

УДК 517.9+519.6+533.7

**ВЛИЯНИЕ НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКИ НА ПАРАМЕТРЫ  
УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ЛАГРАНЖЕВЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ  
С ИСКУССТВЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ.  
ОДНОМЕРНЫЙ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

Ю. А. Бондаренко, О. А. Москалёв  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Известно, что в расчетах по лагранжевым разностным схемам с искусственной вязкостью ударная волна в подобласти с неравномерной сеткой претерпевает возмущения, ошибки параметров ударной волны при этом пропорциональны величине  $q - 1$ ,  $q = \Delta m_{j+1/2} / \Delta m_{j-1/2}$ . Для объяснения данного явления асимптотическим методом построены приближенные решения, которые описывают взаимодействие стационарной структуры ударной волны с градиентом коэффициента вязкости в предположении, что ударная волна распространяется в покоящемся газе, имеющем постоянные плотность и давление, и отсутствуют возмущения, догоняющие фронт ударной волны. Результаты численных экспериментов согласуются с полученной асимптотикой.

Практикам давно известно, что в расчетах по лагранжевым разностным схемам с искусственной вязкостью ударная волна (УВ) в подобласти с неравномерной сеткой претерпевает возмущения, но публикаций с рассмотрением этой проблемы, кроме работы Ноха [1], авторам не известно. Расчеты движения *стационарной* УВ на квазиравномерной сетке *со знаменателем* по полностью консервативным разностным схемам показывают, что ошибки параметров УВ (скачка давления или скорости на размазанной УВ, скорости движения фронта УВ) пропорциональны величине  $q - 1$ , где  $q = \Delta m_{j+1/2} / \Delta m_{j-1/2}$  есть знаменатель сетки.

В неопубликованной работе В. Е. Трощива и В. А. Елесина 1966 года показано, что если взять постоянный характерный размер ячеек в формулах для искусственной вязкости, то в расчетах энтропийные следы на границах разных веществ и на границах с резким изменением размеров ячеек сетки заметно уменьшаются. Этот эмпирический результат служит указанием на то, что дело не в разностных схемах, а в свойствах дифференциальных уравнений газовой динамики с вязкостью, применяемых при решении задачи.

В предлагаемой работе показано, что получаемые в расчетах возмущения УВ действительно определяются свойствами дифференциальных уравнений газовой динамики с вязкостью.

Рассматриваются размазанные УВ при плоском одномерном движении сжимаемого вязкого нетеплопроводного газа, описываемые уравнениями

$$\eta_t = u_m; \quad u_t = -(p + \varepsilon)_m; \quad E_t + (p + \varepsilon)\eta_t = 0; \quad \varepsilon = -\mu(m)\rho c u_m, \quad (1)$$

где  $\eta = 1/\rho$  — удельный объем газа;  $u$  — скорость газа;  $p = (\gamma - 1)\rho E$  — давление газа,  $E$  — его внутренняя энергия,  $\gamma = \text{const} > 1$ ;  $\varepsilon$  — вязкое давление;  $c$  — изэнтропическая скорость звука;  $\mu(m) > 0$  — коэффициент вязкости, гладко зависящий от лагранжевой массовой координаты  $m$ , причем

$$\mu(m) = \begin{cases} \mu_0 = \text{const} > 0, & m \leq m_0; \\ \mu_1 = \text{const} > 0, & m \geq m_1 > m_0, \quad \mu_1 \neq \mu_0. \end{cases}$$

Асимптотическим методом [2] построены приближенные решения, описывающие взаимодействие стационарной структуры УВ с градиентом коэффициента вязкости в предположении, что УВ распространяется в покоящейся газе, имеющем постоянные плотность и давление, и отсутствуют возмущения, догоняющие фронт УВ. Переменный коэффициент вязкости  $\mu(m)$  не зависит от времени, он предполагается малым по сравнению с характерными размерами ячеек, которые определяются пространственными производными коэффициента вязкости.

