

УДК 519.6+517.9

## МЕТОДИКА ВЬЮГА ДЛЯ РАСЧЕТА ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МЕДЛЕННЫХ МГД-ВОЛН

К. Г. Гайнуллин, В. А. Жмайло, Ю. Ф. Кирьянов, Е. А. Поздьева  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Рассматривается методика ВЬЮГА, предназначенная для решения задачи распространения медленных МГД-волн в ионосфере, стратосфере и грунте. Проводится сравнение результатов численных расчетов с аналитическими решениями тестовых задач.

### Введение

В результате космического ядерного взрыва в ионосфере возникает облако плазмы. Разлетаясь, оно вытесняет геомагнитное поле, в результате чего формируется область *источника*. Движение плазмы поперек геомагнитного поля генерирует электрические и магнитные поля на границе области источника. Эти поля распространяются вниз через альфеновский и холловский слои ионосферы в стратосферу и, частично отражаясь, проникают в грунт.

Определяющую роль при численном исследовании распространения возмущений в рассматриваемом случае играют уравнения Максвелла для электрического и магнитного полей и уравнения движения для каждого компонента плазмы. Вопросы, связанные с выводом уравнений динамики плазмы в *квазигидродинамическом* приближении и условиями их применимости, хорошо исследованы в [1]. В этом приближении ионосферная плазма предполагается квазинейтральной ( $N_e = N_i$ ), гидростатическое давление мало по сравнению с магнитным, ионы и электроны сталкиваются с неподвижными нейтралами. Исключение компонент магнитного поля, плотности тока и скорости движения ионов позволяет свести исходную систему к решению уравнений для компонент электрического поля.

В данной статье рассматривается методика ВЬЮГА, предназначенная для решения полученных уравнений.

### Основные уравнения

Для расчета распространения МГД-электромагнитного излучения (МГД-ЭМИ) используется линейризованная система уравнений Максвелла в низкочастотном (квазистационарном) приближении, дополненная уравнением движения частиц и обобщенным законом Ома [1, 2]:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \text{rot } \vec{E}; \quad \text{div } \vec{H} = 0; \quad \frac{4\pi}{c} \vec{j} = \text{rot } \vec{H}; \quad \text{div } \vec{E} = 0; \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nu_{in}(z) \vec{u} &= \frac{\omega_i}{eN_e(z)} (\vec{j} \times \vec{h}); \\ \nu_{en}(z) \vec{j} + \omega_e (\vec{j} \times \vec{h}) &= \frac{e^2 N_e(z)}{m} \vec{E} + eN_e(z) \omega_e (\vec{u} \times \vec{h}). \end{aligned}$$

В этих уравнениях приняты обозначения, общеизвестные в физике медленных МГД-волн в ионосферной плазме [1]:  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  — напряженности возмущений электрического и магнитного полей соответственно;  $\vec{j}$  — плотность тока заряженных частиц;  $\vec{u}$  — скорость движения ионов;  $\vec{H}_0 = H_0 \vec{h}$  —

невозмущенное геомагнитное поле;  $\omega_e = \frac{eH_0}{mc} \approx 10^7 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_i = \frac{eH_0}{M_i c} \approx 100 \div 200 \text{ с}^{-1}$  — циклотронные электронная и ионная частоты соответственно;  $\nu_{in}(z)$  — частота столкновений ионов с нейтралами;  $\nu_{en}(z)$  — частота столкновения электронов с нейтралами;  $N_e(z)$  — концентрация электронов;  $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$  ед. СГСЕ — заряд электрона;  $c = 3 \cdot 10^5$  км/с — скорость света в вакууме;  $M_i = 4,3 \cdot 10^{-23}$  г,  $m = 9,1 \cdot 10^{-28}$  г — массы иона и электрона соответственно.

Задача расчета параметров МГД-ЭМИ не обладает какой-либо симметрией, позволяющей понизить размерность, поэтому уравнения Максвелла — трехмерные. Последовательным исключением векторов  $\vec{H}$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{j}$  из системы уравнений для напряженности электрического поля  $\vec{E}$  получается векторное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \Omega_i \vec{E} &= - \left( \Delta \vec{E} \times \vec{h} \right) \times \vec{h} + \frac{\nu_{en}}{\omega_e \omega_i} \Omega_i \Delta \vec{E} + \frac{1}{\omega_i} \left( \Omega_i \Delta \vec{E} \times \vec{h} \right), \\ \Omega_i &= \frac{\partial}{\partial t} + \nu_{in}, \quad v^2 = \frac{mc^2}{4\pi e^2 N_e} \omega_e \omega_i, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Система координат  $(x, y, z)$  выбрана так, чтобы начало координат  $z = 0$  находилось на поверхности Земли, а ось  $Oz$  была направлена по нормали  $\vec{n}$  к плоскости Земли. Пусть в этой системе вектор геомагнитного поля  $\vec{h} = \{0, -\sin \alpha, \cos \alpha\}$  лежит в плоскости  $x = 0$ ,  $\alpha$  — угол между осью  $Oz$  и вектором  $\vec{h}$ . Проецируя векторное уравнение (1) на оси выбранной системы координат  $(x, y, z)$ , после несложных преобразований получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \Omega_i E'_x &= \Delta E'_x + \frac{\nu_{en}}{\omega_e \omega_i} \Omega_i \Delta E'_x + \frac{1}{\omega_i} \Omega_i \Delta E'_y; \\ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \Omega_i E'_y &= \Delta E'_y + \frac{\nu_{en}}{\omega_e \omega_i} \Omega_i \Delta E'_y - \frac{1}{\omega_i} \Omega_i \Delta E'_x; \\ \frac{1}{v^2} \frac{\partial E'_z}{\partial t} &= \frac{\nu_{en}}{\omega_e \omega_i} \Delta E'_z. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $E'_x = E_x$ ;  $E'_y = E_y \cos \alpha + E_z \sin \alpha$ ;  $E'_z = -E_y \sin \alpha + E_z \cos \alpha$ . Система уравнений (2) упрощается, если перейти к комплексной функции  $E' = E'_x - iE'_y$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \nu_{in} \right) E' &= \lambda_i \Delta E' + \lambda_e \frac{\partial}{\partial t} \Delta E'; \\ \frac{\partial E'_z}{\partial t} &= \lambda_k \Delta E'_z, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\lambda_i(z) = v^2 \left( 1 + \frac{\nu_{en} \nu_{in}}{\omega_e \omega_i} + i \frac{\nu_{in}}{\omega_i} \right); \quad \lambda_e(z) = v^2 \left( \frac{\nu_{en}}{\omega_e \omega_i} + i \frac{1}{\omega_i} \right); \quad \lambda_k(z) = \frac{c^2}{4\pi} \frac{1}{\sigma^+}, \quad \sigma^+ = \frac{e^2 N_e}{m \nu_{en}}.$$

