k}_m+1}$  с другим числом адаптивных интервалов  $\bar{k}_m \neq \bar{s}_m$ , то возможны следующие варианты:

1.  $\bar{k}_m > \bar{s}_m$ , т. е. новая адаптивная сетка более мелкая, чем уже существующая (рис. 2). В этом случае значения  $\varepsilon_{m-1/2, j-1/2}$  на интервалах новой, более мелкой адаптивной сетки приравниваются к значениям величины  $\varepsilon$  на тех интервалах старой адаптивной сетки, которые содержат соответствующие интервалы новой сетки:

$$\varepsilon_{m-1/2, j-1/2} = \varepsilon_{m-1/2, i-1/2}, \quad j = 1, \dots, \bar{k}_m, \quad i = \text{int} \left( \frac{j-1}{\bar{k}_m/\bar{s}_m} \right) + 1.$$

Здесь  $\bar{k}_m/\bar{s}_m$  — число интервалов мелкой адаптивной сетки на одном интервале крупной адаптивной (или опорной) сетки.

2.  $\bar{k}_m < \bar{s}_m$ , т. е. новая адаптивная сетка более крупная, чем уже существующая (рис. 3). В этом случае интенсивность излучения на крупной сетке  $\varepsilon_{m-1/2, j-1/2}$  вычисляется по следующей формуле:

$$\varepsilon_{m-1/2, j-1/2} = \frac{1}{\Delta\mu_{j-1/2}} \sum_{i=(j-1)\bar{s}_m/\bar{k}_m+1}^{j\bar{s}_m/\bar{k}_m} \varepsilon_{m-1/2, i-1/2} \Delta\mu_{i-1/2},$$