Асимптотические решения для возмущенной структуры размазанной УВ ищутся в виде

$$F(t, m, \mu_0) = \sum_{j=0}^{+\infty} (\mu_0)^j F_j(t, m, \zeta), \quad \zeta = \frac{\theta(t, m)}{\mu_0}, \quad (2)$$

где  $F$  есть одна из газодинамических функций  $u$ ,  $\eta$ ,  $\rho$ ,  $E$ ,  $\varepsilon$  или  $c$ ;  $\zeta$  — быстрая переменная;  $\mu_0$  — малый параметр.

Подстановка асимптотического ряда (2) в уравнения газовой динамики с вязкостью (1) дают слабые порядки  $(\mu_0)^{-1}$ , приравнивая которые нулю, получаем уравнения

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \eta_0}{\partial \zeta} = \frac{\partial \theta}{\partial m} \frac{\partial u_0}{\partial \zeta}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \theta}{\partial m} \frac{\partial}{\partial \zeta} (p_0 + \varepsilon_0); \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial E_0}{\partial \zeta} + (p_0 + \varepsilon_0) \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial \eta_0}{\partial \zeta} = 0, \quad (3)$$

где

$$\varepsilon_0 = -\nu(m) s_0 \frac{\partial \theta}{\partial m} \frac{\partial u_0}{\partial \zeta}, \quad \nu(m) = \frac{\mu(m)}{\mu_0}, \quad s_0 = \rho_0 c_0. \quad (4)$$

Из предположения, что к слою  $m_0 < m < m_1$  с переменным коэффициентом вязкости слева приходит невозмущенная УВ со стационарной структурой, следует, что предельные значения  $F_0^\pm = \lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} F_0(t, m, \zeta)$  равны соответствующим заданным параметрам невозмущенной УВ, а из (3) следует, что фазу можно брать в виде

$$\theta(t, m) = m - \sigma t,$$

где  $\sigma = \sqrt{-(p_0^+ - p_0^-) / (\eta_0^+ - \eta_0^-)}$  есть массовая скорость невозмущенной УВ. В результате получаем известные уравнения для стационарной структуры размазанной УВ, которые легко интегрируются. После этого имеем

$$\eta_0(t, m, \zeta) = H_0(\varphi(t, m, \zeta)), \quad \varphi(t, m, \zeta) = \frac{\zeta - \zeta_0(t, m)}{\nu_m} = \frac{m - \sigma t - \mu_0 \zeta_0(t, m)}{\mu(m)}$$

с пока произвольным сдвигом  $\zeta_0(t, m)$  центра размазанного фронта УВ, а функция  $H_0(\varphi)$  однозначно определена неявным уравнением

$$\varphi = \frac{2}{\sigma(\gamma + 1)(\eta_0^+ - \eta_0^-)} \int_{(\eta_0^+ + \eta_0^-)/2}^{H_0(\varphi)} \left( \frac{c_0(\eta)}{\eta_0^+ - \eta} + \frac{c_0(\eta)}{\eta - \eta_0^-} \right) d\eta,$$

$$c_0(\eta) = \sqrt{(c_0^\pm)^2 + (\gamma - 1)(c_0^\pm)^2 \frac{\eta_0^\pm - \eta}{\eta_0^\pm} + \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2} \sigma^2 (\eta_0^\pm - \eta)^2}.$$

Слагаемые порядка  $(\mu_0)^0 = 1$ , возникающие после подстановки асимптотического ряда (2) в уравнения газовой динамики с вязкостью (1), дают систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \eta_1 - \frac{\partial \theta}{\partial m} u_1 \right) &= -\frac{\partial \eta_0}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial m}; \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} u_1 + \frac{\partial \theta}{\partial m} (p_1 + \varepsilon_1) \right) &= -\frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial m} (p_0 + \varepsilon_0); \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} E_1 \right) + (p_0 + \varepsilon_0) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \eta_1 \right) + (p_1 + \varepsilon_1) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \eta_0 \right) &= -\frac{\partial E_0}{\partial t} - (p_0 + \varepsilon_0) \frac{\partial \eta_0}{\partial t}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\varepsilon_1 = -\nu s_0 \frac{\partial u_0}{\partial m} - \nu s_1 \frac{\partial \theta}{\partial m} \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} - \nu s_0 \frac{\partial \theta}{\partial m} \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}, \quad s_1 = \frac{\gamma}{2c_0 \eta_0} (\eta_0 p_1 - p_0 \eta_1); \quad E_1 = \frac{p_0 \eta_1 + p_1 \eta_0}{\gamma - 1}. \quad (6)$$