В грунте распространение описывается диффузионными уравнениями [3]

$$\frac{\partial E'}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi} \frac{1}{\sigma^-} \Delta E'; \quad \frac{\partial E'_z}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi} \frac{1}{\sigma^-} \Delta E'_z,$$

где  $\sigma^- = \text{const} \approx 10^6 \div 10^{10} \text{ с}^{-1}$ . Поверхность Земли ( $z = 0$ ) в этом случае является границей раздела двух сред, и на этой границе формулируются условия сопряжения векторов поля [3]. На плоскости  $z = 0$  задаются условия непрерывности касательных компонент и их первых производных для электрического поля:

$$E_{x,y} \Big|_{z=+0} = E_{x,y} \Big|_{z=-0}; \quad \frac{\partial E_{x,y}}{\partial z} \Big|_{z=+0} = \frac{\partial E_{x,y}}{\partial z} \Big|_{z=-0}.$$

На границе раздела двух сред (воздуха и грунта) нормальная компонента электрического поля и ее производная связаны через плотность поверхностного заряда  $Q$ , плотность тока  $\sigma E_z$  и индукцию  $\varepsilon \vec{E}$ :

$$\begin{aligned} 4\pi\varepsilon_2 E_z|_{z=+0} &= Q + 4\pi\varepsilon_3 E_z|_{z=-0}; & \frac{\partial E_z}{\partial z}|_{z=+0} &= \frac{\partial E_z}{\partial z}|_{z=-0}; \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= -\sigma^+ E_z|_{z=+0} + \sigma^- E_z|_{z=-0}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\varepsilon_2 = 1$  и  $\sigma^+$  — соответственно диэлектрическая проницаемость и проводимость для воздуха, для грунта эти величины равны  $\varepsilon_3 = 2 \div 5$  и  $\sigma^-$ .

Для характерных значений проводимости грунта  $\sigma^- \approx 10^6 \div 10^{10} \text{ с}^{-1}$  и длительности МГД-импульса  $1 \div 100 \text{ с}$  разделение зарядов обеспечивает практическое отсутствие продольного поля  $E_z$  внутри грунта, как и следует из электростатической аналогии.

### Численный алгоритм

При численном интегрировании первое уравнение (3) аппроксимируются схемой

$$\begin{aligned} a_v \frac{(E')^{n+1} - 2(E')^n + (E')^{n-1}}{\Delta t^2} + \nu_{in} \frac{\theta (E')^{n+1} + (1-2\theta)(E')^n - (1-\theta)(E')^{n-1}}{\Delta t} = \\ = \lambda_i \sum_{\alpha=1}^3 A_\alpha \left( \sigma_1 (E')^{n+1} + \sigma_2 (E')^n + \sigma_3 (E')^{n-1} \right) + \\ + \lambda_e \sum_{\alpha=1}^3 A_\alpha \frac{\sigma_4 (E')^{n+1} + (1-2\sigma_4)(E')^n - (1-\sigma_4)(E')^{n-1}}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (5)$$

Разностные операторы  $A_\alpha$  аппроксимируют вторые производные по пространственным переменным на трехточечном шаблоне неравномерной сетки. Индексы по пространственным переменным ( $m$  — по первой,  $j$  — по второй,  $k$  — по третьей) у функций для сокращения записи опущены. Все диффузионные уравнения, в частности уравнение для  $E'_z$ , аппроксимируются по схеме Дугласа [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_z - (E'_z)^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \lambda_k A_1 \left( \tilde{E}_z + (E'_z)^n \right) + \lambda_k A_2 (E'_z)^n + \lambda_k A_3 (E'_z)^n; \\ \frac{\tilde{\tilde{E}}_z - \tilde{E}_z}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \lambda_k A_2 \left( \tilde{\tilde{E}}_z - (E'_z)^n \right); \\ \frac{(E'_z)^{n+1} - \tilde{\tilde{E}}_z}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \lambda_k A_3 \left( (E'_z)^{n+1} - (E'_z)^n \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где функции  $\tilde{E}_z$  и  $\tilde{\tilde{E}}_z$  используются в промежуточных вычислениях.