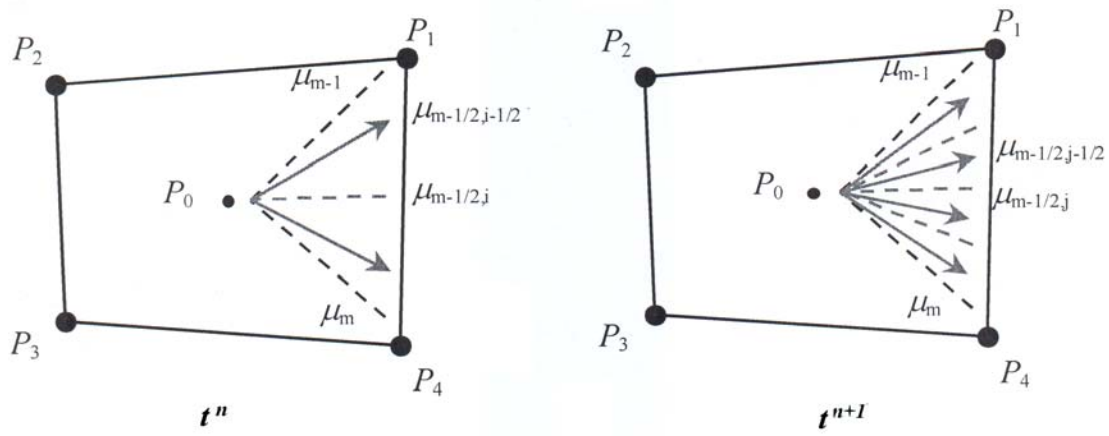


Рис. 2. Измельчение адаптивной сетки на опорном интервале  $[\mu_{m-1}, \mu_m]$

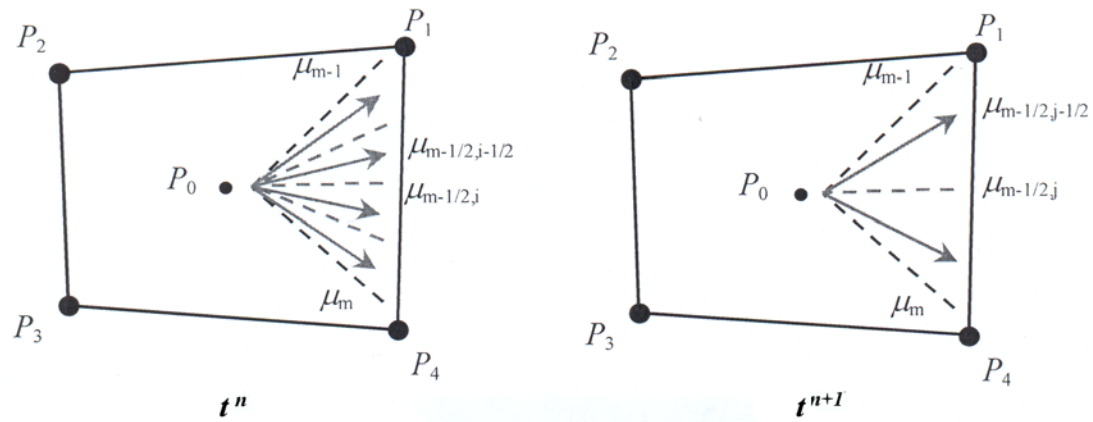


Рис. 3. Укрупнение адаптивной сетки на опорном интервале  $[\mu_{m-1}, \mu_m]$

$$\Delta\mu_{m-1/2}^{j-1/2} = \sum_{i=(j-1)\bar{s}_m/\bar{k}_m+1}^{j\bar{s}_m/\bar{k}_m} \Delta\mu_{m-1/2}^{i-1/2}, \quad j = 1, \dots, \bar{k}_m.$$

*Переинтерполяция на ребрах ячеек пространственной сетки.* Переинтерполяции, рассматриваемые в этом подразделе, используются при решении системы (1)–(4) методом бегущего счета для передачи рассчитываемых функций между соседними пространственными ячейками, содержащими разные адаптивные сетки по угловым переменным.

Введем обозначение  $\varepsilon_{m-1/2, P(l, l+1)}$ , где  $P(l, l+1)$  — ребро ячейки,  $l = 1, 4$ .

Если на интервале опорной сетки  $[\mu_{m-1}, \mu_m]$  решение передается из пространственной ячейки с адаптивной сеткой  $\{\mu_{m-1/2}^i\}_{i=1}^{\bar{s}_m+1}$  в пространственную ячейку с адаптивной сеткой  $\{\mu_{m-1/2}^j\}_{j=1}^{\bar{k}_m+1}$  и  $\bar{k}_m \neq \bar{s}_m$ , то потоки излучения переинтерполируются следующим образом:

1.  $\bar{k}_m > \bar{s}_m$ , т. е. адаптивная сетка в принимающей пространственной ячейке более мелкая, чем в передающей ячейке (рис. 4). Потоки излучения на интервалах мелкой угловой сетки  $\varepsilon_{m-1/2, j-1/2, P(l, l+1)}$  приравниваются к потоку на интервале крупной сетки  $\varepsilon_{m-1/2, i-1/2, P(l, l+1)}$ , который содержит соответствующие интервалы мелкой сетки:

$$\varepsilon_{m-1/2, j-1/2, P(l, l+1)} = \varepsilon_{m-1/2, i-1/2, P(l, l+1)}, \quad j = 1, \dots, \bar{k}_m, \quad i = \text{int} \left( \frac{j-1}{\bar{k}_m/\bar{s}_m} \right) + 1.$$

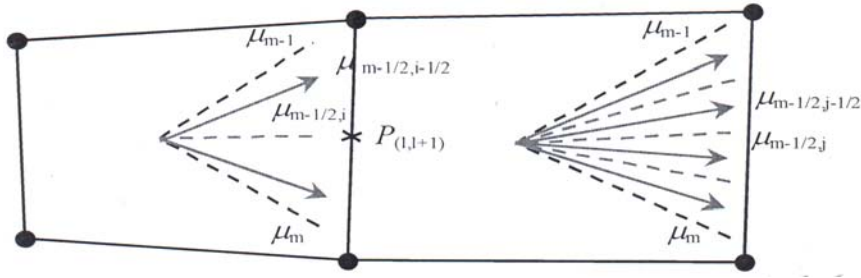


Рис. 4. Передача решения из ячейки с адаптивной сеткой на опорном интервале  $[\mu_{m-1}, \mu_m]$  в ячейку с более мелкой адаптивной сеткой на этом интервале

