

УДК 519.6

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ АДАПТИВНОГО ПО УГЛОВЫМ ПЕРЕМЕННЫМ МЕТОДА РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Р. М. Шагалиев, А. В. Алексеев, А. И. Бочков, В. В. Евдокимов,  
Е. А. Иреничев, Н. П. Плетенева, С. В. Суббот  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Рассматриваются результаты численных исследований адаптивного по угловым переменным метода решения двумерного уравнения переноса излучения и взаимодействия излучения со средой. Основной целью адаптивного метода является преодоление *лучевых эффектов*. Уравнение переноса записано в цилиндрической системе координат на неортогональных пространственных сетках. В основу численного решения уравнения переноса положен метод дискретных ординат с аппроксимацией по схемам типа  $DS_n$ . Результаты численных исследований подтверждают действенность адаптивного метода.

### Введение

Данная статья посвящена обзору результатов, полученных в ходе работ по численному исследованию адаптивного по угловым переменным метода решения двумерного уравнения переноса излучения на неортогональных пространственных сетках [1, 2]. Рассматриваемый метод был реализован в тестовой программе TRAST [2, 3], с использованием которой проведен цикл численных исследований на наборе тестовых задач в различной постановке [3]. Некоторые результаты этих исследований представлены в настоящей работе.

Укажем основные моменты процедуры исследований.

Прежде всего на сгущающихся пространственно-угловых сетках определяется сеточное решение, принимаемое в дальнейшем за точное. В качестве результирующей информации во всех задачах используется односторонний поток, выходящий через заданную поверхность, нормированный на площадь поверхности вращения соответствующих ребер пространственных ячеек. Для большей строгости определения введем следующие обозначения:

$P_k = P(r_k, z_k)$ ,  $P_{k+1} = P(r_{k+1}, z_{k+1})$  — координаты вершин ребра пространственной ячейки, через которую выходит результирующий поток;

$P_{k+1/2} = P(r_{k+1/2}, z_{k+1/2})$  — точка, лежащая на этом ребре, с координатами  $r_{k+1/2} = \frac{1}{2}(r_k + r_{k+1})$ ,  
 $z_{k+1/2} = \frac{1}{2}(z_k + z_{k+1})$ ;  $|\Delta r_{k+1/2}| = |r_k - r_{k+1}|$ ,  $|\Delta z_{k+1/2}| = |z_k - z_{k+1}|$ ;

$\theta_{k+1/2} = \arctg\left(\frac{r_{k+1/2}}{z_{k+1/2}}\right)$  — угол между прямой, проведенной из точки начала координат  $P_0 = P(0, 0)$  в точку положения частицы  $P_{k+1/2}$ , и осью  $Oz$ ;

$S_{k+1/2}$  — площадь боковой поверхности, образованной вращением рассматриваемого ребра ячейки вокруг оси  $Oz$ .

При введенных обозначениях в качестве результата принимается зависимость от пространственных координат величины  $\varepsilon^{(+1)}(r, z)$ , являющейся односторонним потоком в направлении внешней границы, отнесенным к площади поверхности ячейки  $S_{k+1/2}$ :

$$\varepsilon_{k+1/2}^{(+1)}(r, z) = \frac{1}{S_{k+1/2}} \iint_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} \varepsilon(r_{k+1/2}, z_{k+1/2}, \mu, \varphi) r_{k+1/2} \left( \mu \Delta r_{k+1/2} - \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi \Delta z_{k+1/2} \right) d\mu d\varphi. \quad (1)$$

В дальнейшем эту величину для краткости будем называть интенсивностью потока.

Далее расчеты проводятся с использованием адаптивности, причем максимальный уровень адаптивности соответствует по количеству направлений *точному* расчету. Полученные результаты сравниваются с точки зрения достигнутой точности и времени счета. В частности, вычисляется среднеквадратичное отклонение интенсивности потока излучения:

$$E = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{f_i - \tilde{f}_i}{f_i} \right)^2} \cdot 100 \%,$$

где  $f_i$  — точное решение в точке  $i$ ;  $\tilde{f}_i$  — решение, полученное с применением адаптивности.

Кроме этих величин, для большинства задач приводится пространственное распределение температуры вещества на те или иные моменты времени. Для анализа степени использования адаптивного измельчения также приводится пространственное распределение полного числа интервалов по угловой переменной  $\mu$ .

Отметим, что работы, результаты которых представлены в настоящей статье, были выполнены в рамках контракта В526462 с Ливерморской национальной лабораторией (LLNL) США.

## 1. Сферическая тестовая задача

Постановка данной задачи предложена Ливерморской национальной лабораторией.

Рассматривается система, состоящая из четырех концентрических областей  $V1, V2, V3, V4$  с различными физическими параметрами. Геометрия системы показана на рис 1. Скорость задана:  $c = 1$ .

Были заданы следующие параметры физических областей:

- область  $V1$ :  $\chi_a = 10\,000$ ;  $\chi_s = 0$ ;
- область  $V2$ :  $\chi_a = 0$ ;  $\chi_s = 0$ ;
- область  $V3$ :  $\chi_a = 10\,000$ ;  $\chi_s = 0$ ;  $Q = 1$  (источник);
- область  $V4$ :  $\chi_a = 0,2$ ;  $\chi_s = 0$ .

Здесь  $\chi_a, \chi_s$  — соответственно сечения поглощения и рассеяния.

*Пространственная сетка.* По переменной  $z$  (для полусферы) задавалось 60 интервалов, по радиусу  $r$  — 420 интервалов, причем разбиение по физическим областям было следующее:  $V1$  — 10;  $V2$  — 10;  $V3$  — 300;  $V4$  — 100 интервалов.

*Выдаваемая информация.* Ниже рассматриваются результаты расчетов сферической задачи с использованием различных вариантов градиентного и трехточечного критериев, обозначенных здесь и далее соответственно как  $crit\_a$  и  $crit\_b$  [1]. Номер в обозначениях соответствует различным сочетаниям элементарных критериев, используемым в расчете.

При решении сферической задачи определение уровня адаптивности при разбиении угловых интервалов происходило согласно следующим критериям:

- для первой серии расчетов —  $crit\_b\_12$ ,  $crit\_b\_15$ ,  $crit\_b\_16$ ,  $crit\_b\_195$ ;
- для второй серии расчетов —  $crit\_a\_0$ ,  $crit\_a\_8$ .