В практических расчетах вместо схемы (5) используется факторизованная схема, для чего она записывается в виде

$$\left( I - d \sum_{\alpha=1}^3 A_\alpha \right) (E')^{n+1} = \varphi^n, \quad (7)$$

где  $I$  — единичный оператор;

$$\begin{aligned} \varphi^n &= \frac{1}{a_v + \Delta t \nu_{in} \theta} \left\{ \left\{ [2a_v - (1-2\theta) \Delta t \nu_{in}] I + \beta_2 \sum_{\alpha=1}^3 A_\alpha \right\} (E')^n + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ [-a_v + (1-\theta) \nu_{in} \Delta t] I + \beta_3 \sum_{\alpha=1}^3 A_\alpha \right\} (E')^{n-1} \right\}; \end{aligned}$$

$$d = \frac{\beta_1}{a_v + \Delta t \nu_{in} \theta}, \quad \beta_1 = \Delta t (\lambda_i \sigma_1 \Delta t + \sigma_4 \lambda_e);$$

$$\beta_2 = \Delta t [\lambda_i \sigma_2 \Delta t + (1-2\sigma_4) \lambda_e]; \quad \beta_3 = \Delta t [\lambda_i \sigma_3 \Delta t - (1-\sigma_4) \lambda_e].$$

Разностное уравнение (7) факторизуется, т. е. левая часть записывается в виде произведения операторов  $(I - dA_1)(I - dA_2)(I - dA_3)$ , и окончательно уравнение записывается аналогично схеме (6):

$$(I - dA_1)\tilde{E}' = \varphi^n; \quad (I - dA_2)\tilde{E}'' = \tilde{E}'; \quad (I - dA_3)(E')^{n+1} = \tilde{E}''.$$

Схемы (6) и (7) абсолютно устойчивы [4], на равномерной сетке ( $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 1$ ) они имеют второй порядок аппроксимации по пространственным переменным, по временной переменной — первый порядок, а при условии  $\theta = \frac{1}{2}$ ,  $\sigma_1 = \sigma_3$ ,  $\sigma_4 = \frac{1}{2}$  — второй.

Аппроксимация условий (4) для нормальных компонент электрического поля на контактной границе (граница стратосферы с земной поверхностью) выбирается следующая:

$$\begin{aligned} 4\pi\varepsilon_2 E_z^n|_{z=+0} = Q^n + 4\pi\varepsilon_3 E_z^n|_{z=-0}; \quad \frac{\partial E_z^n}{\partial z}\Big|_{z=+0} = \frac{\partial E_z^n}{\partial z}\Big|_{z=-0}; \\ \frac{Q^n - Q^{n-1}}{\Delta t} = -\sigma^+ E_z^n|_{z=+0} + \sigma^- E_z^n|_{z=-0}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из первого и третьего уравнений (8) исключается  $Q^n$ , и для сокращения записи вводятся переменные

$$E_z^n = w; \quad \frac{Q^{n-1}}{\sigma^+ \Delta t + 4\pi\varepsilon_2} = Q(\Delta t); \quad \varepsilon = \frac{\sigma^- \Delta t + 4\pi\varepsilon_3}{\sigma^+ \Delta t + 4\pi\varepsilon_2}.$$

Тогда система уравнений (8) записывается в виде

$$Q(\Delta t) + \varepsilon w|_{z=z_N-0} = w|_{z=z_N+0}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{z=z_N-0} = \frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{z=z_N+0}, \quad z_N = 0.$$

Эта система аппроксимируется на неравномерной сетке по переменной  $z$ , шаблон которой представлен на рис. 1. Сеточная функция  $w$  по переменной  $z$  вычисляется в полуцелых точках, помеченных на шаблоне крестиками.

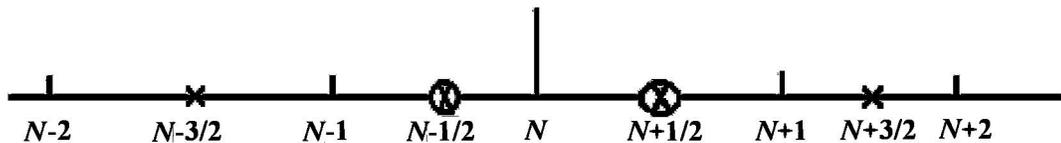


Рис. 1. Фрагмент сетки на контактной границе  $z_N = 0$

Пусть на момент времени  $t_n$  в точке разрыва  $z = z_N$  функция  $w(z, t)$  принимает значения  $w_-^n$  и  $w_+^n$  слева и справа от разрыва соответственно. Граничные условия в этой точке аппроксимируются системой

$$Q(\Delta t) + \varepsilon w_-^n = w_+^n; \quad \frac{w_-^n - w_{N-1/2}^n}{z_N - z_{N-1/2}} = \frac{w_{N+1/2}^n - w_+^n}{z_{N+1/2} - z_N}.$$