2.  $\bar{k}_m < \bar{s}_m$ , т. е. адаптивная сетка в принимающей пространственной ячейке более крупная, чем в передающей ячейке (рис. 5). В этом случае потоки на более крупной сетке вычисляются по формуле

$$R_{j-1/2, P(l, l+1)} \varepsilon_{m-1/2, j-1/2, P(l, l+1)} = \frac{1}{\Delta \mu_{m-1/2}^{j-1/2}} \sum_{i=(j-1)\bar{s}_m/\bar{k}_m+1}^{j\bar{s}_m/\bar{k}_m} \varepsilon_{m-1/2, i-1/2, P(l, l+1)} R_{i-1/2, P(l, l+1)} \Delta \mu_{m-1/2}^{i-1/2},$$

$$j = 1, \dots, \bar{k}_m,$$

где  $R_{j-1/2, P(l, l+1)}$  — коэффициенты освещенности ребер, соответствующие направлениям крупной сетки;  $\Delta \mu_{m-1/2}^{j-1/2} = \mu_{m-1/2}^j - \mu_{m-1/2}^{j-1}$  — длины интервалов крупной сетки, при этом  $\Delta \mu_{m-1/2}^{j-1/2} = \sum_{i=(j-1)\bar{s}_m/\bar{k}_m+1}^{j\bar{s}_m/\bar{k}_m} \Delta \mu_{m-1/2}^{i-1/2}$ ,  $j = 1, \dots, \bar{k}_m$ ;  $\varepsilon_{m-1/2, i-1/2, P(l, l+1)} R_{i-1/2, P(l, l+1)}$  — потоки излучения на интервалах мелкой адаптивной сетки;  $R_{i-1/2, P(l, l+1)}$  — коэффициенты освещенности ребер, соответствующие направлениям мелкой адаптивной сетки, где  $\Delta \mu_{m-1/2}^{i-1/2} = \mu_{m-1/2}^i - \mu_{m-1/2}^{i-1}$  — длины интервалов мелкой сетки.

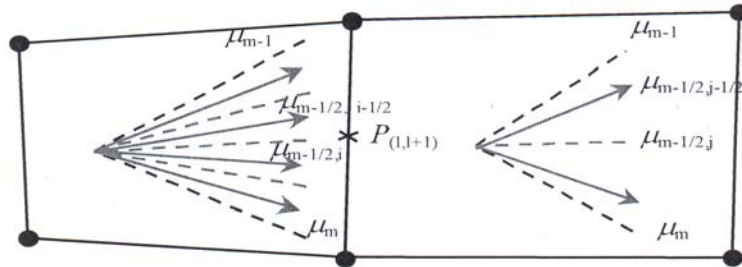


Рис. 5. Передача решения из ячейки с адаптивной сеткой на опорном интервале  $[\mu_{m-1}, \mu_m]$  в ячейку с более крупной адаптивной сеткой на этом интервале

В процессе разработки адаптивного метода выяснилось, что при использовании стандартных угловых квадратур в зоне перехода с адаптивной угловой сетки одного уровня на адаптивную угловую сетку другого уровня наблюдаются негативные счетные эффекты в виде скачков решения. Для их устранения была проведена работа по модификации вида аппроксимации по угловым переменным. В результате применения аддитивной аппроксимации функция освещенности оказывается аддитивной относительно разбиения фазового пространства, что позволяет избежать счетных эффектов в виде скачков при переходе с одной угловой сетки на другую.