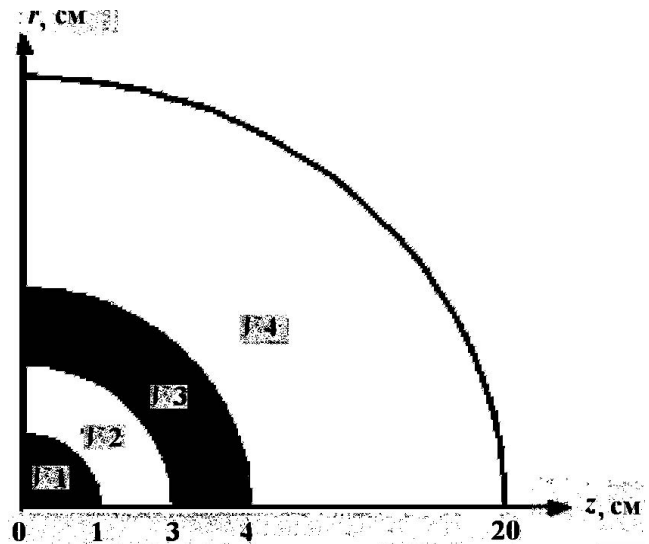


Рис. 1. Геометрия сферической задачи

За опорную сетку принималась угловая сетка с  $N_\mu = 8$  (число интервалов по  $\mu$ ). Максимальный уровень адаптивности задавался равным 3, т. е. адаптивная сетка строилась увеличением числа интервалов опорной сетки по  $\mu$  не более чем в 8 раз. Использовалась классическая стратегия [2] действия критериев адаптивности. Полученные результаты сравнивались с результатами расчетов без адаптивности с числом интервалов  $N_\mu = 32$  и  $N_\mu = 64$ .

Во всех расчетах сферической задачи выдается распределение интенсивности выходящего потока для  $r = 20$  см. На рис. 2 приведены результаты для первой серии расчетов, на рис. 3 — для второй серии расчетов. Отметим, что для удобства отображения диапазон значений по оси ординат на рис. 3 больше, чем на рис. 2.

В табл. 1 представлено среднеквадратичное отклонение  $E$  интенсивности потока излучения для всех используемых вариантов критериев от решения для  $N_\mu = 64$ , которое принималось за точное. Также в табл. 1 приведено ускорение времени счета по сравнению с расчетом для  $N_\mu = 64$  без адаптивности.

Наиболее точное решение позволили получить критерии  $crit\_b\_15$ ,  $crit\_b\_16$  и особенно  $crit\_b\_195$ . С точки зрения времени счета предпочтительным является применение критерия

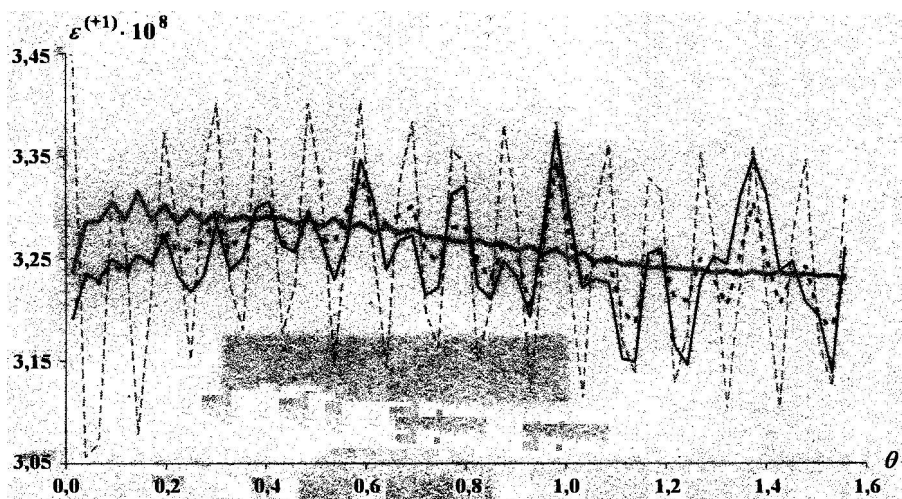


Рис. 2. Зависимость величины  $\varepsilon^{(+1)}(\theta)$  при  $r = 20$  для первой серии расчетов: ---  $N_\mu = 32$ ; — —  $N_\mu = 64$ ; — · —  $crit\_b\_15$ ; - - -  $crit\_b\_195$

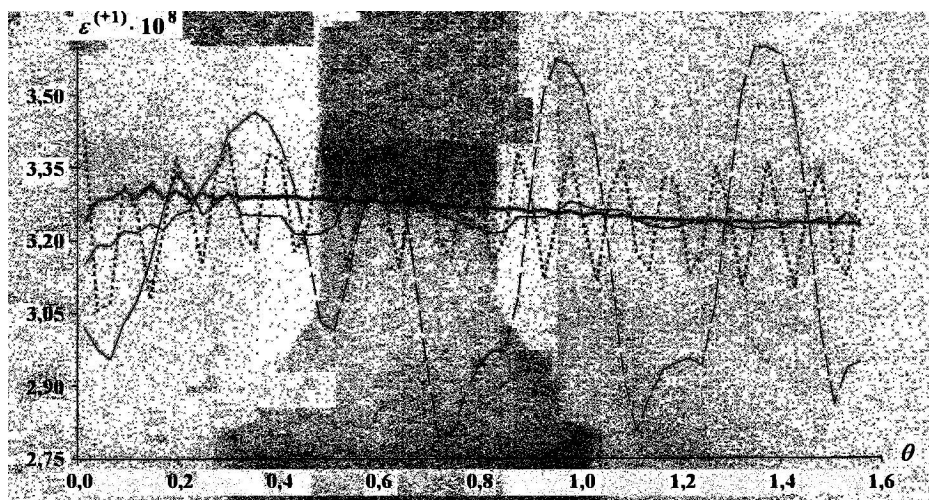


Рис. 3. Зависимость величины  $\varepsilon^{(+1)}(\theta)$  при  $r = 20$  для второй серии расчетов: ---  $N_\mu = 32$ ; — —  $N_\mu = 64$ ; — · —  $crit\_a\_0$ ; - - -  $crit\_a\_8$

Таблица 1

Ускорение времени счета и среднеквадратичное отклонение интенсивности потока излучения для разных вариантов критериев

Вариант расчета	$N_\mu = 64$	$N_\mu = 32$	<i>crit_a_0</i>	<i>crit_a_8</i>	<i>crit_b_12</i>	<i>crit_b_15</i>	<i>crit_b_16</i>	<i>crit_b_195</i>
$E, \%$	0	3,19	2,66	7,34	1,67	1,56	1,62	0,99
Ускорение	1,00	1,97	2,36	3,08	3,62	3,89	3,90	3,98

*crit\_b\_195*. По сравнению с расчетом для  $N_\mu = 32$  время расчета с критерием *crit\_b\_195* сократилось в 2 раза, по сравнению с расчетом для  $N_\mu = 64$  — в 3,98 раза.

На рис. 4 в качестве иллюстрации приводится пространственное распределение в ячейках суммарного числа всех интервалов по переменной  $\mu$  (это характеризует уровень адаптивности), определенное с помощью разных критериев. Видно, что при разных вариантах критериев уровень адаптивности в пространственных ячейках устанавливается по-разному.

