

УДК 519.6

## НЕЯВНЫЙ КОНЕЧНО-ОБЪЕМНЫЙ МЕТОД РОМБ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА НЕРЕГУЛЯРНЫХ СЕТКАХ ИЗ ТРЕУГОЛЬНЫХ И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫХ ЯЧЕЕК

А. Д. Гаджиев, С. А. Новаковская, А. А. Шестаков  
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Рассматривается неявный конечно-объемный метод РОМБ для решения двумерного уравнения теплопроводности на нерегулярных сетках из треугольных и четырехугольных ячеек. Нерегулярная схема метода РОМБ для теплопроводности строится на основе интегрального закона сохранения энергии в ячейке сетки и интегрирования потокового уравнения по той же ячейке. Аппроксимация строится в рамках одной ячейки сетки в терминах температур и нормальных компонент потока на гранях ячеек.

### Введение

При математическом моделировании механики сплошной среды с ударными волнами в слоистых системах с множеством веществ для обеспечения приемлемой точности целесообразно применять лагранжевы методы. Это связано с тем, что в лагранжевых методах четко отслеживаются границы раздела сред, в то время как в эйлеровых методах они размазываются. К сожалению, лагранжевы методы в многомерном случае при больших деформациях сетки могут приводить к быстрому снижению точности и частому останову задач. Этот недостаток может быть "смягчен" использованием произвольно-лагранжево-эйлерового (ALE) подхода, который допускает произвольное движение сетки. В частности, требуя, чтобы лагранжевыми были только границы раздела, а внутри перестраивая сетку по мере необходимости, можно сохранять четкое определение границы раздела одновременно с удовлетворительной сеткой внутри. При этом для некоторых сильно искаженных границ раздела сред приходится отменять лагранжево представление, заменяя подлинные границы на полосы из смеси веществ. В этом случае для описания смешанных ячеек вводятся концентрации веществ.

Однако применение ALE-методов по-прежнему может быть связано со сложностями и даже вызывать аварийный останов из-за проблем с сеткой. Это происходит потому, что регулярные методики, основанные на четырехугольных сетках с постоянными связями, не могут адаптироваться к динамическому деформированию границ раздела. Наиболее общее решение данной проблемы состоит в ослаблении ограничений на топологию сетки при сохранении в то же время лагранжевости границ. Этим требованиям удовлетворяют нерегулярные сетки, которые легко могут "приспособиться" к произвольным контурам границ раздела сред.

В данной работе рассматривается неявный конечно-объемный метод РОМБ для решения двумерного уравнения теплопроводности на нерегулярных сетках из треугольных и четырехугольных ячеек. Нерегулярная схема метода РОМБ для теплопроводности строится, как и в регулярном случае [1], на основе интегрального закона сохранения энергии в ячейке сетки и интегрирования потокового уравнения по той же ячейке. Аппроксимация строится в рамках одной ячейки сетки в терминах температур и нормальных компонент потока на гранях ячеек. В отличие от традиционных схем с разнесенным шаблоном метод РОМБ имеет две особенности:

- 1) коэффициент теплопроводности используется лишь в центрах ячеек, и не требуется интерполировать его на грани ячеек, где он может быть разрывным;

2) не требуется применения переменного шаблона с охватом широкой окрестности для обеспечения удовлетворительной точности на сильно деформированных сетках.

Все это делает схему метода РОМБ простой, экономичной, и в то же время обеспечивается хорошая точность, что подтверждают представленные в работе результаты расчетов тестовых задач.

### Постановка задачи

Пусть  $D$  — некоторый фиксированный объем физического пространства, в котором происходит исследуемый процесс,  $\Sigma$  — гладкая замкнутая поверхность, ограничивающая этот объем. Рассмотрим уравнение теплопроводности, записанное в потоковой форме:

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \operatorname{div} \vec{S} = 0; \quad \vec{S} + \varkappa \nabla T = 0 \quad (1)$$

с уравнением состояния (УРСом)

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, T).$$

Здесь  $\rho$  — плотность;  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия;  $T$  — температура;  $\vec{S}$  — тепловой поток. Будем рассматривать двумерное уравнение теплопроводности с плоской или осевой симметрией, где

$$\operatorname{div} \vec{S} = \frac{1}{r^\sigma} \frac{\partial (r^\sigma S_r)}{\partial r} + \frac{1}{r^\sigma} \frac{\partial (r^\sigma S_z)}{\partial z}, \quad \sigma = \begin{cases} 0 & \text{в плоском случае;} \\ 1 & \text{в осесимметричном случае;} \end{cases} \quad \nabla T = \left( \frac{\partial T}{\partial r}, \frac{\partial T}{\partial z} \right).$$

Начальные условия:

$$T^0 = T(\vec{r}, t)|_{t=0}.$$

Граничные условия:

$$\alpha T - \beta (\vec{S} \cdot \vec{n}) = \mu(\vec{r}, t), \quad \vec{r} \in \Sigma,$$

где параметры  $\alpha, \beta$  удовлетворяют условиям  $\alpha(\vec{r}, t) \geq 0$ ;  $\beta(\vec{r}, t) \geq 0$ ;  $\alpha + \beta > 0$ ;  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к  $\Sigma$ .

### Разностная сетка

Область  $D$  покроем сеткой из произвольных треугольников и четырехугольников, вершины которых задаются координатами  $(r_j, z_j)$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Многоугольники, из которых составлена область  $D$ , примыкают друг к другу по полным сторонам своих граней. Ячейки сетки будем нумеровать индексом  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ , вершины многоугольников — индексом  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ . Каждой  $i$ -й ячейке соответствует свой набор вершин, который обозначим через  $j_1, j_2, \dots, j_{\hat{k}_i}$ , где  $\hat{k}_i$  — число граней  $i$ -й ячейки. Через  $s_k$  обозначим соответствующие грани ячеек и одновременно середины этих граней. Будем ячейку считать граничной, если у нее есть грань, принадлежащая границе области, внутренней — в противном случае.

Внешняя нормаль к грани  $s_k$  определяется по формуле

$$\vec{n}_{s_k} = \frac{1}{\Delta l_{s_k}} (\Delta z_{s_k}, -\Delta r_{s_k}),$$

где  $\Delta r_{s_k} = r_{j_{k+1}} - r_{j_k}$ ;  $\Delta z_{s_k} = z_{j_{k+1}} - z_{j_k}$ ;  $\Delta l_{s_k} = \sqrt{\Delta r_{s_k}^2 + \Delta z_{s_k}^2}$  — длина грани  $s_k$ .