В дальнейших выкладках временной индекс  $n$  и зависимость  $Q$  от  $\Delta t$  для сокращения записи опускаются. Из этой системы находятся  $w_-$  и  $w_+$ :

$$\begin{aligned} w_- = \frac{1}{1 + \varepsilon B} (w_{N-1/2} + B w_{N+1/2}) - B \frac{Q}{1 + \varepsilon B}; \\ w_+ = \varepsilon \frac{1}{1 + \varepsilon B} (w_{N-1/2} + B w_{N+1/2}) + \frac{Q}{1 + \varepsilon B}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$B = \frac{z_N - z_{N-1/2}}{z_{N+1/2} - z_N} = \frac{0,5(z_N - z_{N-1})}{0,5(z_{N+1} - z_N)} = \frac{\Delta z_{N-1/2}}{\Delta z_{N+1/2}}.$$

Оператор  $A_3 w \approx \frac{\partial^2 w}{\partial^2 z}$  аппроксимируется в точках  $z_{N-1/2}$  и  $z_{N+1/2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 z} \Big|_{N-1/2} &\approx A_3 w|_{N-1/2} = \frac{1}{z_N - z_{N-1}} \left( \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \Big|_{z_{N-0}} - \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \Big|_{z_{N-1}} \right) = \\ &= \frac{1}{\Delta z_{N-1/2}} \left( \frac{w_- - w_{N-1/2}}{z_N - z_{N-1/2}} - \frac{w_{N-1/2} - w_{N-3/2}}{z_{N-1/2} - z_{N-3/2}} \right), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial^2 z} \Big|_{N+1/2} &\approx A_3 w|_{N+1/2} = \frac{1}{z_{N+1} - z_N} \left( \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \Big|_{z_{N+1}} - \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \Big|_{z_{N+0}} \right) = \\ &= \frac{1}{\Delta z_{N+1/2}} \left( \frac{w_{N+3/2} - w_{N+1/2}}{z_{N+3/2} - z_{N+1/2}} - \frac{w_{N+1/2} - w_+}{z_{N+1/2} - z_N} \right). \end{aligned}$$

Подставляя найденные по формулам (9) значения  $w_-$  и  $w_+$ , получаем аппроксимацию второй производной от нормальной компоненты вдоль оси  $z$  на контактной границе:

$$\begin{aligned} A_3 w|_{N-1/2} &= \frac{1}{\Delta z_{N-1/2}} \left\{ \frac{2}{\Delta z_{N-1/2}} \left[ \frac{1}{1 + \varepsilon B} (w_{N-1/2} + B w_{N+1/2}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - B \frac{Q}{1 + \varepsilon B} - w_{N-1/2} \right] - \frac{w_{N-1/2} - w_{N-3/2}}{\Delta z_{N-1}} \right\}; \\ A_3 w|_{N+1/2} &= \frac{1}{\Delta z_{N+1/2}} \left\{ \frac{w_{N+3/2} - w_{N+1/2}}{\Delta z_{N+1}} - \frac{2}{\Delta z_{N+1/2}} [w_{N+1/2} - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon \frac{1}{1 + \varepsilon B} (w_{N-1/2} + B w_{N+1/2}) + \frac{Q}{1 + \varepsilon B}] \right\}, \end{aligned}$$

где  $\Delta z_{N-1} = z_{N-1/2} - z_{N-3/2}$ ;  $\Delta z_{N-1/2} = z_N - z_{N-1}$ ;  $\Delta z_{N+1/2} = z_{N+1} - z_N$ ;  $\Delta z_{N+1} = z_{N+3/2} - z_{N+1/2}$ .

### Тестовые расчеты

**Задача о прохождении излучения через контактную границу.** Для проверки точности расчетов с условиями (4) рассматривается одномерная задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad -\infty < z < \infty, \quad t > 0$$

с начальными данными

$$u(z, t = 0) = \begin{cases} U_1, & -\infty < z < 0; \\ U_2, & 0 < z < \infty \end{cases}$$

и условиями сопряжения в точке разрыва  $z = 0$

$$Q + \varepsilon u(z, t)|_{z=-0} = u(z, t)|_{z=+0}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-0} = \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=+0}.$$

В этой точке терпит разрыв коэффициент  $a$ :

$$a = \begin{cases} a_1, & -\infty < z < 0; \\ a_2, & 0 < z < \infty. \end{cases}$$

Решение задачи ищется в виде [5]

$$u_1(z, t) = \frac{U_1}{2} \left( 1 - \Phi \left( \frac{z}{2a_1\sqrt{t}} \right) \right) + \frac{U_1^*}{2} \left( 1 + \Phi \left( \frac{z}{2a_1\sqrt{t}} \right) \right), \quad -\infty < z < 0;$$

$$u_2(z, t) = \frac{U_2^*}{2} \left( 1 - \Phi \left( \frac{z}{2a_2\sqrt{t}} \right) \right) + \frac{U_2}{2} \left( 1 + \Phi \left( \frac{z}{2a_2\sqrt{t}} \right) \right), \quad 0 < z < \infty.$$

Здесь  $U_1^*, U_2^*$  — константы;  $\Phi \left( \frac{z}{2a\sqrt{t}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2a\sqrt{t}}} e^{-\sigma^2} d\sigma$  — интеграл ошибок. Функции  $u_1(z, t)$  и  $u_2(z, t)$  удовлетворяют уравнению, начальным данным, и с учетом условий сопряжения эти функции можно представить в виде

$$u_1(z, t) = U_0 - \frac{Q}{A + \varepsilon} + \left( U_0 - \frac{Q}{A + \varepsilon} - U_1 \right) \Phi \left( \frac{z}{2a_1\sqrt{t}} \right), \quad -\infty < z < 0;$$

$$u_2(z, t) = \varepsilon U_0 + A \frac{Q}{A + \varepsilon} - \left( \varepsilon U_0 + A \frac{Q}{A + \varepsilon} - U_2 \right) \Phi \left( \frac{z}{2a_2\sqrt{t}} \right), \quad 0 < z < \infty,$$

