

УДК 519.6

## ЧИСЛЕННАЯ МЕТОДИКА РОМБ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В. Н. Писарев, С. В. Чернова  
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Рассматривается численный алгоритм решения трехмерной задачи теплопроводности в криволинейной системе координат. Уравнение теплопроводности аппроксимируется на регулярной сетке, имеющей листовую структуру. Разностная схема получена на основе неявного конечно-разностного метода РОМБ и является обобщением схемы методики для решения двумерного уравнения теплопроводности в осесимметричном случае. Для решения системы разностных уравнений применяется итерационный метод со стабилизирующей поправкой, который сводит трехмерную разностную задачу к серии одномерных задач, решаемых прогонками по каналам. Приведены результаты численных расчетов.

### Введение

Для решения трехмерных задач теплопроводности разработано достаточно много алгоритмов (см., например, [1–9]), тем не менее актуальна разработка новых, учитывающих особенности решаемых задач.

В данной работе рассматривается численная методика решения трехмерного уравнения теплопроводности в криволинейной системе координат. Разностная аппроксимация строится на регулярной сетке, имеющей листовую структуру. Схема получена на основе неявного конечно-разностного метода РОМБ [10–14] и является обобщением схемы методики для решения двумерного уравнения теплопроводности в осесимметричном случае.

Перечислим основные особенности методики:

1. Схема строится интегро-интерполяционным методом [1] для уравнения теплопроводности в потоковой форме, записанного в криволинейной системе координат на базе уравнения теплопроводности в цилиндрических координатах.
2. Область решения разбивается полуплоскостями, в каждой из которых сетка задается цилиндрическими координатами вершин четырехугольников.
3. Разностная аппроксимация трехмерного уравнения теплопроводности строится в рамках одной ячейки сетки с привлечением температур и нормальных составляющих вектора теплового потока на гранях ячейки и в ее середине (шаблон традиционной схемы включает, как правило, не менее 27 ячеек). Это особенно важно при использовании неравномерных косоугольных ячеек. Следует также отметить простоту аппроксимации граничных условий и однократность вычисления коэффициента теплопроводности в ячейке разностной сетки (в традиционных схемах, использующих *полугармоническое* усреднение, коэффициент теплопроводности вычисляется шесть раз). Разностная схема является неявной, безусловно устойчивой. Как показали многочисленные исследования, схема обладает хорошей точностью.
4. Для решения системы разностных уравнений применяется итерационный метод со стабилизирующей поправкой (ИМСП) [11, 12, 15], который сводит трехмерную разностную задачу к серии одномерных задач, решаемых прогонками по каналам. Этот метод позволяет вести счет с крупным шагом по времени, а погрешность расщепления стремится к нулю по мере сходимости итераций. При этом схема обладает свойством полной аппроксимации.

5. Уравнение теплопроводности решается по сеточным областям с обменом граничными условиями на внутренних границах. В качестве внутренних граничных условий между сеточными областями используются *псевдоинварианты*, представляющие собой комбинации теплового потока и температуры [12]. Методика расчета внутренних граничных условий следует непосредственно из метода РОМБ.

### Постановка задачи

Рассматривается трехмерное уравнение теплопроводности, записанное в криволинейной системе координат  $(q^1, q^2, q^3)$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho G E) + \frac{\partial}{\partial q^m}(S_m) = \rho G Q, \quad (1)$$

$$S_m = -\chi \frac{1}{G} \left( r^2 g_{mk} \frac{\partial T}{\partial q^k} \right), \quad m = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где  $E(\rho, T)$  — внутренняя энергия;  $\chi(\rho, T)$  — коэффициент теплопроводности;  $T$  — температура;  $\rho$  — плотность;  $Q$  — независимый источник;  $S_m = r \sqrt{g_{mm}} (\vec{n}_m \cdot \vec{S})$  — нормальная составляющая теплового потока к поверхности  $q^m$  с точностью до множителя  $r \sqrt{g_{mm}}$ , представляющего собой элементарную площадь на поверхности  $q^m$ ;  $G$  — якобиан преобразования. В уравнениях (1), (2) по совпадающим индексам проводится суммирование ( $m, k = 1, 2, 3$ ).