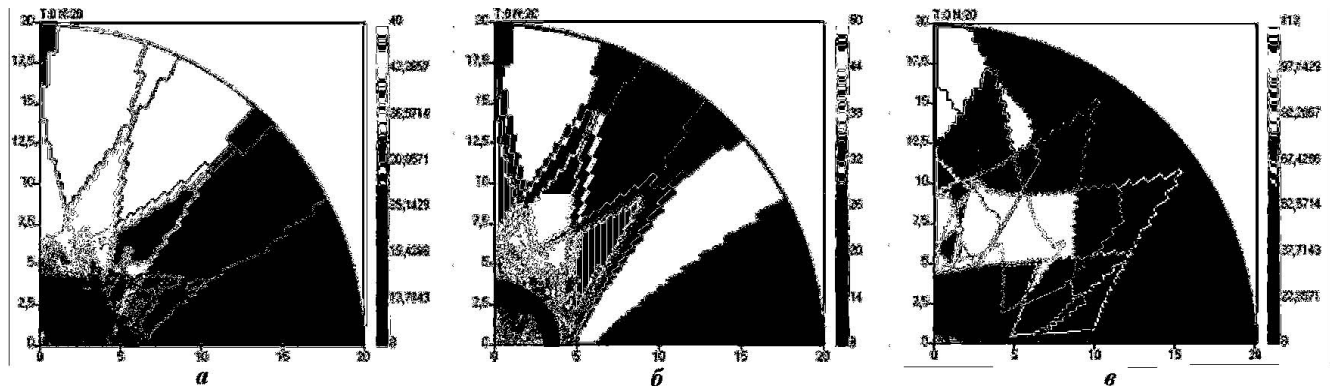


Рис. 4. Полное число направлений для критериев: а — *crit\_b\_12*; б — *crit\_b\_195*; в — *crit\_a\_0*

## 2. Тестовая задача с трубой

Рассматривается цилиндрический слой, состоящий из двух физических областей с различными оптическими свойствами среды (рис. 5). Длина цилиндра  $z = 10$  см.

В нижней (прозрачной) области задаются следующие параметры: координаты  $0 \leq z \leq 10$ ;  $0 \leq r \leq 1$ ; плотность вещества  $\rho = 0,00001$ ; сечение поглощения  $\chi_a = 0$ ; сечение рассеяние  $\chi_s = \rho/5$ .

В верхней области — следующие параметры:  $0 \leq z \leq 10$ ;  $1 \leq r \leq 1,2$ ; плотность вещества  $\rho = 1$ ; сечение поглощения  $\chi_a = A/T^3$ ; рассеяние отсутствует ( $\chi_s = 0$ ).

В расчетах рассматривались две постановки:

- 1) верхняя плотная физическая область не задается, рассматривается только прозрачная область ( $0 \leq r \leq 1$ ). Условно назовем эту задачу *Труба без плотной области*;

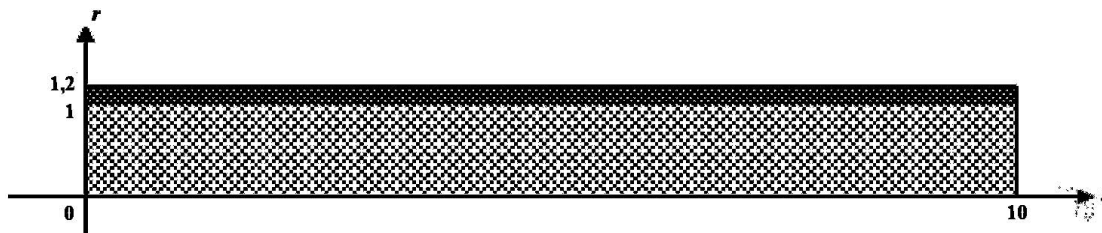


Рис. 5. Геометрия задачи с трубой

2) верхняя физическая область задается более плотной, с указанными выше параметрами. Эта постановка называется *Труба с плотной областью*.

В обеих постановках задачи на поверхности  $z = 0$ ,  $0 \leq r \leq 1$  задается входящий изотропный поток излучения, соответствующий температуре  $T = 1$ . На поверхности  $z = 10$ ,  $0 \leq r \leq 1$  задано граничное условие *свободной поверхности* (входящий поток, равный 0). На внешних поверхностях второй области задано граничное условие *зеркального отражения*.

Зависимость энергии от температуры задается формулой  $E = 0,81T$ . Начальная энергия соответствует температуре 0,0001. Начальная интенсивность  $\varepsilon(t, z, r, \mu, \varphi)|_{t=0} = 0$ .

Ниже приводятся результаты численных исследований, полученные для обоих вариантов данной задачи.

**2.1. Труба без плотной области.** При проведении расчетов была выбрана ортогональная пространственная сетка, содержащая 25 строк и 50 столбцов.

Угловые сетки строились путем разбиения интервала изменения угловой переменной  $0 \leq \varphi \leq \pi$  на 16 равных интервалов, а интервала изменения угловой переменной  $-1 \leq \mu \leq 1$  — равномерно по  $\mu$ . За опорную принималась угловая сетка с  $N_\mu = 6$  (число интервалов по  $\mu$ ). Максимальный уровень адаптивности задавался равным 4 (разбиение на 16 интервалов). Полученные результаты сравнивались с результатами расчета без адаптивности с числом интервалов  $N_\mu = 96$ .

Для сравнения на рис. 6 приводится пространственное распределение температуры излучения, полученное в расчетах с грубой угловой сеткой,  $N_\mu = 6$ , и с достаточно подробной,  $N_\mu = 96$ . Хорошо заметно относительное занижение решения у оси  $z$  при расчете на грубой угловой сетке, возникающее из-за недостаточного числа направлений полета частиц вдоль оси  $z$ .

Для анализа результатов рассмотрим рис. 7, а, б, на которых сравниваются интенсивности выходящих потоков (в направлении от источника) соответственно через линии  $z = 2$  см и  $z = 1$  см. В расчете с 6 интервалами (см. рис. 7) наблюдается значительное занижение решения на оси, обусловленное, очевидно, недостаточностью числа угловых интервалов по  $\mu$  в этой зоне, причем усиливается оно по мере удаления от источника вправо. Из рис. 7, а следует, что в расчете с применением адаптивности результаты близки (критерии *crit\_a\_6* и *crit\_b\_15*) или практически совпадают (критерии *crit\_a\_7* и *crit\_a\_8*) с результатами контрольного расчета с  $N_\mu = 96$ . При этом в части системы, расположенной ближе к источнику (линия  $z = 1$  см), ситуация несколько иная (см. рис. 7, б). В то время как результаты для критериев *crit\_a\_7* и *crit\_a\_8* по-прежнему практически совпадают с результатами контрольного расчета с  $N_\mu = 96$ , применение критерия *crit\_a\_6* дает заметно отличающееся решение, а критерия *crit\_b\_15* — незначительное отличие.