Если ячейка  $i$  — треугольная с вершинами  $j_1, j_2, j_3$ , то ее площадь и объем будем определять по формулам

$$\Delta S_i = \frac{1}{2} [(z_{j_2} - z_{j_1})(r_{j_3} - r_{j_1}) - (z_{j_3} - z_{j_1})(r_{j_2} - r_{j_1})]; \quad \Delta V_i = \frac{r_{j_1}^\sigma + r_{j_2}^\sigma + r_{j_3}^\sigma}{3} \Delta S_i.$$

Если ячейка  $i$  — четырехугольная с вершинами  $j_1, j_2, j_3, j_4$ , то ее площадь и объем будем определять по формулам

$$\begin{aligned}\Delta V_i &= \frac{1}{6} \left( r_{j_1}^\sigma + r_{j_2}^\sigma + r_{j_3}^\sigma \right) \left[ r_{j_1} (z_{j_3} - z_{j_2}) + r_{j_2} (z_{j_1} - z_{j_3}) + r_{j_3} (z_{j_2} - z_{j_1}) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{6} \left( r_{j_1}^\sigma + r_{j_3}^\sigma + r_{j_4}^\sigma \right) \left[ r_{j_1} (z_{j_4} - z_{j_3}) + r_{j_3} (z_{j_1} - z_{j_4}) + r_{j_4} (z_{j_3} - z_{j_1}) \right]; \\ \Delta S_i &= \frac{1}{2} \left[ (r_{j_1} - r_{j_3}) (z_{j_2} - z_{j_4}) + (r_{j_2} - r_{j_4}) (z_{j_3} - z_{j_1}) \right].\end{aligned}$$

### Вывод разностных уравнений

Используя неявный подход к уравнениям (1), запишем интегральный закон сохранения энергии для ячейки  $i$ :

$$\rho_i \frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\tau} + \text{DIV} \left( \vec{S}_i^{n+1} \right) = 0, \quad \text{DIV} \left( \vec{S}_i^{n+1} \right) = \frac{1}{\Delta V_i} \sum_{k=1}^{\widehat{k}_i} (R \vec{n} \Delta \ell)_{s_k} \vec{S}_{s_k}^{n+1}, \quad R = r^\sigma; \quad (2)$$

$$\vec{S}_i^{n+1} + \varkappa_i^{n+1} \text{GRAD} (T_i^{n+1}) = 0, \quad \text{GRAD} (T_i^{n+1}) = \frac{R_i}{\Delta V_i} \sum_{k=1}^{\widehat{k}_i} (\vec{n} \Delta \ell)_{s_k} T_{s_k}^{n+1}; \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \dots, I.$$

Здесь, как и для регулярных сеток,  $\widehat{k}_i$  — число граней ячейки  $i$ ; среднее значение  $R_i = \frac{1}{\widehat{k}_i} \sum_{s=1}^{\widehat{k}_i} R_{s_k}$  в ячейке вынесено за знак суммирования. Для регулярных сеток это обеспечивает выполнение условия инвариантности — сохранения сферической симметрии для одномерной задачи. Для нерегулярных сеток данная процедура будет лишь улучшать выполнение условия инвариантности.

Из уравнений (2), (3) видно, что вектор состояния  $(T, \vec{S})_i^n$  определен в центрах ячеек, а координаты  $(r, z)_{j_k}^n$  — в вершинах ячеек.

Система уравнений (2), (3), дополненная УРСом, является нелинейной. Линеаризуем удельную внутреннюю энергию  $\varepsilon$  по  $T$ :

$$\varepsilon^{\nu+1} = \varepsilon (T^{n+1})^{\nu+1} = \varepsilon^\nu + \varepsilon_T^\nu (T^{\nu+1} - T^\nu), \quad (4)$$

где  $\nu$  — индекс итераций по нелинейности.

Подставляя (4) в (2), получаем

$$T_i^{\nu+1} + (\rho_i \varepsilon_{T_i}^\nu)^{-1} \tau \text{DIV} \left( \vec{S}_i^{\nu+1} \right) = T_i^\nu + (\varepsilon_{T_i}^\nu)^{-1} (\varepsilon_i^n - \varepsilon_i^\nu).$$

Введем в разностные уравнения искусственную диссипацию:

$$T_i^{\nu+1} + (\rho_i \varepsilon_{T_i}^\nu)^{-1} \tau \text{DIV} \left( \vec{H}_i^{\nu+1} \right) = T_i^\nu + (\varepsilon_{T_i}^\nu)^{-1} (\varepsilon_i^n - \varepsilon_i^\nu); \quad (5)$$

$$\vec{S}_i^{\nu+1} + \varkappa_i^\nu \text{GRAD} (U_i^{\nu+1}) = 0, \quad (6)$$

где

$$T_i^{\nu+1} = U_i^{\nu+1} + \delta_i^\nu h_i^\nu \text{DIV} \left( \vec{H}_i^{\nu+1} \right); \quad \vec{S}_i^{\nu+1} = \vec{H}_i^{\nu+1} + \theta_i^\nu h_i^\nu \text{GRAD} (U_i^{\nu+1}); \quad (7)$$

$h_i$  — линейный размер ячейки,  $h_i = \sqrt{\Delta S_i}$ ;  $\delta_i = \frac{h_i}{4\widetilde{\varkappa}_i}$ ,  $\widetilde{\varkappa}_i = \varkappa_i + \theta_i h_i$ ,  $\theta_i = \frac{1}{(\widehat{k}_i + 1) h_i} \sum_{k=1}^{\widehat{k}_i} \frac{\varkappa_{i_k} - \varkappa_i}{\omega_{ii_k}} \Delta l_{s_k}$  —

коэффициенты искусственной диссипации;  $\omega_{ii_k} = |\vec{r}_{i_k} - \vec{r}_i|$  — расстояние от точки  $i$  до точки  $i_k$ ;  $\Delta l_{s_k}$  — длина грани  $s_k$ .