Уравнения (5), (6) описывают слабые первого порядка малости  $F_1(\zeta)$ , возмущающие структуру размазанного фронта УВ. В этой системе обыкновенных дифференциальных уравнений переменные  $t$  и  $m$  присутствуют в качестве параметров. Слабые в правых частях уравнений (5) известны и определяются стационарной структурой размазанной УВ, т. е. известным решением системы уравнений (3), (4).

После подстановки этих известных зависимостей, выражения  $\theta(t, m) = m - \sigma t$  и перехода от независимой переменной  $\zeta$  к новой независимой переменной  $\eta_0$ ,  $F_1(t, m, \zeta) = F_1(t, m, \eta_0)$ , получается система уравнений, интегрируемая в квадратурах. После исключения возмущений скорости, давления, энергии и вязкости для возмущений удельного объема  $\eta_1(\eta_0)$  получается уравнение

$$\frac{d\eta_1}{d\eta_0} + (A_1 \zeta' + A_0) \eta_1 = B_1 \zeta' + B_0, \quad (7)$$

где

$$A_1 = \frac{\sigma^2 \eta_0 - \gamma p_0(\eta_0) - (\gamma - 1) \varepsilon_0(\eta_0)}{c_0(\eta_0) \nu \sigma}; \quad A_0 = -\frac{\gamma}{2(c_0(\eta_0))^2} [(\gamma + 1) p_0(\eta_0) + (\gamma - 1) \varepsilon_0(\eta_0)];$$

$$B_1 = a \frac{2}{\nu c_0(\eta_0)} [\gamma \eta_0 \zeta_1(\eta_0) - (\gamma - 1) \zeta_2(\eta_0)] + b \frac{1}{\nu c_0(\eta_0)} (\eta_0^+ - \eta_0) [(\gamma + 1) \eta_0 - (\gamma - 1) \eta_0^+];$$

$$B_0 = a \frac{\gamma(\gamma - 1) \sigma}{(c_0(\eta_0))^2} [\eta_0 \zeta_1(\eta_0) - \zeta_2(\eta_0)] - b \frac{\gamma(\gamma - 1) \sigma}{2(c_0(\eta_0))^2} (\eta_0^+ - \eta_0)^2 - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \zeta_0}{\partial t};$$

$$\zeta_1(\eta_0) = \int_{\eta_0}^{\eta_0^+} \zeta(\bar{\eta}_0) d\bar{\eta}_0; \quad \zeta_2(\eta_0) = \int_{\eta_0}^{\eta_0^+} \bar{\eta}_0 \zeta(\bar{\eta}_0) d\bar{\eta}_0;$$

$$\zeta(t, m, \eta_0) = \zeta_0(t, m) + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{\nu}{\sigma} \frac{1}{\eta_0^+ - \eta_0^-} (I^+(\eta_0) + I^-(\eta_0)); \quad \zeta' = \frac{d\zeta}{d\eta_0};$$

$$I^+(\eta) = \int_{(\eta_0^- + \eta_0^+)/2}^{\eta} \frac{c_0(\eta_0)}{\eta_0^+ - \eta_0} d\eta_0; \quad I^-(\eta) = \int_{(\eta_0^- + \eta_0^+)/2}^{\eta} \frac{c_0(\eta_0)}{\eta_0 - \eta_0^-} d\eta_0;$$

$$a(m) = \frac{\sigma}{\nu} \frac{d\nu}{dm}; \quad b(t, m) = \frac{\partial \zeta_0}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \zeta_0}{\partial m} - \zeta_0 \frac{\sigma}{\nu} \frac{d\nu}{dm}.$$