где

$$A = \frac{a_2}{a_1}; \quad U_0 = \frac{AU_1 + U_2}{A + \varepsilon}.$$

Численный расчет задачи проводился по методике ВЬЮГА с параметрами  $a_1 = 0,846$ ;  $a_2 = 8,46$ ;  $Q(t) = 0$ ;  $\varepsilon = 100$ . Начальные и граничные условия имели вид

$$u|_{t=0} = \begin{cases} U_1 = 0, & Z_{\min} < z < 0; \\ U_2 = 1, & 0 < z < Z_{\max}; \end{cases} \quad u|_{Z_{\min}} = U_1; \quad u|_{Z_{\max}} = U_2.$$

Расчет проведен на равномерной сетке:  $Z_{\min} = -40$ ;  $Z_{\max} = 660$ ;  $N_z = 71$  с шагом  $\Delta t = 1$  до момента времени  $t_0 = 100$ . Параметры выбирались в соответствии с характерной задачей о МГД-ЭМИ.

Результат расчета функции  $u$  как функции  $z$  на момент времени  $t_0$  приведен на рис. 2. Здесь же даны укрупненные изображения поведения функции  $u(z, t_0)$  на участках  $-40 \leq z \leq 0$  и  $0 \leq z \leq 8$ .

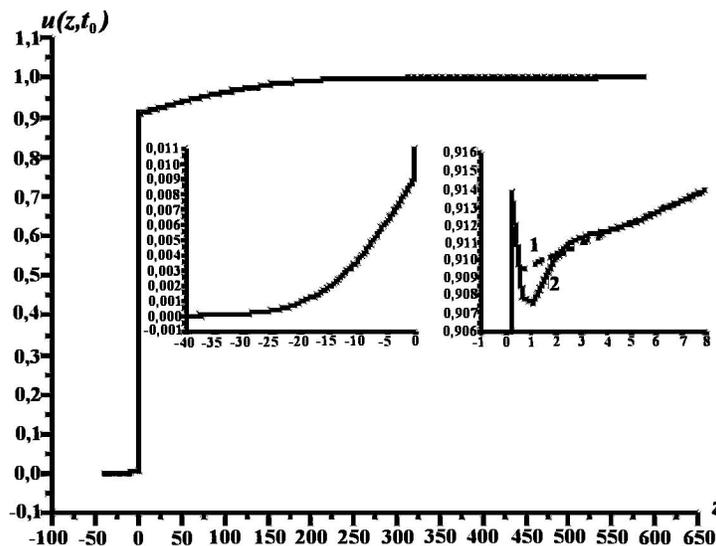


Рис. 2. Функция  $u$  в одномерном модельном расчете: 1 — аналитическое решение; 2 — численное решение

Сравнение результата численного расчета с аналитическим решением показывает максимальное отличие при  $z = 0,2$ , оно не превышает 0,5 %. Такая точность аппроксимации контактной границы является приемлемой при расчете задач о распространении МГД-волн.

**Задача о прохождении излучения через внешнюю границу.** Рассматривается волновое уравнение для электрического поля

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}, \quad 0 < z < Z_0, \quad t > 0$$

с нулевыми начальными условиями

$$E(z, t = 0) = 0; \quad E_t(z, t = 0) = 0$$

и граничным условием при  $z = 0$

$$\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{H}, \quad H = \text{const.}$$

Для постановки условия на внешней границе  $z = Z_0$  предполагается, что приходящая из  $+\infty$  волна равна  $\varphi(t)$ . Для волны, идущей из внутренней области  $0 \leq z < Z_0$ , граница  $z = Z_0$  является прозрачной. Для постановки граничного условия, учитывающего отражение от внутренней области, волновое уравнение заменяется эквивалентной ему парой уравнений первого порядка [6]

$$\frac{\partial r}{\partial t} + c \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{c}{2H} (s(0, t) - r(0, t)); \quad \frac{\partial s}{\partial t} - c \frac{\partial s}{\partial z} = -\frac{c}{2H} (s(0, t) - r(0, t))$$

относительно инвариантов

$$s(z, t) = \int_0^z E_t(\xi, t) d\xi + cE(z, t); \quad r(z, t) = \int_0^z E_t(\xi, t) d\xi - cE(z, t).$$

Решение  $E(z, t)$  является суперпозицией инвариантов:  $E(z, t) = \frac{1}{2c} (s(z + ct) - r(z - ct))$ . Такое представление  $E(z, t)$  при  $z = Z_0$  можно использовать как граничное условие:

$$E(Z_0, t) = \frac{1}{2c} (s(Z_0 + ct) - r(Z_0 - ct)). \quad (10)$$

Поле при  $z = Z_0 + 0$  равно полю на  $\infty$ , т. е.  $\varphi(t)$ , и оно приносится на границу инвариантом  $\frac{1}{2c} s(Z_0 + ct) = \varphi(t)$ . Тогда на границе  $z = Z_0$  из соотношения (10) следует  $E(Z_0, t) = \varphi(t) - \frac{1}{2c} r(Z_0 - ct)$ . Таким образом, при  $z = Z_0$  ставится следующее граничное условие:

$$E(Z_0, t) = \varphi(t) + \frac{1}{2} \left( E(z, t) - \frac{1}{c} \int_0^z E_t(\xi, t) d\xi \right) \Big|_{z=Z_0-ct}.$$