Подставив соотношения (7) в (5), (6) получим систему уравнений относительно диссипативных величин  $U$ ,  $\vec{H}$ :

$$U_i^{\nu+1} + a_i^\nu \text{DIV} \left( \vec{H}_i^{\nu+1} \right) = F_i^\nu; \quad \vec{H}_i^{\nu+1} + \tilde{\varkappa}_i^\nu \text{GRAD} (U_i^{\nu+1}) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad (8)$$

где  $a_i^\nu = \delta_i^\nu h_i^\nu + \frac{\tau}{\rho_i \varepsilon_{Ti}^\nu}$ ;  $\tilde{\varkappa}_i^\nu = \varkappa_i^\nu + \theta_i^\nu h_i^\nu$ ;  $F_i^\nu = T_i^\nu + (\varepsilon_{Ti}^\nu)^{-1} (\varepsilon_i^n - \varepsilon_i^\nu)$ .

Граничные условия для разностных уравнений (8) легко выводятся из исходных условий:

$$\alpha_h^\nu(\vec{r}, t) U_h^{\nu+1} - \beta_h^\nu(\vec{r}, t) \vec{H}_h^{\nu+1} \vec{n}_h^\nu(\vec{r}, t) = \mu_h^\nu(\vec{r}, t), \quad \vec{r} \in \Sigma_h, \quad (9)$$

т. е. непрерывные величины просто заменяются на сеточные.

Начальные условия для системы (8) имеют вид

$$U_i^n|_{n=0} = T_i^0. \quad (10)$$

Таким образом, решение исходной задачи свелось к решению системы разностных уравнений (8) с граничными условиями (9) и начальными условиями (10).

### Дополнительные соотношения связи

Для того чтобы система уравнений (8) была замкнутой, надо задавать дополнительные соотношения, связывающие значения величин  $U$ ,  $\vec{H}$  в центрах с их значениями на гранях.

Поскольку в системе уравнений (8) для каждой ячейки  $i$  используются внешние нормали  $\vec{n}_{s_k}$ , это приводит к тому, что  $\vec{n}_{s_k}$  на одной и той же грани, но для соседних ячеек имеют противоположные знаки. Соответственно на данной грани величина  $\left( \vec{H} \cdot \vec{n} \right)_{s_k}$  будет также иметь значения с противоположными знаками, в то время как надо иметь одну нормальную компоненту потока на каждой грани.

В методе РОМБ для регулярных сеток разностная схема формулируется в терминах нормалей  $\vec{n}_i$ ,  $\vec{n}_j$ , которые вдоль соответствующих *каналов* ориентированы в сторону роста индексов  $i$ ,  $j$ . При таком определении на каждой грани есть только одна нормаль.

Для нерегулярных сеток нет каналов, но есть номера ячеек  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ . Можно ввести нормаль, которая на данной грани направлена в сторону ячейки с бóльшим номером. Чтобы формализовать это, введем оператор знака

$$\text{sign}(i_{s_k} - i) = \begin{cases} 1, & i_{s_k} > i; \\ -1, & i_{s_k} < i, \end{cases}$$

где  $i$  — номер данной ячейки;  $i_{s_k}$  — номер соседней ячейки через грань  $s_k$ . Определим нормальную компоненту потока по формуле

$$W_{s_k} = \left( \vec{H} \cdot \vec{n} \Delta \ell \right)_{s_k} \text{sign}(i_{s_k} - i) = \left( \vec{H} \vec{N} \Delta \ell \right)_{s_k}.$$

Здесь  $\left( \vec{N} \Delta \ell \right)_{s_k} = (\vec{n} \cdot \Delta \ell)_{s_k} \text{sign}(i_{s_k} - i)$  — нормаль, которая направлена в сторону ячейки с бóльшим номером.

С введенными обозначениями систему уравнений (8) можно привести к виду

$$\begin{aligned} U_i^{\nu+1} + a_i^\nu \text{DIV} \left( \vec{H}_i^{\nu+1} \right) &= F_i^\nu, & \text{DIV} \left( \vec{H}_i^{\nu+1} \right) &= \frac{1}{\Delta V_i} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} R_{s_k} W_{s_k}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_k} - i); \\ \vec{H}_i^{\nu+1} + \tilde{\varkappa}_i^\nu \text{GRAD} (U_i^{\nu+1}) &= 0, & \text{GRAD} (U_i^{\nu+1}) &= \frac{R_i}{\Delta V_i} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (\vec{n} \Delta \ell)_{s_k} U_{s_k}^{\nu+1}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$i = 1, 2, \dots, I.$$

Теперь рассмотрим дополнительные соотношения связи отдельно для четырехугольной и треугольной ячеек.

Для четырехугольной ячейки применим дополнительные соотношения, которые использовались в регулярном случае:

$$U_i^{\nu+1} = \frac{U_{s_1}^{\nu+1} + U_{s_3}^{\nu+1}}{2}; \quad U_i^{\nu+1} = \frac{U_{s_2}^{\nu+1} + U_{s_4}^{\nu+1}}{2}; \quad (12)$$

$$R_i^\nu W_{s_1 s_3}^{\nu+1} = \frac{R_{j_2}^\nu + R_{j_3}^\nu}{4} W_{s_2}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_2} - i) - \frac{R_{j_1}^\nu + R_{j_4}^\nu}{4} W_{s_4}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_4} - i);$$

$$R_i^\nu W_{s_2 s_4}^{\nu+1} = \frac{R_{j_3}^\nu + R_{j_4}^\nu}{4} W_{s_3}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_3} - i) - \frac{R_{j_1}^\nu + R_{j_2}^\nu}{4} W_{s_1}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_1} - i), \quad (13)$$

где  $W_{s_1 s_3}^{\nu+1} = \vec{H}_i^{\nu+1} (\Delta \ell \vec{n})_{s_1 s_3}$ ;  $W_{s_2 s_4}^{\nu+1} = \vec{H}_i^{\nu+1} (\Delta \ell \vec{n})_{s_2 s_4}$ ;  $\vec{n}_{s_2 s_4}$ ,  $\vec{n}_{s_1 s_3}$  — внешние нормали (направлены в левую сторону при обходе по часовой стрелке) к средним линиям  $s_2 s_4$ ,  $s_1 s_3$  соответственно (рис. 1).

Формулы (13) можно трактовать следующим образом: поток через грань  $s_2 s_4$  равен полусумме потоков, входящего через грань  $s_1$  и выходящего через грань  $s_3$ . Аналогично для второго направления. Второй порядок точности формул (12) можно доказать аналогично случаю регулярных сеток.