Наличие двух особых точек в уравнении (7) при  $\eta_0 \rightarrow \eta_0^\pm \mp 0$  приводит к тому, что предельные значения  $\eta_1^\pm = \lim_{\eta_0 \rightarrow \eta_0^\pm \mp 0} \eta_1(\eta_0)$  определяются однозначно. При этом перед фронтом возмущенной размазанной УВ возмущения всех газодинамических функций отсутствуют:

$$F_1^+ = \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} F_1(t, m, \zeta) = \lim_{\eta_0 \rightarrow \eta_0^+ - 0} F_1(t, m, \eta_0) = 0.$$

Предельные значения возмущений структуры  $F_1^- = F_1(t, m, \eta_0^-) = \lim_{\eta_0 \rightarrow \eta_0^- + 0} F_1(t, m, \eta_0)$  с задней стороны фронта УВ (и тем самым параметры возмущенной УВ) определены однозначно, с точностью до неопределенного параметра  $b(t, m)$ , зависящего от неопределенной функции  $\zeta_0(t, m)$ .

От заднего фронта возмущенной УВ распространяются налево звуковые возмущения с амплитудой порядка  $O(\mu_0)$ , как схематично показано на рис. 1. Длина волны этих возмущений имеет порядок длины, на которой коэффициент вязкости  $\mu(m)$  меняется (увеличивается или уменьшается) в два

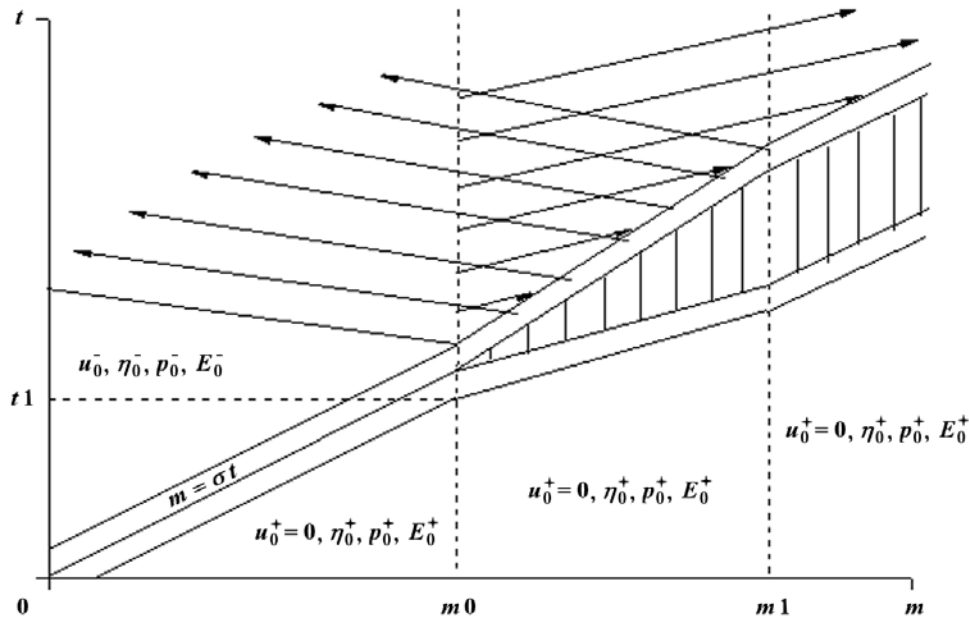


Рис. 1. Распространение размазанной УВ по слою вещества с переменной вязкостью

раза. Поэтому возмущения, отраженные от возмущений скорости звука и догоняющие фронт УВ, будут иметь амплитуду не больше, чем  $O(\mu_0)^2$ , и такими возмущениями можно пренебрегать.