В табл. 2 для всех вариантов градиентного и трехточечного критериев представлены ускорение времени счета и среднеквадратичное отклонение  $E$  интенсивности потока от решения для  $N_\mu = 96$ , которое принималось за точное. При этом анализировалось решение вдоль координат  $z = 2$  см и  $z = 1$  см.

Оценивая полученную в данной задаче точность решения, можно заметить, что применение критерия *crit\_a\_6* дает самую большую погрешность в решении, критерии *crit\_a\_7* и *crit\_a\_8* дают решения, практически совпадающие между собой и с контрольным решением, а решение, полученное с применением критерия *crit\_b\_15*, незначительно отличается от контрольного.

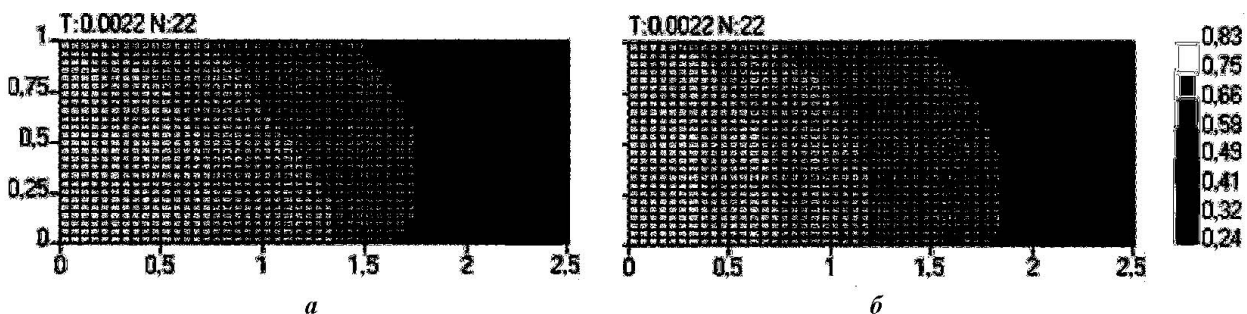


Рис. 6. Пространственное распределение температуры излучения: а —  $N_\mu = 6$ ; б —  $N_\mu = 96$

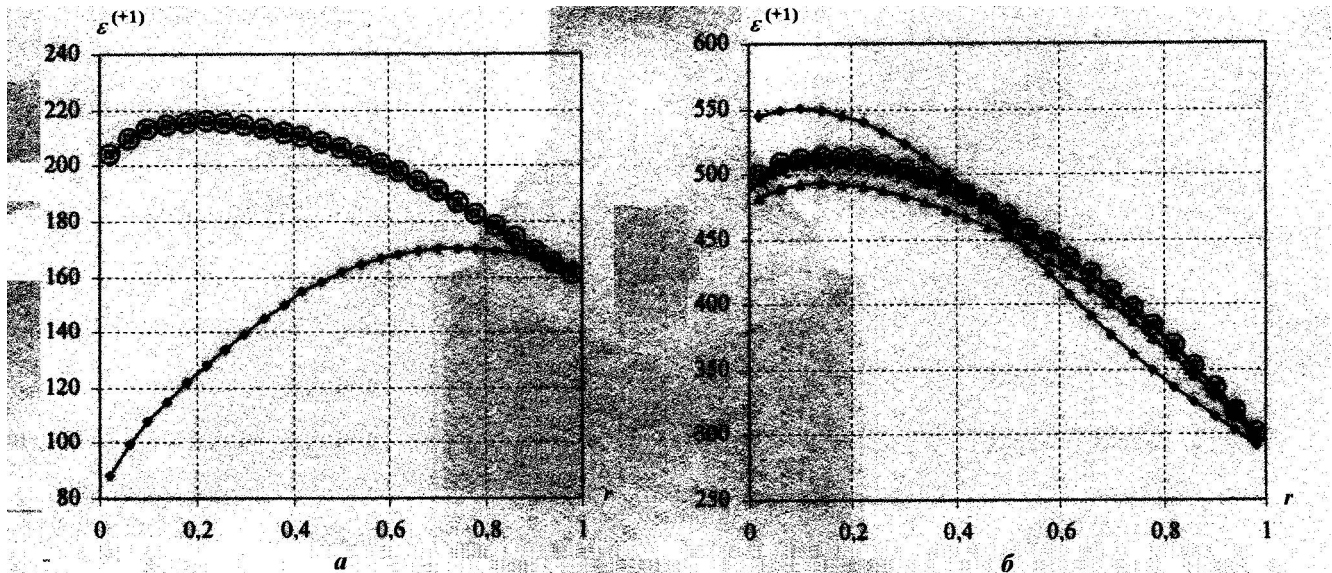


Рис. 7. Интенсивность выходящего потока излучения вдоль линий: *a* —  $z = 2$  см;  $\blacklozenge$  —  $N_\mu = 6$ ;  $\square$  —  $N_\mu = 96$ ;  $---$   $crit\_a\_6$ ;  $\circ$  —  $crit\_a\_7$ ;  $---$   $crit\_a\_8$ ;  $---$   $crit\_b\_15$ ; *b* —  $z = 1$  см;  $\blacklozenge$  —  $N_\mu = 6$ ;  $\square$  —  $N_\mu = 96$ ;  $-\triangle$  —  $crit\_a\_6$ ;  $\circ$  —  $crit\_a\_7$ ;  $---$   $crit\_a\_8$ ;  $\times$  —  $crit\_b\_15$

Таблица 2

### Эффективность критериев

Вариант расчета	Ускорение	Среднеквадратичное отклонение $E, \%$	
		$z = 2$ см	$z = 1$ см
$N_\mu = 96$	1	—	—
$N_\mu = 6$	20	29,5	6,2
$crit\_a\_6$	2,4	0,57	3,2
$crit\_a\_7$	3,6	$0,1 \cdot 10^{-7}$	0,047
$crit\_a\_8$	2	$0,1 \cdot 10^{-7}$	0,006
$crit\_b\_15$	2,8	0,15	0,62

**2.2. Труба с плотной областью.** Пространственная сетка в этом варианте задачи с трубой совпадает с сеткой в предыдущем варианте.

Результирующей величиной является интенсивность выходящего потока ( $\varepsilon^+$ ) вдоль границ  $r = 1,0$  в направлении снизу вверх и  $z = 2,0$  в направлении слева направо на момент времени  $t = 0,001$ .

В качестве опорной угловой сетки используется равномерная сетка, содержащая 8 интервалов по угловым переменным  $\mu$  и  $\varphi$ . Максимальный уровень адаптивности в расчетах равнялся 3, т. е. адаптивная сетка получалась увеличением числа интервалов опорной сетки по  $\mu$  не более чем в 8 раз.