**Особые случаи при решении уравнения переноса на адаптивных подынтервалах.** Особенностью рассматриваемой методики решения двумерного уравнения переноса является то, что для

решения системы разностных уравнений, появляющихся в результате аппроксимации, применяется метод бегущего счета. При использовании неортогональных пространственных сеток возможны случаи, когда коэффициенты освещенности  $R_{l,l+1}$  ребра  $(l, l+1)$  пространственной ячейки [1, 4],

$$R_{l,l+1} = \frac{r_l + r_{l+1}}{2} \left( \mu_{m-1/2} (r_{l+1} - r_l) - \sqrt{1 - \mu_{m-1/2}^2} (z_{l+1} - z_l) \cos \bar{\varphi}_{q-1/2} \right),$$

для некоторого подмножества адаптивных интервалов угловой сетки могут иметь знак, отличный от знака коэффициента освещенности данного ребра для опорного интервала угловой сетки.

На примере, приведенном на рис. 6, такое *особое* адаптивное направление выделено точечным пунктиром. В этом и подобных случаях для рассматриваемых адаптивных интервалов должны измениться порядок бегущего счета и вариант освещенности ячейки и, как следствие, вид и число дополнительных соотношений по пространству.

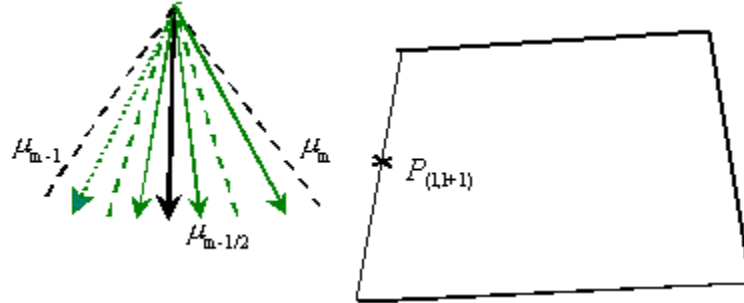


Рис. 6. Пример отличия знака коэффициента освещенности на одном из адаптивных подынтервалов от знака коэффициента освещенности на опорном интервале  $[\mu_{m-1}, \mu_m]$

В такой ситуации организуется многопроходный алгоритм бегущего счета — сначала по опорным направлениям, затем по особым адаптивным направлениям угловой сетки. Под термином *особый* здесь понимается адаптивный подынтервал, для которого знак коэффициента освещенности на одном из ребер пространственной ячейки отличается от его знака для опорного интервала. Корректировка значений коэффициентов освещенности на адаптивных подынтервалах выполняется только для тех ребер пространственной сетки, где происходит смена уровня адаптивности в соседних ячейках и возникает ситуация *противотока*.

Для разрешения противоречивых ситуаций противотока используется правило согласования освещенностей. В силу ряда соображений, в первую очередь из-за нарушения консервативности задачи решения через ребро пространственной ячейки, которое неизбежно возникает при коррекции коэффициента освещенности в пространственной ячейке, было решено корректировать не значение коэффициента освещенности на конкретном пространственном ребре для особого адаптивного подынтервала, а интенсивность излучения, т. е. само решение. Наиболее простым является зануление значения интенсивности излучения на пространственном ребре для особого адаптивного подынтервала.

Очевидно, что процедура зануления решения — не самый оптимальный вариант решения проблемы противотока. Вероятно, наилучшим вариантом был бы расчет интенсивности для особого адаптивного подынтервала исходя из предположения изотропности решения на более крупном интервале. Реализация такого подхода рассматривается в качестве направления дальнейшего развития адаптивного по угловым переменным алгоритма на криволинейных пространственных сетках.

**Критерии определения уровня адаптивности.** Одной из наиболее важных частей адаптивного алгоритма решения уравнения переноса излучения является определение необходимого уровня адаптивности (критерий). Определение уровня адаптивности проводится динамически на основе анализа текущего сеточного решения. Анализироваться могут самые разные величины и производные функции от сеточного решения: градиенты решения между соседними интервалами угловой сетки, степень анизотропии решения и т. п. (элементарные критерии). Окончательный же вывод делается на основе анализа совокупности результатов элементарных критериев.