Остающаяся неопределенность (представляемая параметром  $b(t, m)$  или функцией  $\zeta_0(t, m)$ ) разрешается предположением, что отсутствуют возмущения порядка  $O(\mu_0)$ , идущие из  $-\infty$  и догоняющие фронт УВ. Это означает, что соответствующий инвариант Римана равен нулю:

$$(s_0^- u_1^-(t, m) + p_1^-(t, m)) \Big|_{m=m_0^-(t)} = 0.$$

Использование этого граничного условия после соответствующих вычислений приводит к выражению

$$\zeta_0(t, m) = D_2 \left( 1 - \frac{\mu(m)}{\mu_0} \right), \quad (8)$$

где безразмерный параметр  $D_2$  зависит от параметров невозмущенной УВ и определен формулами

$$D_2 = \frac{F_1 C_1 + F_2 C_2}{Q_b}, \quad F_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{\sigma} \left( I^+(\eta_0^-) + I^-(\eta_0^+) \right),$$

$$F_2 = \frac{1}{\gamma + 1} \frac{1}{\sigma} (\eta_0^+ - \eta_0^-) \left( I^+(\eta_0^-) + I^-(\eta_0^+) \right) + \frac{1}{\gamma + 1} \frac{1}{\sigma} \int_{\eta_0^-}^{\eta_0^+} c_0(\bar{\eta}_0) d\bar{\eta}_0,$$

$$Q_b = \left[ s_0^- + (\gamma - 1) \frac{\sigma}{\eta_0^-} (\eta_0^+ - \eta_0^-) \right] (\eta_0^+ - \eta_0^-) + \frac{2s_0^- (\sigma + s_0^-)}{\sigma (\gamma + 1)} [(\gamma + 1) \eta_0^- - (\gamma - 1) \eta_0^+],$$

$$C_1 = s_0^- - 2(\gamma - 1) \sigma + \frac{4\gamma s_0^- (\sigma + s_0^-) \eta_0^-}{\sigma (\gamma + 1) (\eta_0^+ - \eta_0^-)}, \quad C_2 = 2(\gamma - 1) \left[ \frac{\sigma}{\eta_0^-} - \frac{2s_0^- (\sigma + s_0^-)}{\sigma (\gamma + 1) (\eta_0^+ - \eta_0^-)} \right].$$

Все интегралы берутся в элементарных функциях, но имеют громоздкие выражения.

После нахождения (8) параметры возмущенной УВ на задней стороне фронта УВ имеют вид  $F^-(t, m) = \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} F(t, m, \mu_0) = F_0^- + D_F \frac{d\mu(m)}{dm} + O((\mu_0)^2)$ ,  $0 < \mu_0 \ll 1$ , где величины  $D_F$  зависят от уравнения состояния и параметров  $F_0^\pm$  невозмущенной УВ. В частности,

$$\begin{aligned}\eta^-(t, m) &= \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} \eta(t, m, \zeta) = \eta_0^- + D_\eta \frac{d\mu(m)}{dm} + O((\mu_0)^2), & 0 < \mu_0 \ll 1; \\ u^-(t, m) &= \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} u(t, m, \zeta) = u_0^- + D_u \frac{d\mu(m)}{dm} + O((\mu_0)^2), & 0 < \mu_0 \ll 1; \\ p^-(t, m) &= \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} p(t, m, \zeta) = p_0^- + D_p \frac{d\mu(m)}{dm} + O((\mu_0)^2), & 0 < \mu_0 \ll 1,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}D_\eta &= \frac{4}{\gamma + 1} \left\{ \frac{(\gamma - 1) F_2 - \gamma \eta_0^- F_1}{\eta_0^+ - \eta_0^-} + [(\gamma + 1) \eta_0^- - (\gamma - 1) \eta_0^+] \frac{D_2}{2} \right\}; \\ D_u &= \sigma [F_1 - D_2 (\eta_0^+ - \eta_0^-) - D_\eta]; \\ D_p &= (\gamma - 1) \frac{2\sigma^2}{\eta_0^-} \left[ (F_2 - \eta_0^- F_1) - \frac{D_2}{2} (\eta_0^+ - \eta_0^-)^2 \right] - (s_0^-)^2 D_\eta = -s_0^- D_u.\end{aligned}$$

Распространяющееся налево от возмущенной УВ и порождаемое переменностью коэффициента вязкости звуковое возмущение описывается асимптотическим разложением

$$\begin{aligned}u(t, m) &= u_0^- + \delta u_{10}^- (m + s_0^- t) + O((\mu_0)^2), & m \leq m_0^-(t, \mu); \\ p(t, m) &= p_0^- - s_0^- \delta u_{10}^- (m + s_0^- t) + O((\mu_0)^2), & m \leq m_0^-(t, \mu).\end{aligned}\tag{9}$$