При численных расчетах удобнее поле на границе выразить через значение во внутренней точке. Для этого на фазовой плоскости  $(z, t)$  через точку  $(Z_0, t_0)$  проводится характеристика  $z - ct = \text{const}$  до пересечения с прямой  $t = t_0 - \tau$  в точке  $A(z_A, t_0 - \tau)$ ,  $z_A = Z_0 - c\tau$ , а через точку  $A(z_A, t_0 - \tau)$  — характеристика  $z + ct = \text{const}$  до пересечения с прямой  $z = Z_0$ .

Из соотношений на характеристиках после небольших преобразований получается  $E(Z_0, t_0) = \varphi(t_0) - \varphi(t_0 - 2\tau) + E(z_A, t_0 - \tau)$ . Слагаемые  $-\varphi(t_0 - 2\tau) + E(z_A, t_0 - \tau)$  описывают пропускание внешней границей отраженной волны (учет на границе инварианта  $\frac{1}{2c} r(Z_0 - ct_0)$ ).

Данная задача использовалась при тестировании 3D-программы, для этого в расчете были выбраны следующие параметры ионосферы:

$$-R \leq x, y \leq R; \quad 0 \leq z \leq Z_0; \quad R = 2000 \text{ км}; \quad Z_0 = 450 \text{ км}; \quad c = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi e^2 N_e}} \omega_e \omega_i \approx 286 \text{ км/с}.$$

С использованием интегрального преобразования Лапласа для падающей из  $+\infty$  на границу  $z = Z_0$  волны  $E = (E_x - iE_y)|_{z=Z_0} = \varphi(t) = e^{i\omega t}$  В. И. Селиным получено точное решение исходной задачи

$$E_x - iE_y = E(z, t) = e^{i\omega t_1} \varepsilon(t_1) + \left[ e^{-\frac{c}{H}t_2} + \frac{1 - i\frac{\omega H}{c}}{1 + i\frac{\omega H}{c}} \left( e^{-\frac{c}{H}t_2} - e^{-i\omega t_2} \right) \right] \varepsilon(t_2),$$

$$\text{где } t_1 = t - \frac{Z_0 - z}{c}; \quad t_2 = t - \frac{Z_0 + z}{c}; \quad \varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

При численных расчетах параметры задачи имели значения  $\omega = -10^{-3}\omega_i$ ;  $H = 80$  км. Счетная сетка по переменной  $z$  — равномерная с шагом  $\Delta z = 5$  км, по переменным  $x, y$  — неравномерная с шагами, выбираемыми по геометрической прогрессии с числом точек  $N_x = N_y = 111$  по каждой переменной. Точка наблюдения  $z_n$  выбиралась на расстоянии 250 км от нижней границы. Результаты расчетов для функции  $|E(x=0, y=0, z_n, t)|$  приведены на рис. 3.

В этой задаче граничные условия по переменной  $z$  формулируются на внешней границе  $z = Z_0$ , которую можно интерпретировать как плоский источник для МГД-ЭМИ. Расчет с пропуском полнее учитывает отражение от внутренней области.

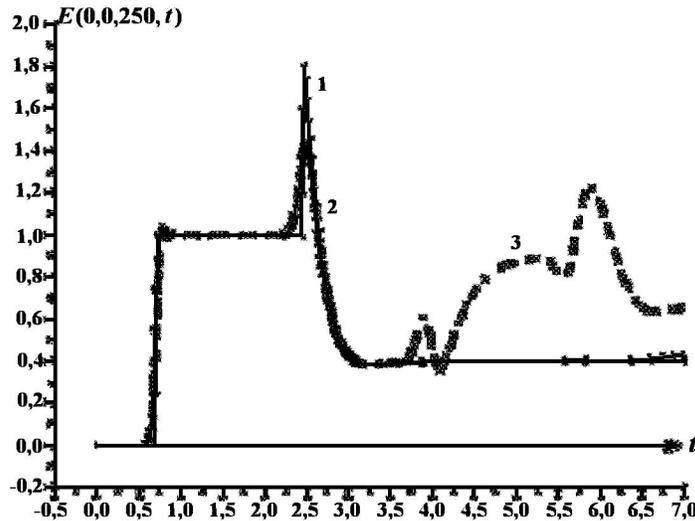


Рис. 3. Функция  $|E(0, 0, 250, t)|$  в расчете для плоской волны: 1 — точное решение; 2 — расчет с учетом пропускания; 3 — расчет без учета пропускания

**Задача о распространении сферической волны в альфеновском слое ионосферы.** Альфеновский слой ионосферы характеризуется волновым распространением медленных МГД-волн с постоянной скоростью  $v_{alf}$ . Для этого слоя задача определения электрического и магнитного полей при разлете сверхпроводящего шара в однородном магнитном поле  $H_0$  имеет аналитическое решение в виде бегущей волны по сферической переменной  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