Было разработано и численно исследовано достаточно много элементарных критериев адаптивности. Часть из них, например критерий, основанный на анализе градиента функции решения между соседними пространственными ячейками, оказались неудачными. Другие, например критерий, использующий информацию о физических свойствах среды, пока не реализованы.

Ниже рассматриваются два направления создания алгоритмов критерия, которым соответствуют так называемые *градиентный* и *трехточечный* критерии. В основе каждого из этих критериев лежит некий базовый алгоритм, который сочетается с рядом дополнительных элементарных критериев. Так, например, практика использования адаптивного алгоритма показала, что в ряде сильно анизотропных задач весьма эффективно сочетание основного критерия с так называемым *принципом максимума*. В этом случае подробная угловая сетка принудительно вводится в интервале с максимальным значением функции решения.

Рассмотрим более подробно алгоритмы, лежащие в основе градиентного и трехточечного критериев.

Определение уровня и формирование адаптивной угловой сетки происходит в начале счета очередного шага по времени. В качестве входной информации используется полученное на предыдущем шаге решение. Строящаяся адаптивная сетка предполагает разбиение только по одной угловой переменной  $\mu$ , поэтому в качестве величины, на основе анализа которой будет приниматься решение об изменении текущей адаптивной сетки, берется разностная аппроксимация интеграла решения (интенсивности излучения) по переменной  $\phi$ :

$$I_{\mu_{m-1/2}} = \int_0^\pi \varepsilon(t^n, r_{P_0}, z_{P_0}, \mu_m, \varphi) d\varphi \approx \sum_{q=1}^{q_m} \varepsilon_{m-1/2, q-1/2, P_0}^n \Delta\varphi_{q-1/2} = I_{m-1/2}.$$

*Градиентный критерий.* Пусть в рассматриваемой пространственной ячейке  $P_0$  выполнено разбиение угловой сетки по переменной  $\mu$ , при этом некоторые интервалы опорной сетки  $[\mu_{m-1}, \mu_m]$ ,  $m \in \{m\} = A$ , уже содержат адаптивное разбиение  $\{\mu_{m-1/2}^j\}_{j=0}^{\bar{k}_m}$ . Здесь  $\bar{k}_m$  — число адаптивных интервалов в опорном интервале по угловой переменной  $\mu$ ; первое и последнее узловые значения адаптивной сетки совпадают со значениями  $\mu_{m-1}$  и  $\mu_m$ , соответственно; индекс  $j$  обозначает номера узловых значений адаптивной сетки.

Попарно сравниваются все соседние адаптивные и опорные интервалы по переменной  $\mu$ . Определяется величина относительного отклонения решения на соседних интервалах  $[\mu_{m-1}, \mu_m]$  и  $[\mu_m, \mu_{m+1}]$ :

$$Div_{rel}^m = \begin{cases} \frac{|I_{m-1/2} - I_{m+1/2}|}{I_{m-1/2} + I_{m+1/2}}, & m-1 \notin A, \quad m \notin A; \\ \max \left( \frac{|I_{m-1/2} - I_{m+1/2}^{\min}|}{I_{m-1/2} + I_{m+1/2}^{\min}}, \frac{|I_{m-1/2} - I_{m+1/2}^{\max}|}{I_{m-1/2} + I_{m+1/2}^{\max}} \right), & m-1 \notin A, \quad m \in A; \\ \max \left( \frac{|I_{m-1/2}^{\min} - I_{m+1/2}|}{I_{m-1/2}^{\min} + I_{m+1/2}}, \frac{|I_{m-1/2}^{\max} - I_{m+1/2}|}{I_{m-1/2}^{\max} + I_{m+1/2}} \right), & m-1 \in A, \quad m \notin A; \\ \max \left( \frac{|I_{m-1/2}^{\min} - I_{m+1/2}^{\max}|}{I_{m-1/2}^{\min} + I_{m+1/2}^{\max}}, \frac{|I_{m-1/2}^{\max} - I_{m+1/2}^{\min}|}{I_{m-1/2}^{\max} + I_{m+1/2}^{\min}} \right), & m-1 \in A, \quad m \in A. \end{cases}$$

Относительное отклонение решения на каждом интервале по  $\mu$  ( $\tilde{m}$  — число интервалов) находится как максимальное значение

$$Div_{rel}^{m-1/2} = \max (Div_{rel}^{m-1}, Div_{rel}^m), \quad 2 \leq m \leq \tilde{m};$$

при этом полагаем  $Div_{rel}^1 = Div_{rel}^{\tilde{m}} = 0$ .