Теперь подставим полученные соотношения связи (12), (13) в систему уравнений (11). Для четырехугольной ячейки  $i$  получим

$$\frac{U_{s_1}^{\nu+1} + U_{s_3}^{\nu+1}}{2} + a_i \frac{1}{\Delta V_i} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} R_{s_k} W_{s_k}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_k} - i) = F_i^\nu;$$

$$\frac{R_{j_3}^\nu + R_{j_4}^\nu}{4} W_{s_3}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_3} - i) - \frac{R_{j_1}^\nu + R_{j_2}^\nu}{4} W_{s_1}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_1} - i) + \tilde{\alpha}_i^\nu \frac{(R_i)^\nu}{\Delta V_i} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (\vec{n} \Delta \ell)_{s_k} U_{s_k}^{\nu+1} (\vec{n} \Delta \ell)_{s_2 s_4} = 0;$$

$$\frac{U_{s_2}^{\nu+1} + U_{s_4}^{\nu+1}}{2} + a_i \frac{1}{\Delta V_i} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} R_{s_k} W_{s_k}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_k} - i) = F_i^\nu;$$

$$\frac{R_{j_2}^\nu + R_{j_3}^\nu}{4} W_{s_2}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_2} - i) - \frac{R_{j_1}^\nu + R_{j_4}^\nu}{4} W_{s_4}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_4} - i) + \tilde{\alpha}_i^\nu \frac{(R_i)^\nu}{\Delta V_i} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (\vec{n} \Delta \ell)_{s_k} U_{s_k}^{\nu+1} (\vec{n} \Delta \ell)_{s_1 s_3} = 0, \quad (15)$$

т. е. для каждой четырехугольной ячейки  $i$  имеется система из четырех уравнений (14), (15) относительно восьми величин  $U_s^{\nu+1}$ ,  $W_s^{\nu+1}$ ,  $s = s_1, s_2, s_3, s_4$ , на всех четырех гранях.

Дополнительные соотношения связи для треугольной ячейки (рис. 2) будем строить на основе минимизации квадратичных функционалов. Используя подход из работы [2], будем определять де-

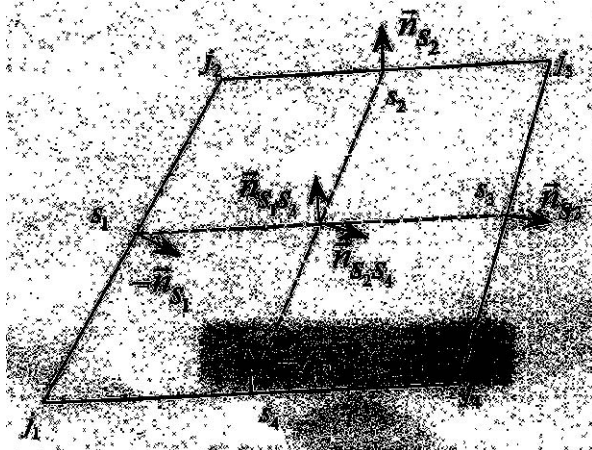


Рис. 1. Четырехугольная ячейка

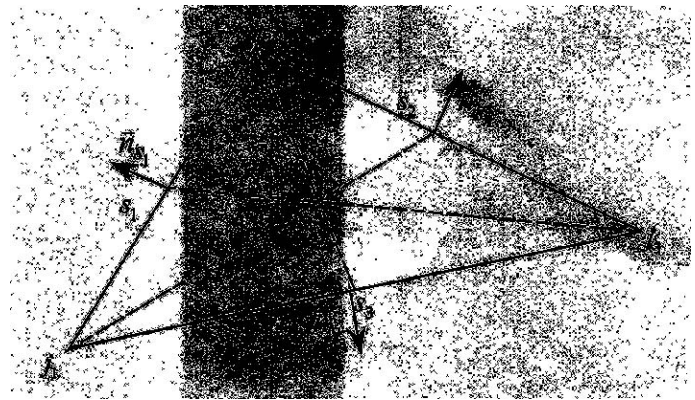


Рис. 2. Треугольная ячейка

картовы координаты потока  $\vec{H}_i^{\nu+1} = ((H_r^{\nu+1})_i, (H_z^{\nu+1})_i)$  в центрах ячеек через нормальные компоненты  $(\vec{H}^{\nu+1} \cdot \vec{n})_{s_k} = (H_r^{\nu+1} n_r + H_z^{\nu+1} n_z)_{s_k}$  на гранях, исходя из минимума квадратичного функционала

$$Q = \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} \left( \vec{H}_i^{\nu+1} \cdot \vec{n}_{s_k} - \vec{H}_{s_k}^{\nu+1} \cdot \vec{n}_{s_k} \right)^2. \quad (16)$$

Условия экстремума:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial H_{r,i}} &= 2 \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} \left( \vec{H}_i^{\nu+1} \cdot \vec{n}_{s_k} - \vec{H}_{s_k}^{\nu+1} \cdot \vec{n}_{s_k} \right) (n_r)_{s_k} = 0; \\ \frac{\partial Q}{\partial H_{z,i}} &= 2 \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} \left( \vec{H}_i^{\nu+1} \cdot \vec{n}_{s_k} - \vec{H}_{s_k}^{\nu+1} \cdot \vec{n}_{s_k} \right) (n_z)_{s_k} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получим систему уравнений относительно  $H_{r,i}, H_{z,i}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (n_r)_{s_k}^2 (H_r^{\nu+1})_i + \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (n_z)_{s_k} (n_r)_{s_k} (H_z^{\nu+1})_i &= \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} \frac{(n_r)_{s_k}}{\Delta l_{s_k}} W_{s_k}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_k} - i); \\ \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (n_r)_{s_k} (n_z)_{s_k} (H_r^{\nu+1})_i + \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (n_z)_{s_k}^2 (H_z^{\nu+1})_i &= \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} \frac{(n_z)_{s_k}}{\Delta l_{s_k}} W_{s_k}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_k} - i). \end{aligned} \quad (17)$$

Решением системы (17) является

$$\begin{aligned} (H_r^{\nu+1})_i &= \frac{1}{a_i c_i - b_i^2} \left( c_i \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} \frac{(n_r)_{s_k}}{\Delta l_{s_k}} W_{s_k}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_k} - i) - b_i \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} \frac{(n_z)_{s_k}}{\Delta l_{s_k}} W_{s_k}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_k} - i) \right); \\ (H_z^{\nu+1})_i &= \frac{1}{a_i c_i - b_i^2} \left( a_i \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} \frac{(n_z)_{s_k}}{\Delta l_{s_k}} W_{s_k}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_k} - i) - b_i \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} \frac{(n_r)_{s_k}}{\Delta l_{s_k}} W_{s_k}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_k} - i) \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $a_i = \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (n_r)_{s_k}^2$ ;  $b_i = \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (n_r)_{s_k} (n_z)_{s_k}$ ;  $c_i = \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (n_z)_{s_k}^2$ .