На рис. 8 представлены графики интенсивности выходящего потока для вариантов градиентного критерия, на рис. 9 — трехточечного критерия.

В табл. 3 приведено время (за единицу измерения принято время расчета с  $N_\mu = 64$ ), ускорение счета (относительно расчета с  $N_\mu = 64$ ) и среднеквадратичное отклонение  $E$  плотности потока вдоль границ для всех вариантов критериев. В таблице также приведены данные для расчета, в котором в геометрической подобласти под плотной областью в тех интервалах по  $\mu$ , где  $\mu > 0$ , адаптивная сетка "навязывается" в начале расчета и не меняется со временем (этот расчет обозначен 8(3)\*\*).

Анализируя данные, представленные на графиках и в таблицах, можно сделать вывод, что критерии  $crit\_b\_15$  и  $crit\_b\_16$  позволяют получить наиболее точное решение и вместе с тем заметно сократить время расчета.

В заключение приведем в качестве результата работы критерия  $crit\_b\_15$  пространственное распределение общего числа интервалов по угловой переменной  $\mu$  (рис. 10).

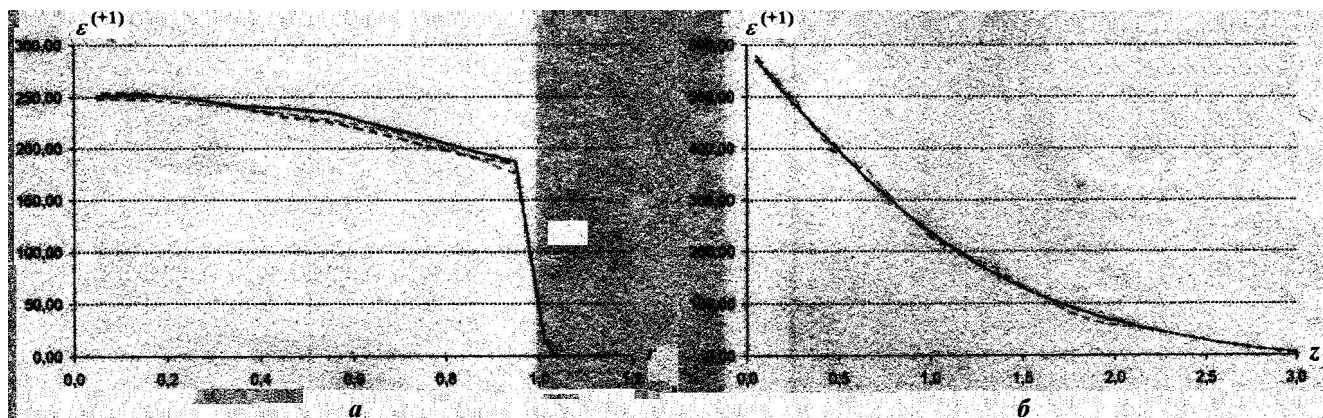


Рис. 8. Распределение интенсивности выходящего потока вдоль линий  $r = 1,0$  (а) и  $z = 2,0$  (б) при различных вариантах градиентного критерия: — —  $N_\mu = 64$ ; - - -  $crit\_a\_0$ ; - · - ·  $crit\_a\_6$

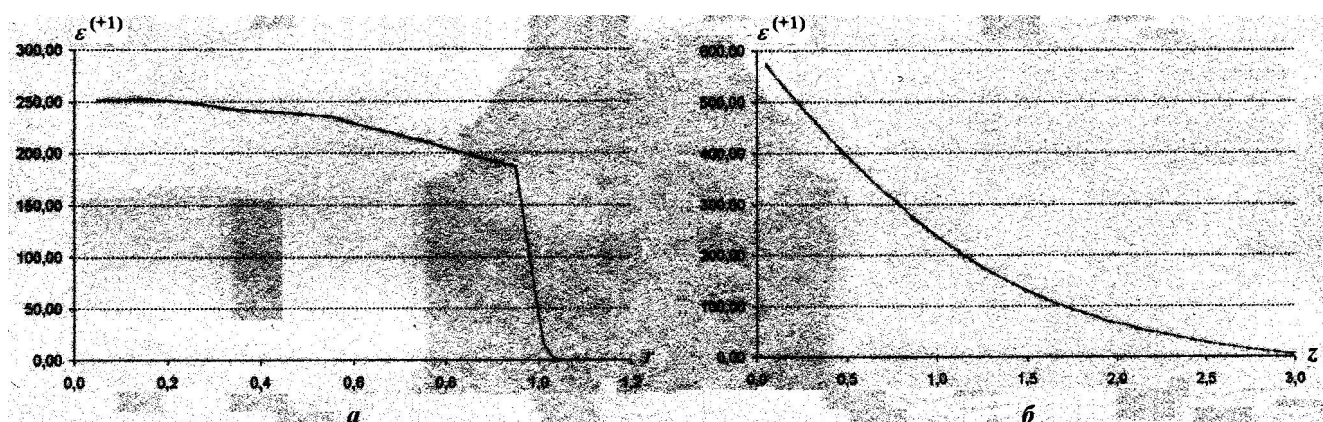


Рис. 9. Распределение интенсивности выходящего потока вдоль линий  $r = 1,0$  (а) и  $z = 2,0$  (б) при различных вариантах трехточечного критерия: — —  $N_\mu = 64$ ; - - -  $crit\_b\_15$ ; - · - ·  $crit\_b\_16$

Таблица 3

Время, ускорение и среднеквадратичное отклонение  $E$  (%)

Вариант расчета	$crit\_a\_0$	$crit\_a\_6$	$crit\_a\_7$	$crit\_a\_8$	$crit\_b\_0$	$crit\_b\_1$	$crit\_b\_12$	$crit\_b\_15$	$crit\_b\_16$	8(3)**
Время	0,28	0,17	0,17	0,17	0,18	0,19	0,20	0,19	0,19	0,36
Ускорение	3,62	6,00	6,00	6,06	5,43	5,30	4,92	5,24	5,27	2,79
$\varepsilon^+(r)$	2,56	2,74	0,24	0,66	1,53	1,34	1,29	0,24	0,23	0,29
$\varepsilon^+(z)$	1,82	5,81	2,39	1,96	1,28	1,21	1,21	0,53	0,54	0,22

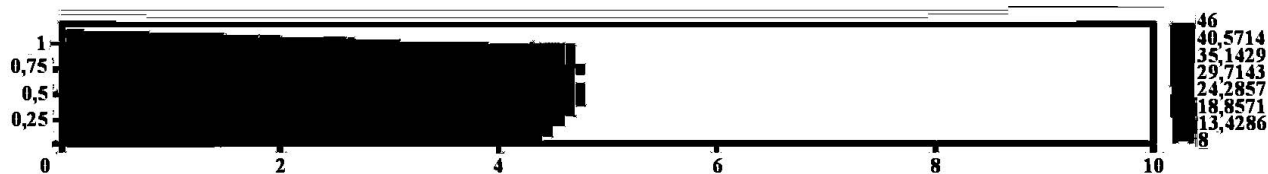


Рис. 10. Общее число интервалов по угловой переменной  $\mu$

### 3. Тестовая задача со щелью

В основе постановки данного теста лежит модификация известной трехобластной тестовой задачи Флека [4]. А именно, предлагаемая ниже задача (рис. 11) отличается введением щели (область IV), соединяющей две прозрачные области, и размерами областей. Кроме того, данная задача решается в одногрупповом приближении *серой материи*.