В силу того что  $Div_{rel}^{m-1/2} \in [0, 1]$ , установить связь этого относительного отклонения с уровнем адаптивности можно следующим образом. Введем некоторую монотонно возрастающую на интервале  $[0, 1]$  функцию  $F(x)$ , такую что  $F(0) = 0$ ,  $F(1) = MaxAdapt + 1$ , где  $MaxAdapt$  — максимально допустимый уровень адаптивной сетки. В результате требуемый уровень адаптивности на данном интервале  $[\mu_{m-1}, \mu_m]$  находится как

$$OrdAdapt = \min \left( MaxAdapt, F \left( Div_{rel}^{m-1/2} \right) \right).$$

Очевидно, меняя вид функции  $F(x)$ , можно регулировать чувствительность критерия к значениям относительного отклонения. Оптимальность выбора функции  $F(x)$  должна определяться численным исследованием, в простейшем случае эта функция может быть линейной:

$$F(x) = x (MaxAdapt + 1)$$

либо степенной:

$$F(x) = x^l (MaxAdapt + 1), \quad l \gg 1.$$

После того как в данной ячейке пространственной сетки рассчитаны функционалы решения, найдено относительное отклонение решения и определен уровень адаптивности для всех опорных интервалов по  $\mu$ , выполняется процедура *сглаживания*, после чего уровень адаптивности в соседних интервалах по переменной  $\mu$  будет отличаться не более чем на единицу. Этот алгоритм последовательно выполняется для всех ячеек пространственной сетки, причем рассматриваются только те ячейки, где температура излучения превышает некоторую заданную малую величину.

*Трехточечный критерий.* Функция  $I_{m-1/2}$  определена в центрах интервалов по угловой переменной  $\mu = \cos \theta$ . Пример такой функции приведен на рис. 7, где сплошными вертикальными линиями отмечены границы опорных интервалов по угловой переменной  $\mu$ , прерывистыми — границы адаптивных интервалов.

Критерий основан на анализе степени выпуклостей и вогнутостей функции  $I_{m-1/2}$  и является трехточечным, т. е. привлекаются значения функции в трех соседних точках сетки по угловой переменной  $\mu$ . На основе анализа данной функции принимается решение об изменении уровня адаптивности на каждом из интервалов сетки по угловой переменной  $\mu$ .

Основными этапами алгоритма критерия являются: 1) расчет интеграла по всем интервалам  $\mu$ ; 2) анализ расчетных значений интеграла на каждом опорном интервале.

Треугольник, построенный по трем последовательным точкам функции  $I_{m-1/2}$ , с *центральной* точкой на интервале  $i$  назовем треугольником интервала  $i$  и обозначим его площадь как  $S_i$ . Рассмотрим, например, второй опорный интервал (рис. 8).