При задании в декартовых координатах на поверхности сферы  $R_0^2 = x^2 + y^2 + (z - z_0)^2$  граничных условий

$$\vec{E} = f(t) \cdot \{- (z - z_0) \sin \alpha - y \cos \alpha, x \cos \alpha, x \sin \alpha\}, \quad f(t) = 1 - e^{-bt}$$

при  $b = \frac{v_{alf}}{R_0}$  точное решение имеет вид

$$\vec{E} = F(r, \xi) \cdot \{- (z - z_0) \sin \alpha - y \cos \alpha, x \cos \alpha, x \sin \alpha\},$$

где

$$F(r, \xi) = \frac{R_0^2}{r^2} \left\{ \frac{R_0}{r} + \left[ \left( 1 - \frac{R_0}{r} \right) \frac{\xi v_{alf}}{R_0} - \frac{R_0}{r} \right] e^{-\frac{\xi v_{alf}}{R_0}} \right\}; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}; \quad \xi = t - \frac{r - R_0}{v_{alf}}.$$

Численные расчеты по методике ВБЮГА проводились в пространственной области  $-1500 \text{ км} \leq x, y \leq 1500 \text{ км}; -15 \text{ км} \leq z \leq 1500 \text{ км}$  с параметрами ионосферы и грунта:

$$\begin{aligned} m &= 9,1 \cdot 10^{-28} \text{ Г}; & e &= 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЕ}; & c &= 3 \cdot 10^5 \text{ км/с}; & M_i &= 4,3 \cdot 10^{-23} \text{ Г}; & H_0 &= 0,5 \text{ Гс}; \\ 0 < z < 1500 \text{ км}: & N_e &= 10^8 \text{ см}^{-3}; & \nu_{en} &= 280 \text{ с}^{-1}; & \nu_{in} &= 0; & \omega_e &= 10^7 \text{ с}^{-1}; & \omega_i &= 165 \text{ с}^{-1}; & \lambda_e &= 0; \\ -15 \text{ км} < z < 0: & \sigma^- &= 10^9 \text{ с}^{-1}; & \nu_{in} &= 1 \text{ с}^{-1}; & \lambda_i &= \lambda_k = \frac{c^2}{4\pi\sigma^-}; & \lambda_e &= 0. \end{aligned}$$

Альфеновская скорость при таких параметрах равна  $v_{alf} = 21,5 \text{ км/с}$ . Сферический источник радиусом  $R_0 = 50 \text{ км}$  находился на высоте  $z_0 = 800 \text{ км}$ , угол геомагнитного наклона  $\alpha$  равен  $20^\circ$ . Точка наблюдения имела координаты  $A(600, 0, 700)$ . Размеры области распространения волны выбирались так, чтобы за время  $t_{end} = 65 \text{ с}$  отражения от грунта ( $z = 0$ ) и внешних граней параллелепипеда не оказали влияния на поля в точке наблюдения.

Расчетная сетка строилась следующим способом.

По переменной  $z$  вся область разбивалась на два отрезка, соответствующие грунту и ионосфере —  $[-d, 0]$  и  $[0, ZKN]$ ,  $d = 30 \text{ км}$ ,  $ZKN = 1500 \text{ км}$ . В грунте сетка равномерная с числом точек  $NRZ$ , шаг сетки равен  $3 \text{ км}$ . В ионосфере сетка неравномерная с числом точек  $N = N_z - NRZ$ , шаг выбирался по геометрической прогрессии.

По  $x, y$  область разбивалась на отрезки  $[-1500, 0]$  и  $[0, 1500]$ . На отрезке  $[0, 1500]$  сетка неравномерная. В отрицательной области сетка симметричная.

Временной шаг определялся из соотношения Куранта  $Q = \frac{v_{alf} \Delta t}{\min \Delta z}$ .

Проведен расчет с числом точек  $N_x = N_y = 245$ ;  $N_z = 201$ ;  $NRZ = 11$  и  $Q = 1$ .

Результаты расчетов и точные решения приведены на рис. 4–6 в виде графиков для компонент электрического поля  $E_x, E_y, E_z$ . Из этих расчетов видно удовлетворительное согласие по пространственным и временным шагам. Расхождение между кривыми в областях "пика" ( $t \approx 29 \text{ с}$ ) и стационарного режима ( $t \approx 55 \text{ с}$ ) не превышает 9%.

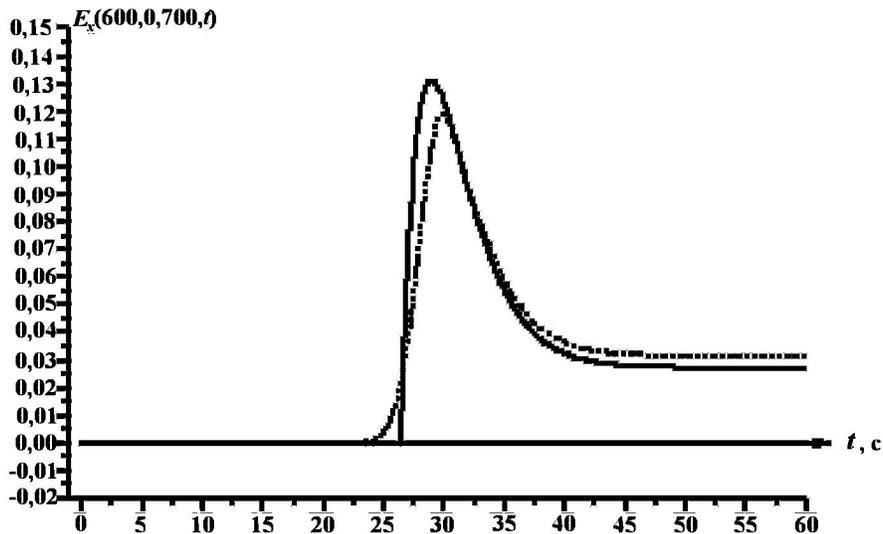


Рис. 4. Сравнение численного решения (---) с точным (—) для поля  $E_x(600, 0, 700, t)$