Рассматривается система  $\{0 \leq z \leq 0,25 \text{ см}; 0,1 \text{ см} \leq r \leq 4,1 \text{ см}\}$ , состоящая из пяти физических областей и удаленная от оси вращения на расстояние  $r = 0,1 \text{ см}$  (см. рис. 11). На внутренней поверхности системы  $r = 0,1 \text{ см}$  задан входящий односторонний поток энергии излучения, распределенный по телесному углу изотропным образом и соответствующий температуре  $T = 1$ . На внешней поверхности  $r = 1,5 \text{ см}$  входящий поток энергии излучения равен нулю. На боковых поверхностях  $z = 0$  и  $z = 0,25 \text{ см}$  задано условие зеркального отражения.

Плотность вещества в системе  $\rho = 1$ . Зависимость энергии вещества от температуры задается уравнением  $E = C_V T$ , где  $C_V = 0,81$ .

При выполнении расчетов учитывается процесс поглощения фотонов, причем сечение поглощения фотонов задано формулой  $\chi_a = A/T^3$ . С помощью различных значений коэффициента  $A$  в системе задаются две оптически плотные и три оптически прозрачные области, размеры и местоположение которых определяются следующим образом:

- область I:  $0,1 \text{ см} \leq r \leq 0,9 \text{ см}; 0 \leq z \leq 0,2 \text{ см};$
- область II:  $0,9 \text{ см} \leq r \leq 1,1 \text{ см}; 0 \leq z \leq 0,08 \text{ см};$
- область III:  $0,9 \text{ см} \leq r \leq 1,1 \text{ см}; 0,08 \text{ см} \leq z \leq 0,12 \text{ см};$
- область IV:  $0,9 \text{ см} \leq r \leq 1,1 \text{ см}; 0,12 \leq z \leq 0,2 \text{ см};$
- область V:  $1,1 \text{ см} \leq r \leq 1,5 \text{ см}; 0 \leq z \leq 0,2 \text{ см}.$

В областях I, IV, V (оптически прозрачных)  $A = 0,1374$ . В областях II, III (оптически плотных)  $A = 50,89$ . Сечение рассеяния в расчетах принималось равным нулю ( $\chi_s = 0$ ).

Разностная сетка по пространственным переменным была выбрана следующим образом: по переменной  $z$  — 20 интервалов; по  $r$  — 46 интервалов. При этом разбиение по физическим областям было следующее: в области I — 20 строк, в областях II, III, IV — 16, в области V — 10.

Методом установления определялось стационарное решение. Шаг по времени в расчетах брался равным  $DT = 0,0001$ . Расчет проводился до момента времени  $t = 0,06$ .

В качестве результирующей информации используется интенсивность выходящего потока  $\varepsilon^{(+1)}$  через внешнюю границу системы при  $r = 1,5$ .

На рис. 12 приведены иллюстрации, демонстрирующие распределение температуры вещества при расчете данной задачи на различных шагах по времени ( $N$  — номер шага).

В расчетах использовалась угловая сетка с равномерным разбиением по углу  $\mu$  и по углу  $\varphi$ . В качестве опорной угловой сетки использовалась следующая квадратура: 8 интервалов по угловой переменной  $\mu$  ( $N_\mu = 8$ ) и 16 интервалов по переменной  $\varphi$  ( $N_\varphi = 16$ ). В качестве точного решения принимался расчет с  $N_\mu = 128$ . При исследовании критериев максимальный уровень адаптивности задавался равным 3.

На рис. 13 представлены результаты расчетов с использованием различных вариантов градиентного критерия.

Поскольку расчеты проводились с максимально возможным уровнем адаптивности, решение, полученное с использованием адаптивности, должно приближаться к расчету с  $N_\mu = 64$ .

В табл. 4 приведены время (за единицу измерения принято время расчета с  $N_\mu = 64$ ), ускорение счета, а также среднеквадратичное отклонение ( $E$ ) интенсивности потока для всех рассмотренных