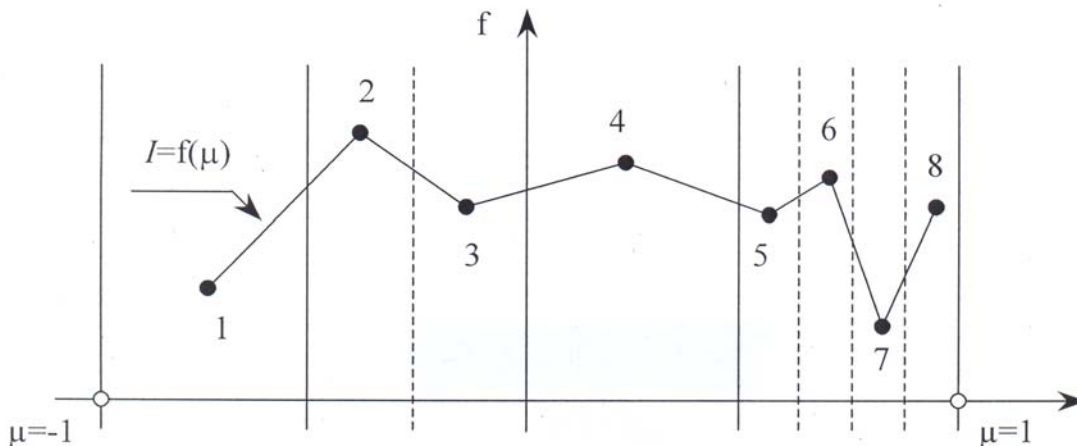


Рис. 7. Пример функции  $I_{m-1/2} = f(\mu)$

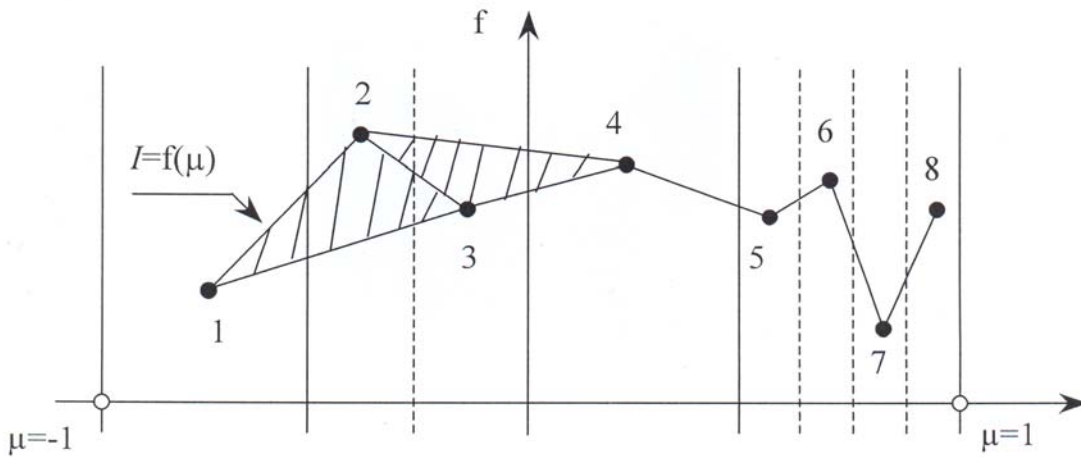


Рис. 8. Иллюстрация трехточечного критерия

Пусть в рассматриваемом опорном интервале не введена адаптивность. Тогда, если площадь треугольника  $S_2$  больше значения некоторой величины, принимается решение об увеличении уровня адаптивности. В исследуемом критерии площадь треугольника сравнивается с  $\varepsilon S$ , где  $\varepsilon = 0,01$ ;  $S$  — площадь под кривой  $I = f(\mu)$ .

Теперь рассмотрим ситуацию, при которой в опорном интервале уже была введена адаптивность (см. рис. 8).

Рассмотрим последовательно пары адаптивных интервалов, принадлежащих опорному интервалу: сначала интервалы 1 и 2, затем интервалы 3 и 4 и т. д. (в данном случае опорный интервал составляет только одна пара адаптивных интервалов). Для каждой пары сделаем следующую процедуру:

*Вычисляем площади треугольников  $S_2$  и  $S_3$  (см. рис. 8).*

*Если  $S_2 > \varepsilon S$  и/или  $S_3 > \varepsilon S$ , то принимается решение об увеличении уровня адаптивности на всем опорном интервале.*

*Если  $S_2 < \varepsilon S$  и  $S_3 < \varepsilon S$ , то проводится дополнительная проверка:*

*если  $(S_2 + S_3) < \varepsilon S$ , а также  $S_{\Delta 124} < \varepsilon S$  и  $S_{\Delta 134} < \varepsilon S$ , то уровень адаптивности в рассматриваемой паре адаптивных интервалов уменьшается.*

*В противном случае уровень адаптивности не меняется.*

После того как все пары адаптивных интервалов, составляющих опорный интервал, рассмотрены, в этом опорном интервале выбирается максимальный уровень адаптивности среди всех адаптивных интервалов.