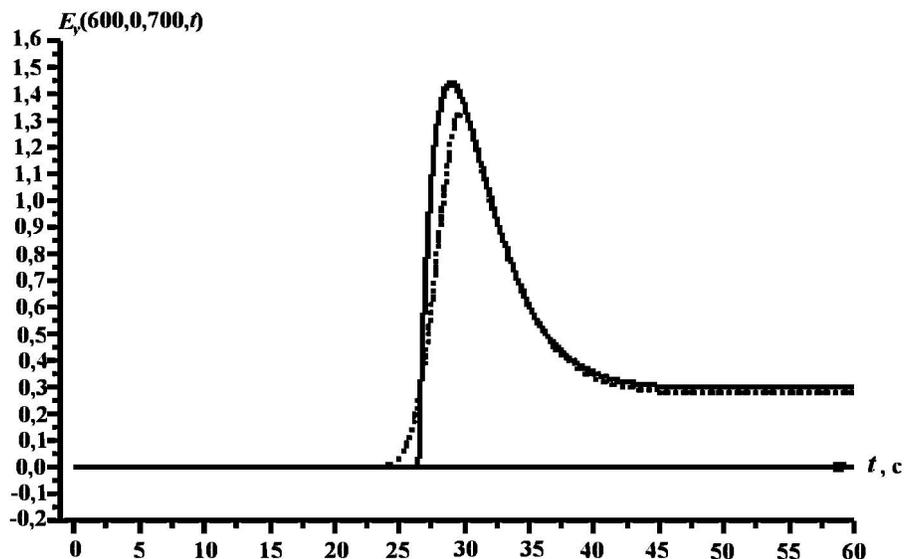


Рис. 5. Сравнение численного решения (- -) с точным (—) для поля  $E_y(600, 0, 700, t)$

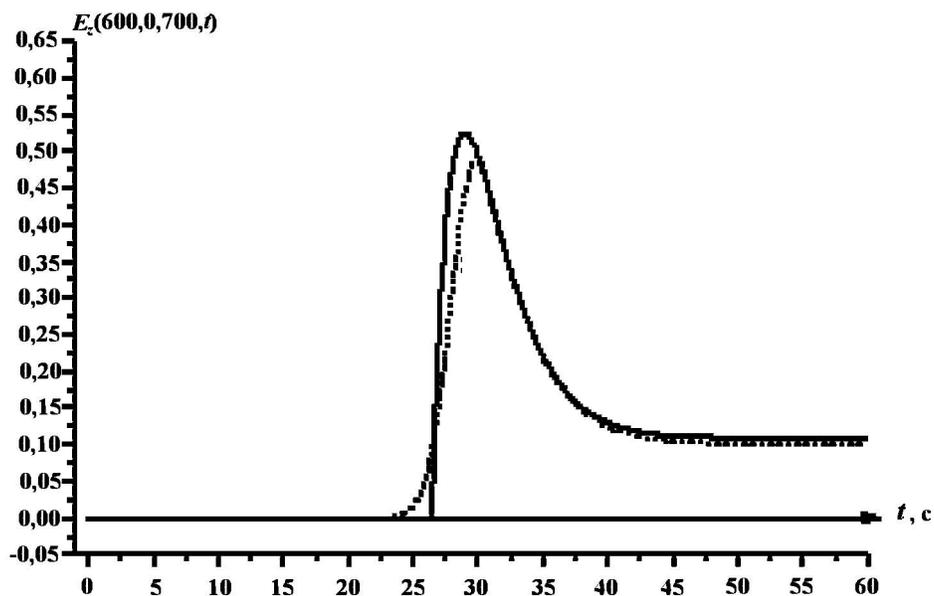


Рис. 6. Сравнение численного решения (- -) с точным (—) для поля  $E_z(600, 0, 700, t)$

### Заключение

Разработанная численная методика ВЬЮГА позволяет численно исследовать в трехмерном пространстве процессы распространения, отражения и проникновения в грунт медленных МГД-волн в широтах с произвольным углом геомагнитного наклона. Проведенные методические расчеты показали приемлемую точность ( $<10\%$ ) на сетках с пространственными шагами  $\sim 5 \div 10$  км.

Авторы благодарны В. И. Селину за предоставленные результаты и полезное обсуждение.

### Список литературы

1. Сорокин В. М., Федорович Г. В. Физика медленных МГД-волн в ионосферной плазме. М.: Энергоиздат, 1982.

2. *Greifinger C., Greifinger Ph.* Transmission of micropulsations through the lower ionosphere // J. of Geophysical Research. 1965. Vol. 70, No. 9. P. 2217–2231.
  3. *Никольский В. В., Никольская Т. И.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989.
  4. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
  5. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980.
  6. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.
-