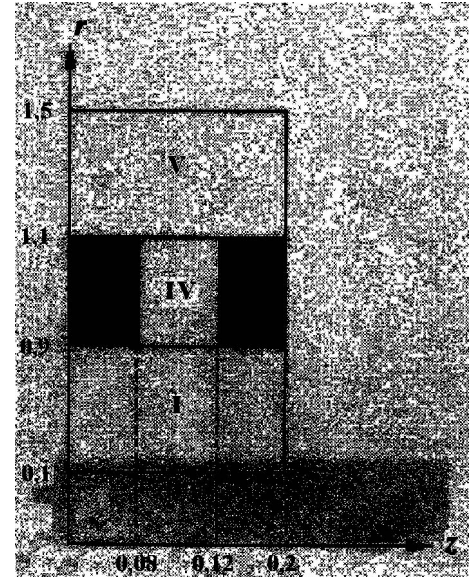


Рис. 11. Геометрия задачи со щелью



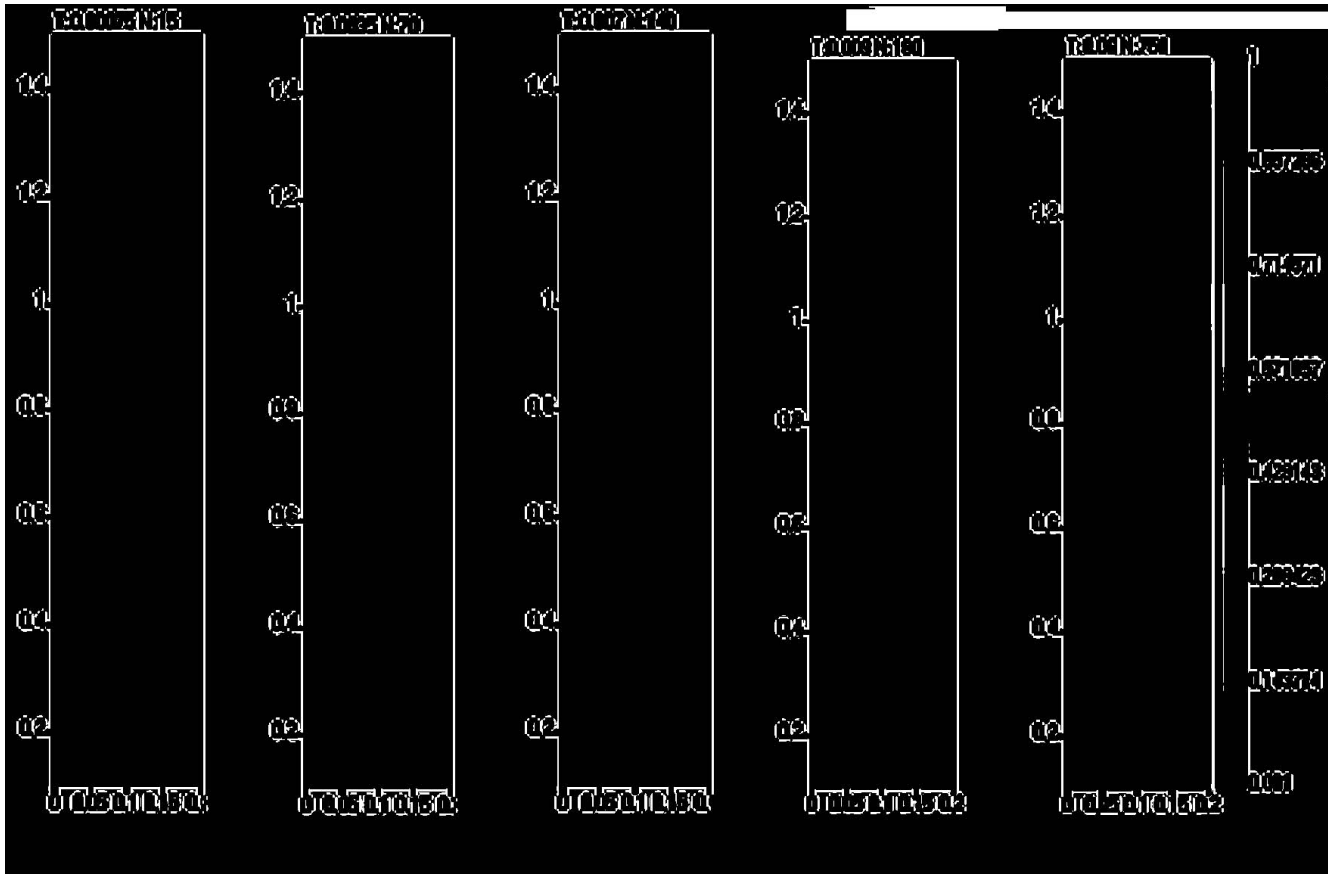


Рис. 12. Температура излучения для задачи со щелью для разных шагов по времени:  $a - N = 15$ ;  $b - N = 60$ ;  $c - N = 100$ ;  $z - N = 120$ ;  $d - N = 600$

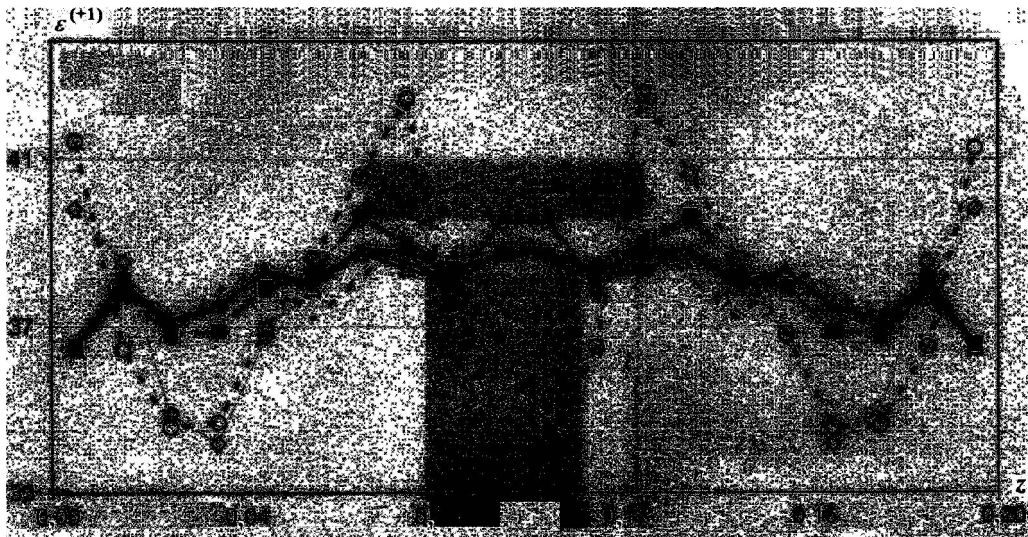


Рис. 13. Интенсивность потока  $\varepsilon^{(+1)}$  через поверхность системы при  $r = 1,5$ :  $---$   $N_\mu = 32$ ;  $---$   $N_\mu = 64$ ;  $---$   $N_\mu = 128$ ;  $\triangle$  —  $crit\_a\_6(1)$ ;  $\blacksquare$  —  $crit\_a\_6$ ;  $-\diamond-$  —  $crit\_a\_7$ ;  $\circ$  —  $crit\_a\_8$

вариантов градиентного критерия относительно расчета с  $N_\mu = 64$ . Из таблицы видно, что результат при использовании критерия  $crit\_a\_8$ , несмотря на выигрыш по времени, слишком далек от точного решения. Немного лучше использование критерия  $crit\_a\_7$ , но он явно уступает по точности критериям  $crit\_a\_6(1)$  и  $crit\_a\_6$ .

Таблица 4

Время, ускорение и среднеквадратичное отклонение  $E$  (%) для вариантов градиентного критерия

Вариант расчета	$crit\_a\_6(1)$	$crit\_a\_6$	$crit\_a\_7$	$crit\_a\_8$	$N_\mu = 32$	$N_\mu = 64$
Время	0,547	0,679	0,5349	0,252	0,456	1
Ускорение	1,826	1,473	1,871	3,961	2,19	1
$E$	0,271	1,177	5,355	8,083	1,99	0

Далее рассмотрим результаты расчетов с использованием различных вариантов трехточечного критерия  $crit\_b$ . Максимальный уровень адаптивности задавался равным 4, т. е. адаптивная сетка строилась увеличением числа интервалов опорной сетки с  $N_\mu = 8$  не более чем в 16 раз.

В табл. 5 приведено время (за единицу измерения принято время расчета с  $N_\mu = 128$ ), ускорение счета и среднеквадратичное отклонение ( $E$ ) интенсивности потока вдоль границ для всех вышерассмотренных вариантов трехточечного критерия относительно расчета с  $N_\mu = 128$ .

На рис. 14 представлены графики интенсивности потока в направлении снизу вверх для трехточечного критерия.