Функция  $\delta u_{10}^- (\xi)$  (первого порядка малости  $O(\mu_0)$ ), описывающая возмущение скорости, определяется уравнением (схематичное изображение движения возмущений приведено на рис. 2)

$$\delta u_{10}^- (\xi) = D_u \frac{d\mu(m_0^-(t_0))}{dm} \Big|_{m_0^-(t_0) + s_0^- t_0 = \xi} = D_u \frac{d\mu(m_0)}{dm} \Big|_{m_0 + s_0^- t_0(m_0) = \xi}.\tag{10}$$

Здесь  $m_0^-(t)$  — массовая лагранжева координата положения заднего (левого) края фронта размазанной УВ; через  $t_0^-(m)$  обозначен момент прихода заднего фронта размазанной УВ в точку с массовой

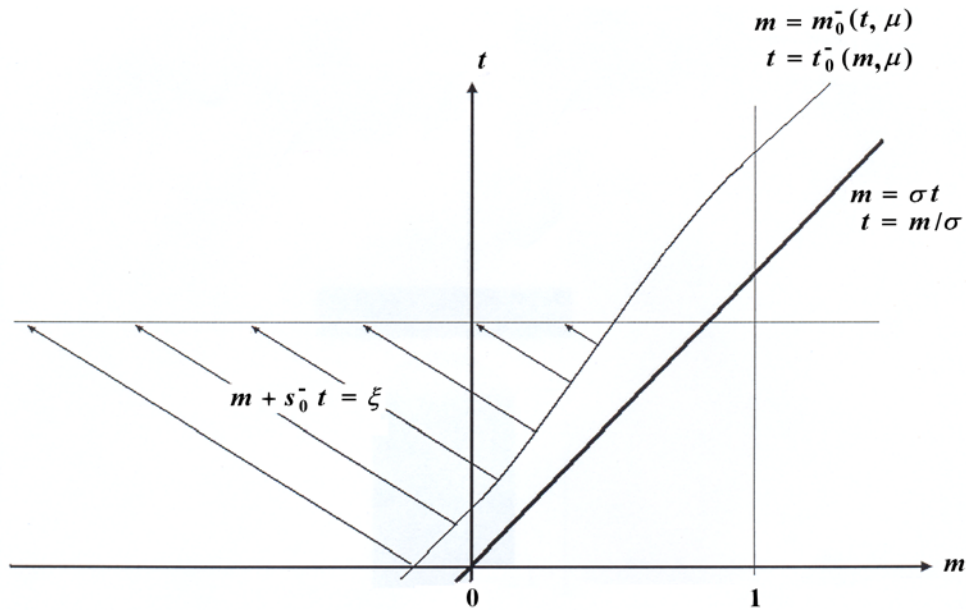


Рис. 2. Схема движения звуковых возмущений (направление указано стрелками), порождаемых возмущенной УВ, проходящей через слой  $0 \leq m \leq 1$  с переменным коэффициентом вязкости

координатой  $m$ . Разумеется, обе эти функции зависят дополнительно от текущих значений коэффициента вязкости и градиента коэффициента вязкости. Формальная ширина фронта размазанной УВ для линейной вязкости равна бесконечности. Но разность между текущим значением газодинамического параметра (например удельного объема) и его предельным значением с увеличением расстояния от центра УВ убывает быстро (по экспоненциальному закону). Поэтому на практике удобно использовать формулу

$$t_0^-(m) = \frac{m}{\sigma} + D_2 \frac{\mu(m) - \mu_0}{\sigma} + \mu(m) \frac{c_0^-}{\sigma^2 (\eta_0^+ - \eta_0^-)} \frac{2}{\gamma + 1} \ln \frac{\eta_0^+ - \eta_0^-}{2\delta \left| D_\eta \overline{\mu'} \right|},$$

в которой положительный малый параметр  $\delta$  можно брать равным  $1/3 \div 1/5$ . Можно брать любое разумное определение характерного значения градиента коэффициента вязкости, например  $\overline{\mu'} = \max_m \frac{d\mu}{dm}$ . Из-за логарифмического характера зависимости ширины фронта от этой величины зависимость результатов от выбора этого параметра мала. Так же мало влияет на результаты и выбор малого положительного параметра  $\delta$ .