При выводе уравнений (1), (2) в качестве исходного уравнения было взято уравнение теплопроводности, записанное в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{r\rho} \left( \frac{\partial}{\partial r}(rS_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(S_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(rS_z) \right) &= Q, \\ S_r = -\chi \frac{\partial T}{\partial r}, \quad S_\varphi = -\chi \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \quad S_z = -\chi \frac{\partial T}{\partial z}. \end{aligned}$$

Криволинейные координаты  $q^1, q^2, q^3$  связаны с цилиндрическими координатами  $r, \varphi, z$  соотношениями

$$r = r(q^1, q^2, q^3); \quad \varphi = \varphi(q^2); \quad z = z(q^1, q^2, q^3).$$

Данное отображение будем считать гладким и невырожденным. Для определенности будем полагать, что пространство цилиндрических координат и пространство криволинейных координат одинаково ориентированы, т. е. якобиан преобразования  $G$  больше нуля.

В (1), (2) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} g_{11} &= (\varphi_2 z_3)^2 + \frac{1}{r^2} (r_3 z_2 - r_2 z_3)^2 + (\varphi_2 r_3)^2; & g_{12} &= \frac{1}{r^2} (r_3 z_2 - r_2 z_3)(r_1 z_3 - r_3 z_1); \\ g_{13} &= -\varphi_2^2 z_1 z_3 + \frac{1}{r^2} (r_3 z_2 - r_2 z_3)(r_2 z_1 - r_1 z_2) - \varphi_2^2 r_1 r_3; \\ g_{21} &= g_{12}; & g_{22} &= \frac{1}{r^2} (r_1 z_3 - r_3 z_1)^2; & g_{23} &= \frac{1}{r^2} (r_1 z_3 - r_3 z_1)(r_2 z_1 - r_1 z_2); \\ g_{31} &= g_{13}; & g_{32} &= g_{23}; & g_{33} &= (\varphi_2 z_1)^2 + \frac{1}{r^2} (r_2 z_1 - r_1 z_2)^2 + (\varphi_2 r_1)^2; \\ G &= r\varphi_2\sigma, \quad \sigma = r_1 z_3 - r_3 z_1; & r_m &= \frac{\partial r}{\partial q^m}, \quad z_m = \frac{\partial z}{\partial q^m}, \quad \varphi_m = \frac{\partial \varphi}{\partial q^m}, \quad m = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Для системы уравнений (1), (2) в области  $D$  трехмерного пространства  $\{\vec{R}\}$ , ограниченной замкнутой поверхностью  $\Sigma$ , решается смешанная задача Коши при следующих начальных и граничных условиях:

$$T(\vec{R}, t) \Big|_{t=t^0} = T^0(\vec{R});$$

$$\alpha T + \beta (\vec{S} \cdot \vec{n}) = \gamma(t) |_{\vec{R} \in \Sigma},$$

где  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к поверхности  $\Sigma$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  — параметры, с помощью которых можно моделировать различные граничные условия.

### Разностная сетка, геометрические величины

Введем сетку по времени  $t^n, n = 0, 1, 2, \dots, N$ ; шаг сетки  $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ . Область  $D$  трехмерного пространства, где ищется решение краевой задачи, по переменной  $\varphi$  разбивается полуплоскостями  $\varphi(q^2) = \text{const}: \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots, \varphi_K$  (рис. 1,а) (в общем случае  $\varphi_0 = 0, \varphi_K = 2\pi$ ); шаг сетки  $\Delta\varphi_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k$ . Полуплоскость, проходящую посередине между полуплоскостями  $\varphi_k$  и  $\varphi_{k+1}$ , будем обозначать  $\varphi_{k+1/2} = \frac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_{k+1})$  (см. рис. 1,а).