Анализируя данные, представленные на графиках и в таблицах, можно сделать вывод, что критерий  $crit\_b\_15$  позволил получить наиболее точное решение, достаточно близкое к расчету с  $N_\mu = 64$ . При этом время расчета с критерием  $crit\_b\_15$  относительно расчета с  $N_\mu = 128$  сократилось в 3 раза, а относительно расчета с  $N_\mu = 64$  — в 1,5 раза.

В заключение как результат работы алгоритма приведем общее число интервалов по угловой переменной  $\mu$  в некоторые моменты времени (рис. 15).

Таблица 5

Время, ускорение и среднеквадратичное отклонение  $E$  (%) для вариантов трехточечного критерия

Вариант расчета	$N_\mu = 32$	$N_\mu = 64$	$crit\_b\_0$	$crit\_b\_1$	$crit\_b\_12$	$crit\_b\_15$	$crit\_b\_16$
Время	0,27	0,50	0,16	0,18	0,21	0,33	0,30
Ускорение	3,75	2,01	6,41	5,64	4,66	3,02	3,33
$E$	1,85	0,65	2,15	1,06	2,40	0,68	0,85

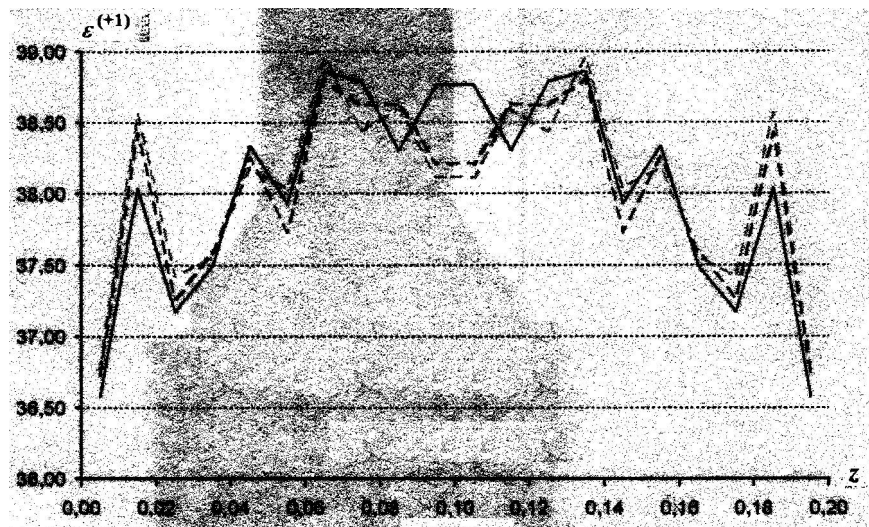


Рис. 14. Распределение интенсивности потока в направлении снизу вверх при вариантах трехточечного критерия: — —  $N_\mu = 128$ ; - - -  $crit\_b\_15$ ; - · - ·  $crit\_b\_16$

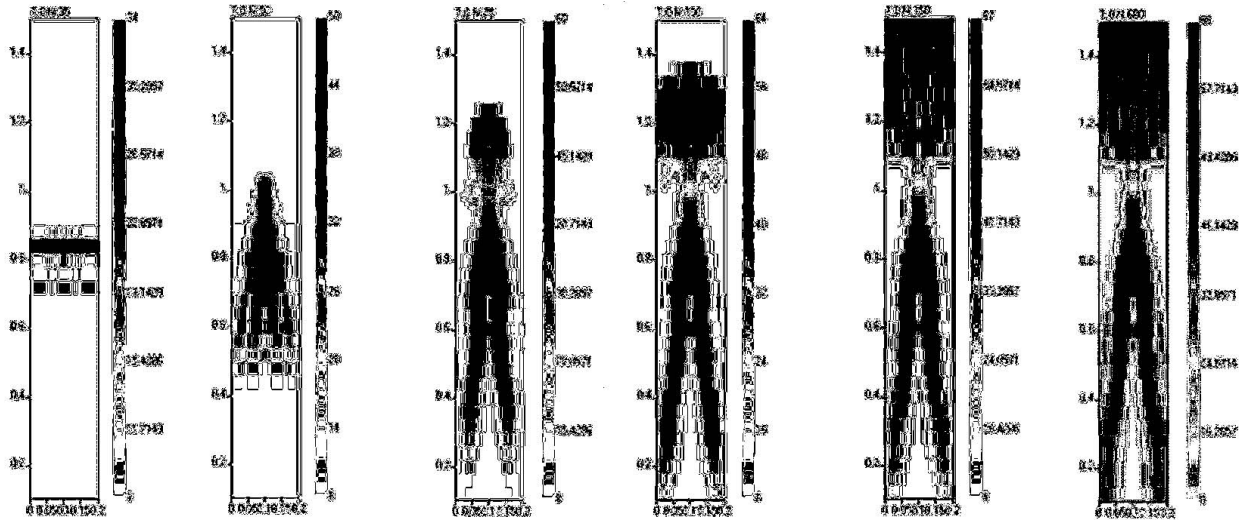


Рис. 15. Общее число интервалов по угловой переменной  $\mu$  на различные моменты времени

### Заключение

В ходе исследований с применением адаптивного алгоритма было проведено множество расчетов тестовых задач с использованием прямоугольных и криволинейных пространственных сеток.

Численные исследования показали действенность рассматриваемого адаптивного метода решения двумерного уравнения переноса излучения на неортогональных пространственных сетках. В большинстве случаев его применения можно добиться значительного сокращения времени счета задач при сохранении качества решения.

Различные варианты критериев определения уровня адаптивности позволяют существенно оптимизировать работу адаптивного алгоритма. Благодаря этому удалось в автоматическом адаптивном режиме проводить расчеты большинства тестовых задач с сокращением времени в 2-3 раза при сохранении желаемой точности сеточного решения.

В дальнейшем работы по развитию адаптивного алгоритма могут быть направлены на совершенствование экспертной системы (критерия) определения уровня адаптивности. Также предполагается продолжить численное исследование эффективности работы адаптивного по угловым переменным алгоритма на более сложных тестовых задачах.

### Список литературы

1. Шагалев Р. М. Адаптивный метод решения многомерного уравнения переноса с применением дробных сеток в фазовом пространстве // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2004. Вып. 8.
2. Шагалев Р. М., Алексеев А. В., Бочков А. И., Гичук А. В., Евдокимов В. В., Нуждин А. А., Шемякина Т. В. Адаптивный по угловым переменным метод решения двумерного уравнения переноса на неортогональной пространственной сетке // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2006. Вып. 4. С. 3—14.
3. Шагалев Р. М., Алексеев А. В., Власова О. Е., Евдокимов В. В., Гичук А. В., Ирмичев Е. А., Мясачих С. В., Нуждин А. А., Плетенева Н. П., Scott H. Результаты численных исследований различных методов аппроксимации двумерного уравнения переноса по угловым переменным // Там же. 2003. Вып. 2. С. 12—20.
4. Fleck J. A., Cummings J. D. An implicit Monte Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8. P. 313—342.