Результаты численных экспериментов согласуются с полученной асимптотикой. Расчеты проводились по полностью консервативной разностной схеме типа *крест* [3] с линейной искусственной вязкостью. Переменность коэффициента физической вязкости  $\mu(m)$  моделировалась синусоидальной зависимостью размеров ячеек лагранжевой сетки:

$$\mu(m_{j+1/2}) = A1 \Delta m_{j+1/2},$$

где  $A1$  — безразмерный коэффициент искусственной вязкости.

Для примера на рис. 3 показаны размеры ячеек начальной сетки в пяти расчетах с относительно сильной УВ с параметрами  $p_{\text{гран}}/p_{\text{нач}} = 10$  и  $\gamma = 5/3$ . На рис. 4, 5 показаны полученные в этих расчетах профили скорости и давления в сравнении с полученными по асимптотическим формулам (9) и (10), когда УВ проходит через точку с наибольшим градиентом коэффициента вязкости. В проведенных расчетах наблюдается удовлетворительное согласие с асимптотическими результатами, тем лучше, чем меньше ширина фронта размазанной УВ по сравнению с шириной зоны неравномерности сетки.

Из полученных результатов следует, что возмущения параметров при движении УВ по подобласти с неравномерной сеткой определяются свойствами уравнений газовой динамики с вязкостью и факт