По неравенству Коши—Буняковского

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (n_r)_{s_k} (n_z)_{s_k} \right)^2 &< \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (n_r)_{s_k}^2 (n_z)_{s_k}^2, \quad \text{т. е. } b^2 < ac; \\ a + c &= \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} \left( (n_r)_{s_k}^2 + (n_z)_{s_k}^2 \right) = \hat{k}_i, \quad c = \hat{k}_i - a, \end{aligned}$$

т. е. знаменатель  $a_i c_i - b_i^2$  множителя в правых частях (18) всегда больше нуля.

Соотношение связи для температуры будем выбирать в виде

$$U_i^{\nu+1} = \frac{1}{3} (U_{s_1}^{\nu+1} + U_{s_2}^{\nu+1} + U_{s_3}^{\nu+1}). \quad (19)$$

Это соотношение связи имеет второй порядок точности.

Теперь для треугольной ячейки  $i$  в первое уравнение (11) подставляем соотношение связи (19), а во второе уравнение (11) — соотношения (18). В итоге получаем

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{3} (U_{s_1}^{\nu+1} + U_{s_2}^{\nu+1} + U_{s_3}^{\nu+1}) + a_i \frac{1}{\Delta V_i} \sum_{k=1}^{\widehat{k}_i} R_{s_k} W_{s_k}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_k} - i) = F_i^\nu; \\
 & \frac{1}{a_i c_i - b_i^2} \left( c_i \sum_{k=1}^{\widehat{k}_i} \frac{(n_r)_{s_k}}{\Delta l_{s_k}} W_{s_k}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_k} - i) - b_i \sum_{k=1}^{\widehat{k}_i} \frac{(n_z)_{s_k}}{\Delta l_{s_k}} W_{s_k}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_k} - i) \right) + \\
 & \quad + \widetilde{\chi}_i \frac{R_i}{\Delta V_i} \sum_{k=1}^{\widehat{k}_i} (n_r \Delta l)_{s_k} U_{s_k}^{\nu+1} = 0; \\
 & \frac{1}{a_i c_i - b_i^2} \left( a_i \sum_{k=1}^{\widehat{k}_i} \frac{(n_z)_{s_k}}{\Delta l_{s_k}} W_{s_k}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_k} - i) - b_i \sum_{k=1}^{\widehat{k}_i} \frac{(n_r)_{s_k}}{\Delta l_{s_k}} W_{s_k}^{\nu+1} \text{sign}(i_{s_k} - i) \right) + \\
 & \quad + \widetilde{\chi}_i \frac{R_i}{\Delta V_i} \sum_{k=1}^{\widehat{k}_i} (n_z \Delta l)_{s_k} U_{s_k}^{\nu+1} = 0.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом, для треугольной ячейки имеем три уравнения (20) относительно шести величин  $U^{\nu+1}$ ,  $W^{\nu+1}$  на трех гранях.

В итоге для каждой ячейки  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ , получена система уравнений (14), (15) для четырехугольной ячейки и система (20) для треугольной ячейки.

Уравнений (14), (15) — четыре, они связывают восемь величин  $U^{\nu+1}$ ,  $W^{\nu+1}$  на четырех гранях. Есть номера ячеек  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, I$ ), номера граней  $s$  ( $s = 1, 2, \dots, S$ ), номера узлов  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, J$ ). Естественно, для каждой ячейки должны быть установлены соответствия между всеми этими индексами.

Отметим еще раз, что система разностных уравнений (14), (15) для четырехугольных ячеек имеет второй порядок точности. В системе разностных уравнений (20) для треугольных ячеек второй порядок точности имеет только первое уравнение, а второе и третье уравнения имеют первый порядок. Снижение точности происходит не из-за оператора  $\text{grad}_h U$ , а из-за формулы (18) линейного представления  $H_i$  через  $W_{s_1}$ ,  $W_{s_2}$ ,  $W_{s_3}$ .

Теперь подсчитаем число неизвестных, число уравнений и число граничных условий и проверим на замкнутость полученную систему уравнений (14), (15), (20). Число ячеек равно  $I$ , число граней ячейки  $i$  равно  $\widehat{k}_i$ , и пусть  $k_{\text{гран}}$  — число граничных граней. Тогда общее число граней равно  $S = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^I \widehat{k}_i + k_{\text{гран}} \right)$ . В скобках каждая грань сосчитана дважды, поэтому появляется множитель  $1/2$ . Число уравнений (14), (15), (20) равно  $\sum_{i=1}^I \widehat{k}_i$ , число граничных условий равно  $k_{\text{гран}}$ . Общее число уравнений вместе с граничным условием есть  $\sum_{i=1}^I \widehat{k}_i + k_{\text{гран}}$ . Эта сумма равна  $2S$ , т. е. числу неизвестных. Значит, система уравнений (14), (15), (20), дополненная граничными условиями, образует замкнутую систему.

### Приведение системы уравнений к векторно-матричному виду

Для решения системы уравнений (14), (15), (20) с помощью какого-либо метода обращения матриц приведем ее к векторно-матричному виду. Введем в рассмотрение вектор-столбец

$$\Phi^{\nu+1} = (U_1^{\nu+1}, W_1^{\nu+1}; U_2^{\nu+1}, W_2^{\nu+1}; \dots; U_s^{\nu+1}, W_s^{\nu+1})^T,$$

составленный из искомых решений на гранях  $U_s^{\nu+1}$ ,  $W_s^{\nu+1}$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ .

Соберем вектор-столбец из правых частей уравнений (14), (15), (20):

$$\mathbf{F}^\nu = (F_1^\nu, F_2^\nu, \dots, F_S^\nu)^T.$$

Тогда систему уравнений можно записать в виде

$$M^\nu \Phi^{\nu+1} = \mathbf{F}^\nu.$$

Каждой четырехугольной ячейке соответствуют четыре строки в матрице  $M$ . В каждой строке присутствуют шесть ненулевых элементов-коэффициентов при  $U_s^{\nu+1}$ ,  $W_s^{\nu+1}$  в соответствии с уравнениями (14), (15). Аналогично, каждой треугольной ячейке соответствуют три строки в матрице  $M$ , а в каждой из этих строк будем иметь шесть ненулевых элементов в соответствии с уравнениями (16). Ячейки в матрице  $M$  можно перебирать по порядку  $i = 1, 2, \dots, I$ . Граничное условие (9) для каждой грани будет представлено в матрице  $M$  отдельной строкой из коэффициентов уравнения

$$\alpha^\nu(\vec{r}, t) U_{s_k}^{\nu+1} - \beta^\nu(\vec{r}, t) \frac{1}{\Delta l_{s_k}} W_{s_k}^{\nu+1} = \mu^\nu(\vec{r}, t), \quad \vec{r} \in \Sigma_h.$$

Таким образом, получена разреженная матрица  $M$  с шестью ненулевыми элементами в каждой строке, кроме строки с граничным условием, где имеются два коэффициента.

В результате решения системы линейных уравнений получим

$$\Phi^{\nu+1} = (M^\nu)^{-1} \mathbf{F}^\nu.$$

По вычисленным значениям  $U_s^{\nu+1}$ ,  $W_s^{\nu+1}$  из первого уравнения (7) получаем  $T_i^{\nu+1}$  в центрах ячеек. На этом вычисления на  $(\nu + 1)$ -й итерации завершаются, переходим к следующей итерации  $\nu$  и так до сходимости, пока не выполнится условие сходимости итераций

$$|T_i^{\nu+1} - T_i^\nu| \leq \varepsilon_{\text{сх}} (1 + T_i^\nu).$$

После сходимости итераций получаем в центрах ячеек  $T_i^{n+1}$  и идем на следующий шаг.

### Результаты численных расчетов

В данном разделе приводятся результаты расчетов тестовых задач, имеющих точные решения. Задачи 1 и 4 являются одномерными, задачи 2 и 3 — двумерные. Задачи 1, 3 и 4 рассмотрены в плоской постановке, задача 2 — в осесимметричной.

**Тестовая задача 1.** Рассмотрим нелинейную теплопроводную волну в области  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 0,04$ . Коэффициент теплопроводности положим равным  $\kappa(T) = 256T^{1/8}$ , энергию —  $\varepsilon(T) = T$ . Граничные условия на всех границах, кроме верхней ( $r = 1$ ), — равенство нулю теплового потока. На верхней границе  $T(r = 1, t) = 0,5t^{1/8}$ . В начальный момент времени в области задана температура  $T(r, t = 0) = 10^{-5}$ .

Число ячеек сетки равно 250 (рис. 3). Численное решение сравнивалось с точным решением

$$T(r, t) = \begin{cases} \left[ 0,5 \left( t - \frac{1-r}{4} \right) \right]^{1/8}, & t > \frac{1-r}{4}; \\ 0, & t \leq \frac{1-r}{4}. \end{cases}$$

На рис. 4 представлен профиль температуры, полученный на момент времени  $t = 0,2$  на треугольной сетке. Видно, что профиль температуры, полученный по методу РОМБ, хорошо согласуется с точным решением. Аналогичные результаты получаются на четырехугольной сетке.



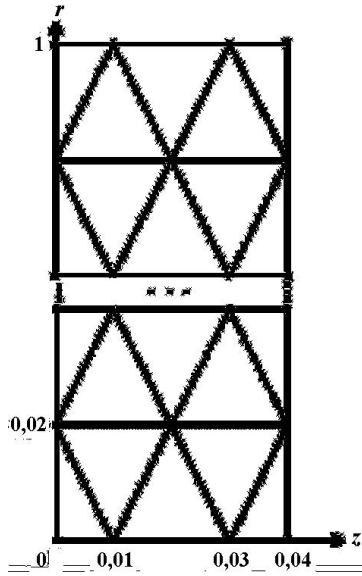


Рис. 3. Геометрия задачи 1 с разностной сеткой

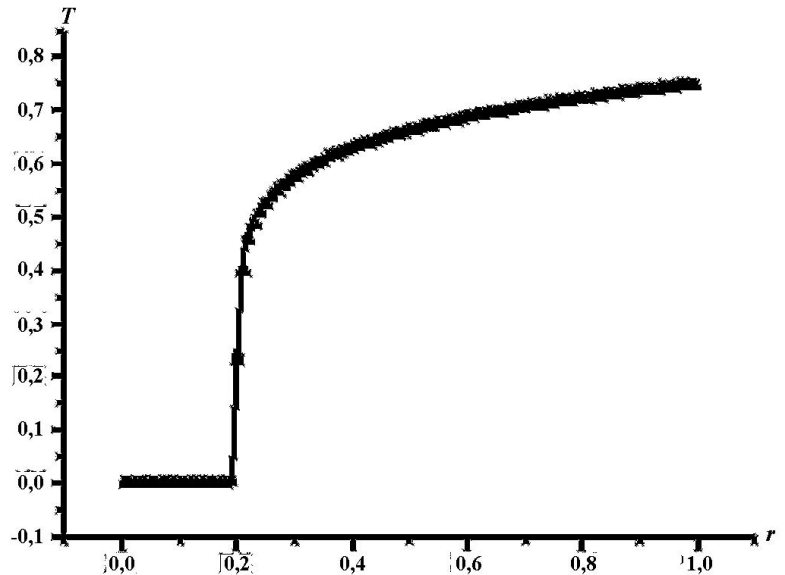


Рис. 4. Профиль температуры в задаче 1: — — точное решение;  $\Delta$  — решение методом РОМБ

**Тестовая задача 2.** Рассмотрим нелинейную теплопроводную волну в осесимметричной области  $0,01 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 0,04$  с осью симметрии  $z$ . Коэффициент теплопроводности положим равным  $\kappa(T) = T$ , энергию —  $\varepsilon(T) = T^2$ .