Завершающим этапом алгоритма критерия служит анализ крайних интервалов: при нулевом уровне адаптивности на крайнем интервале и уровне адаптивности на соседнем интервале, большем нуля, проводится разбиение крайнего интервала.

*Стратегия применения критериев адаптивности.* Отдельно следует сказать о стратегии проведения расчетов с использованием рассмотренных критериев. Она может изменяться в зависимости от особенностей рассчитываемой задачи.

Наиболее очевидный случай — когда расчет начинается с использованием опорной угловой сетки (*классическая стратегия*). На каждом шаге выполняется алгоритм критерия, по которому на основе решения, полученного на предыдущем шаге, для каждой пространственной точки и каждого опорного интервала по  $\mu$  определяется уровень адаптивности. В постановке задачи задается максимально возможный уровень адаптивности, который определяется, например, количеством доступной оперативной памяти.

В зависимости от особенностей задачи такой алгоритм может дополняться рядом условий. Например, можно заранее задать некий минимальный или максимальный уровень адаптивности в *проблемных* подобластях либо при сильной анизотропии решения ограничить использование адаптивного алгоритма заданным набором интервалов по угловой переменной  $\mu$ .

В другом варианте стратегии (*регрессивная*) можно начинать расчет не на опорной угловой сетке, а на максимально возможном количестве адаптивных направлений. На последующих шагах эти адаптивные направления прореживаются на основе данных, полученных выполнением алгоритма критерия. В этом случае можно также задать периодическое (через несколько шагов) возвращение к счету на максимальном числе адаптивных направлений. Возможно, при численном решении некоторых задач использование регрессивной стратегии окажется наиболее выигрышным.

Наконец, можно рассматривать вариант *итерационной* стратегии. При такой стратегии с помощью критерия анализируется решение на временном шаге и определяется уровень адаптивности, после чего текущий шаг рассчитывается заново, с полученным уровнем адаптивности. Количество итерационных пересчетов каждого временного шага (или же периодических пересчетов) считается заданным.

### Заключение

Рассмотрен адаптивный по угловым переменным метод решения двумерного уравнения переноса излучения на неортогональных пространственных сетках. Работы по созданию данного алгоритма проводились в рамках контракта № В526462 с Ливерморской национальной лабораторией США. В ходе работ по контракту рассмотренные методики были внедрены в тестовую программу TRAST решения двумерного уравнения переноса, ориентированную на исследовательские работы по совершенствованию методик.

В следующей статье по данному направлению работ будут изложены результаты численных исследований адаптивного алгоритма на некотором наборе тестовых задач.

### Список литературы

1. Басс А. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А. Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучений. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1986.
  2. Шагалиев Р. М. Адаптивный метод решения многомерного уравнения переноса с применением дробных сеток в фазовом пространстве // Тр. РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2004. Вып. 8.
  3. Шагалиев Р. М., Шумилин В. А., Алексеев А. В., и др. Математическое моделирование и методики решения многомерных задач переноса частиц и энергии, реализованные в комплексе САТУРН-3 // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 4. С. 20—26.
  4. Плетенева Н. П., Шагалиев Р. М. Аппроксимация двумерного уравнения переноса на четырехугольных и многоугольных пространственных сетках по разностной схеме с расширенным шаблоном // Там же. 1989. Вып. 3.
  5. Троцкий В. Е. О классах сеток, допускающих консервативные аппроксимации двумерного оператора переноса треугольным разностным оператором // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1976. Т. 16, № 3. С. 793—797.
-