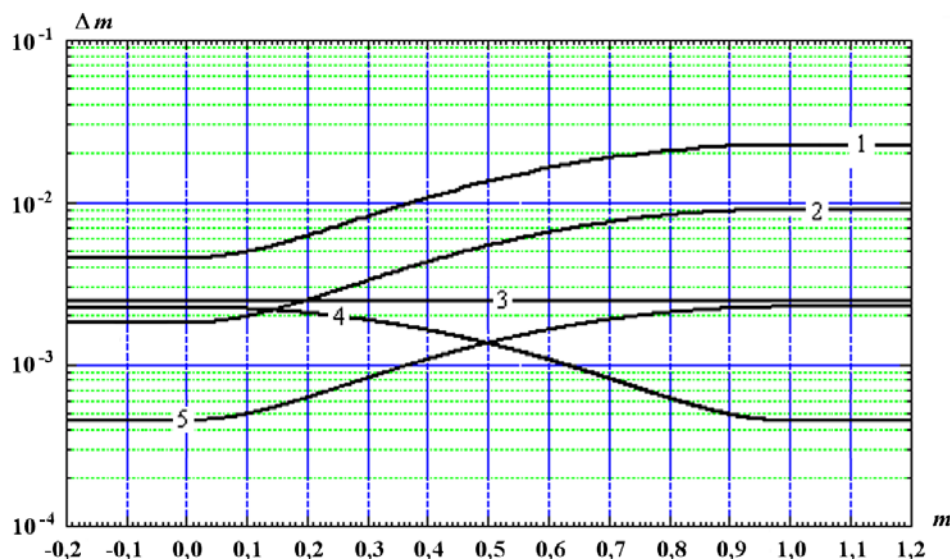


Рис. 3. Размер ячеек начальной сетки в расчетах 1—5

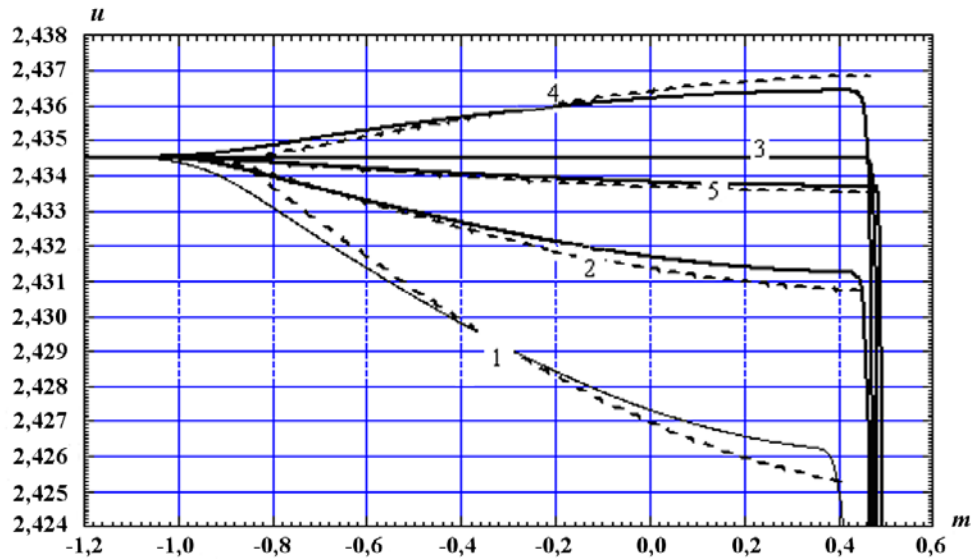


Рис. 4. Профили скорости на момент времени  $t = 0,135 = \Delta t/2$ : — — расчеты 1–5; - - - - вычисления по асимптотическим формулам

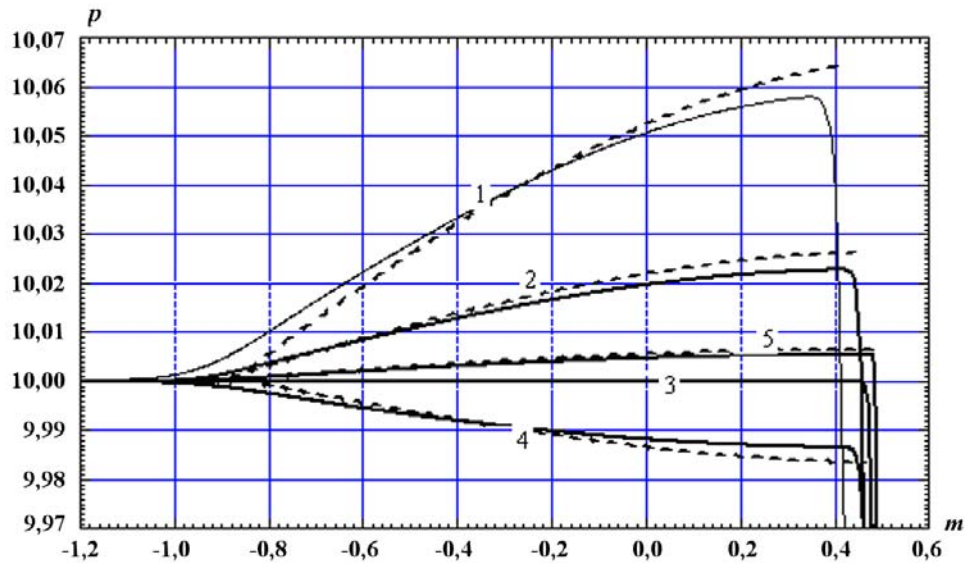


Рис. 5. Профили давления на момент времени  $t = 0,135 = \Delta t/2$ : — — расчеты 1–5; - - - - вычисления по асимптотическим формулам

появления возмущений наследуется разностными схемами. Поэтому задачу повышения точности счета УВ на неравномерных сетках надо решать путем подбора искусственных или аппроксимационных диссипативных механизмов, предназначенных для размазывания УВ. От порядка аппроксимации разностной схемы здесь мало что зависит.

### Список литературы

1. Noh W. F. Errors for calculations of strong shocks using an artificial viscosity and an artificial heat flux // J. Comp. Phys. 1987. Vol. 72, No 1. P. 78–120.

2. *Маслов В. П., Цупин В. А.* Распространение ударной волны в изоэнтропическом газе с малой вязкостью // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. 1977. Т. 8. С. 273—308.
  3. *Бондаренко Ю. А.* Консервативное расщепление уравнения энергии в разностных схемах типа "крест" для лагранжевой газодинамики // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1997. Т. 37, № 8. С. 1020—1023.
-