Граничные условия: на верхней границе  $T(r = 1, t) = 0,5t^{1/8}$ ; на нижней границе  $T(0,01, z, t) = e^{(t+z)}\sqrt{1 - \ln 0,01}$ ; на левой границе  $T(r, 0, t) = e^t\sqrt{1 - \ln r}$ ; на правой границе  $T(r, 0,04, t) = e^{(t+0,04)}\sqrt{1 - \ln r}$ .

В начальный момент времени в области задана температура  $T(r, z, 0) = e^z\sqrt{1 - \ln r}$ .

Число ячеек сетки равно 250. Расчет проводился до момента времени  $t = 0,2$ . Численное решение сравнивалось с точным решением  $T(r, z, t) = e^{(t+z)}\sqrt{1 - \ln r}$  на двух вертикальных каналах ( $z = 0,0033333$  и  $z = 0,0366667$ ).

На рис. 5 приводятся профили температур вдоль двух каналов на конечный момент времени. Видно, что численное решение, полученное по методу РОМБ, хорошо совпадает с точным решением. Аналогичные результаты получаются на четырехугольной сетке.

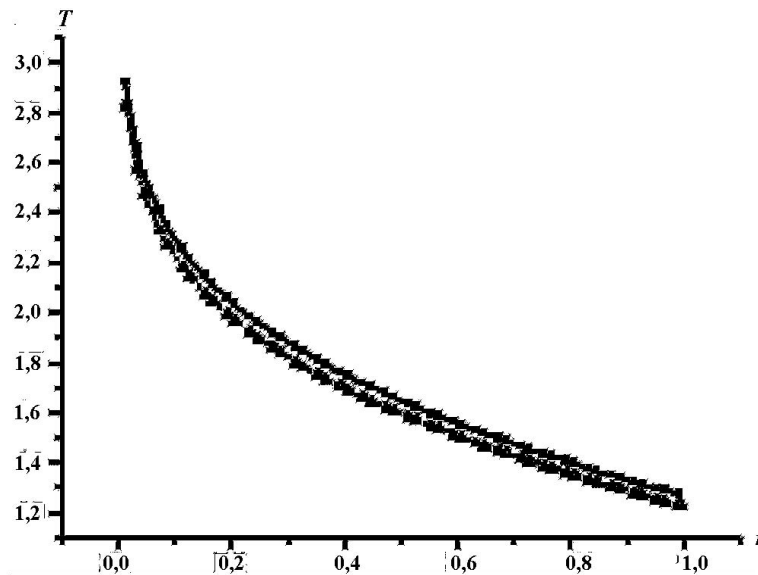


Рис. 5. Профили температуры в задаче 2: — — точное решение,  $z = 0,0366667$ ;  $\blacksquare$  — решение методом РОМБ,  $z = 0,0366667$ ; - - - — точное решение,  $z = 0,0033333$ ;  $\Delta$  — решение методом РОМБ,  $z = 0,0033333$

**Тестовая задача 3.** Рассмотрим нелинейную теплопроводную волну в области  $0 \leq r \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 2$ . Коэффициент теплопроводности положим равным  $\kappa = 4T^4$ , энергию —  $\varepsilon(T) = T$ .

Граничные условия: на нижней границе ( $r = 0$ )  $T_{\Gamma_2} = \begin{cases} (t - z/\sqrt{2})^{1/4}, & 0 \leq z/\sqrt{2} \leq t; \\ 0, & z/\sqrt{2} > t; \end{cases}$  на левой границе ( $z = 0$ )  $T_{\Gamma_0} = \begin{cases} (t - r/\sqrt{2})^{1/4}, & 0 \leq r/\sqrt{2} \leq t; \\ 0, & r/\sqrt{2} > t; \end{cases}$  на верхней границе ( $r = 2$ ) и правой границе ( $z = 2$ )  $T_{\Gamma_1} = T_{\Gamma_3} = 0$  (до конечного момента времени  $t = \sqrt{2}$  волна туда не доходит).

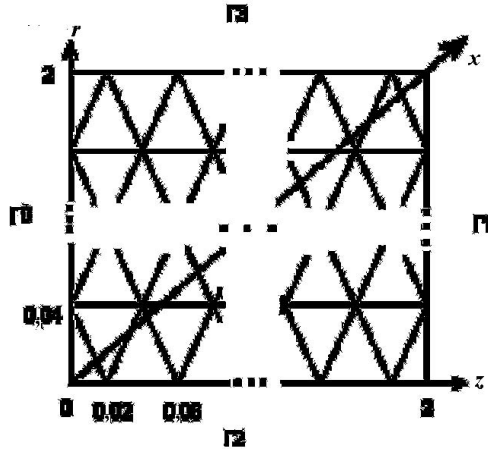


Рис. 6. Геометрия задачи 3 с разностной сеткой

В начальный момент времени в области задана температура  $T(r, z, 0) = 0,00001$ .

Число ячеек сетки равно 5050 (рис. 6). Расчет проводился до момента времени  $t = \sqrt{2}$ . Численное решение сравнивалось с точным решением  $T(x, t) = \begin{cases} (t - x)^{1/4}, & 0 \leq x \leq t; \\ 0, & x > t \end{cases}$  на диагональном канале ( $x = 0,5\sqrt{3z^2 - r^2}$ ).

На рис. 7 приводится профиль температуры, полученный на треугольной сетке в конечный момент времени. На рис. 8 приводится поле температуры в конечный момент времени, полученное методом РОМБ при счете на треугольной сетке. Из рис. 7, 8 видно, что численное решение хорошо согласуется с точным.

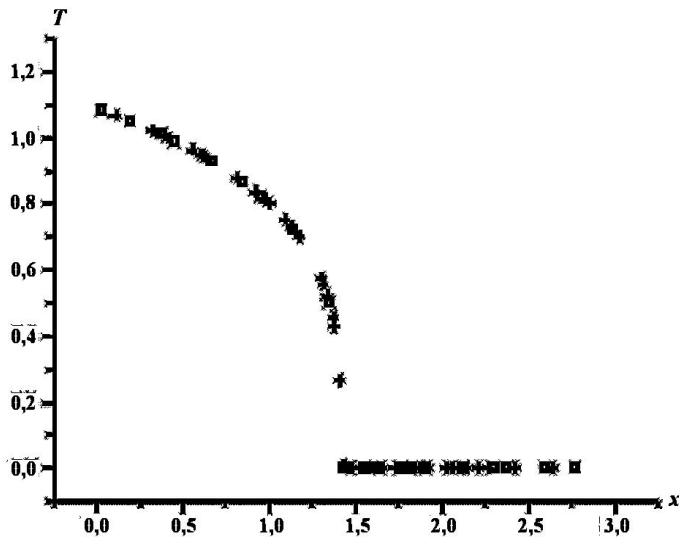


Рис. 7. Профиль температуры в задаче 3:  $\square$  — точное решение;  $+$  — решение методом РОМБ

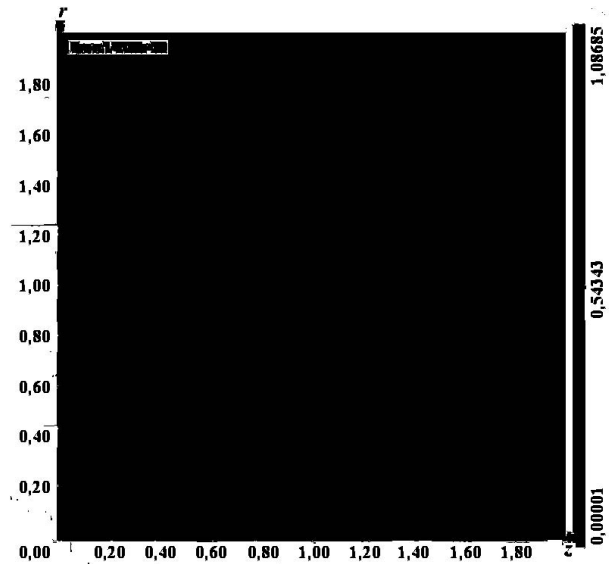


Рис. 8. Поле температуры в задаче 3

**Тестовая задача 4.** Рассмотрим нелинейную теплопроводную волну в области  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ . Коэффициент теплопроводности положим равным  $\kappa(T) = 6T^3$ , энергию —  $\varepsilon(T) = T$ .

Граничные условия на нижней границе  $T(t, r = 0, z) = (8T)^{1/3}$ , на остальных границах  $\vec{S} \cdot \vec{n} = 0$ . В начальный момент времени в области задана температура  $T(t = 0, r, z) = 10^{-5}$ .

Число ячеек сетки равно 456. Расчет проводился до момента времени  $t = 0,11$ . Численное решение

сравнивалось с точным решением  $T(t, r, z) = \begin{cases} (8t - 2r)^{1/3}, & r < 4t; \\ 0, & r \geq 4t \end{cases}$  в двух каналах ( $z = 0,525$  и  $z = 0,0277$ ). Сначала задача была посчитана на прямоугольной сетке. Было получено решение, хорошо согласующееся с точным. Затем задача решалась на сильно деформированной сетке *елочного* типа (рис. 9).

На рис. 10 приводятся профили температур, полученные методом РОМБ на сетке елочного типа. Видно, что полученное численное решение хорошо согласуется с точным.

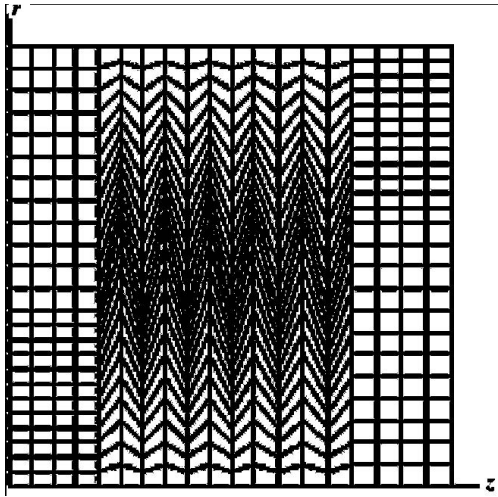


Рис. 9. Разностная сетка для задачи 4

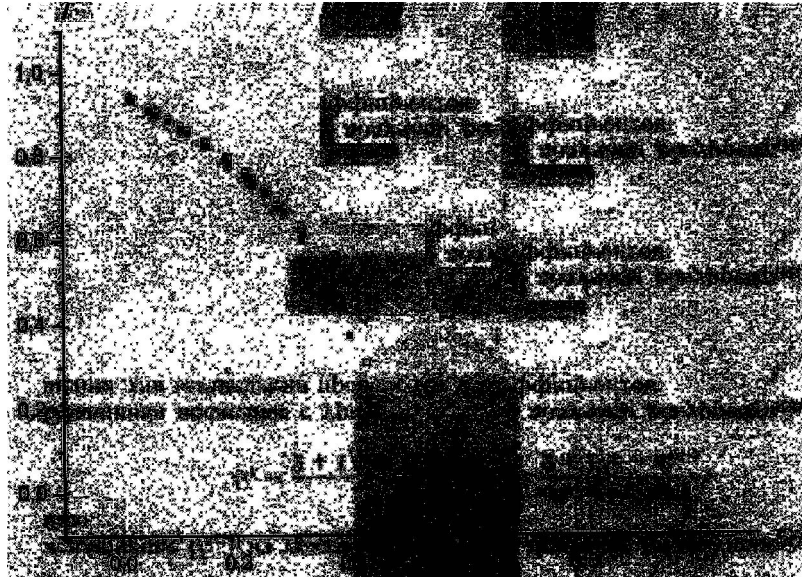


Рис. 10. Профили температур в задаче 4: □ — точное решение,  $z = 0,525$ ; ■ — решение, полученное методом РОМБ,  $z = 0,525$ ; ○ — точное решение,  $z = 0,0277$ ; ● — решение, полученное методом РОМБ,  $z = 0,0277$

Все расчеты вышеприведенных тестовых задач свидетельствуют о том, что рассмотренный метод дает хорошие результаты и может быть рекомендован для решения двумерного уравнения теплопроводности на нерегулярных сетках из треугольных и четырехугольных ячеек.

### Список литературы

1. Гаджиев А. Д., Писарев В. Н., Шестаков А. А. Метод расчета двумерных задач теплопроводности на неортогональных сетках // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1982. Т. 22, № 2. С. 339—347.
2. Dukowicz J. K., Meltz B. J. A. Vorticity errors in multidimensional Lagrangian codes // J. Comp. Phys. 1992. Vol. 99. P. 115—121.