Будем полагать, что координаты  $q^1 = \text{const}$  и  $q^3 = \text{const}$  являются линиями сетки  $i = \text{const}, j = \text{const}$ . В каждой полуплоскости  $k + 1/2$  сетка задается цилиндрическими координатами вершин четырехугольных ячеек  $(r_{i,j}, z_{i,j})_{k+1/2}, i = 0, 1, \dots, I, j = 0, 1, \dots, J$  (рис. 2,а), на которые разбиты полуплоскости. На рис. 2,б изображена сетка на плоскости номеров  $(i, j)$ . Отметим, что при замене и преобразовании координат правая система координат переходила в правую систему:

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (r, \varphi, z) \rightarrow (q^1, q^2, q^3) \rightarrow (i, k, j).$$



Рис. 1. Схема расположения полуплоскостей  $\varphi(q^2) = \text{const}$  и ячейки (обозначение пунктиром) (а) и структура соответствующей ячейки в пространстве  $(q^1, q^2, q^3)$  (б)

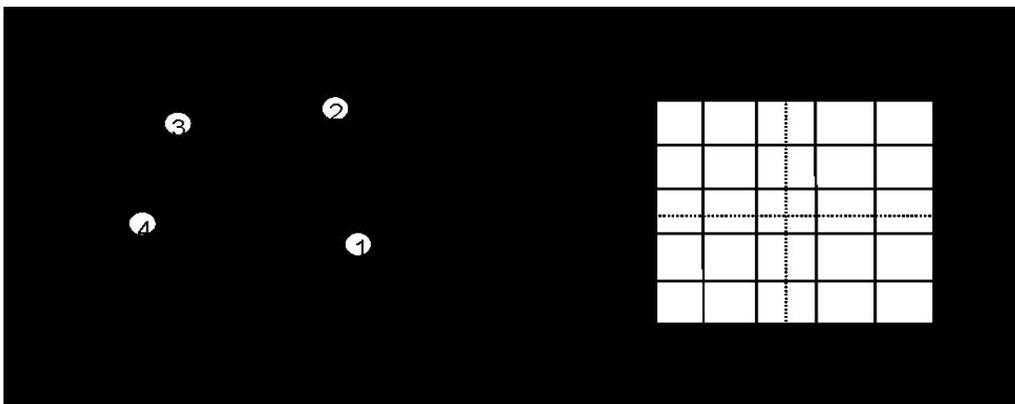


Рис. 2. Ячейка сетки на полуплоскости  $k + 1/2$  (а) и соответствующая ей ячейка сетки на плоскости номеров  $(i, j)$  (б)

Сделаем еще одно замечание:  $i = \text{const}$ ,  $j = \text{const}$  являются поверхностями в трехмерном пространстве (квазиконические, квазисферические, квазицилиндрические поверхности). Каждая из полуплоскостей  $k + 1/2$  может быть разбита на несколько сеточных областей, внутри которых сетка регулярная, т. е. топологически эквивалентна прямоугольной сетке. Структура сеток во всех полуплоскостях одинаковая. Линии сетки всех полуплоскостей, выходящие на ось  $z$ , пересекаются в одной точке. Схематично ячейка в пространстве  $(q^1, q^2, q^3)$  с определением в ней сеточных величин изображена на рис. 1,б.

Для удобства дальнейшего изложения введем некоторые обозначения и укажем сеточные функции  $(T, S_1, S_2, S_3)$ , которые будут использованы в разностной схеме.

Для сокращения записи будем применять следующие обозначения:

$$\begin{aligned} T^n &= T_{i+1/2, k+1/2, j+1/2}^n; & (T, S_1)_i &= (T, S_1)_{i, k+1/2, j+1/2}; \\ (T, S_2)_k &= (T, S_2)_{i+1/2, k, j+1/2}; & (T, S_3)_j &= (T, S_3)_{i+1/2, k+1/2, j}; \\ (S_1)_{i+1/2} &= (S_1)_{i+1/2, k+1/2, j+1/2}; & (S_2)_{k+1/2} &= (S_2)_{i+1/2, k+1/2, j+1/2}; \\ (S_3)_{j+1/2} &= (S_3)_{i+1/2, k+1/2, j+1/2}; \\ \Delta_\zeta(\bullet) &= (\bullet)_{\zeta+1} - (\bullet)_\zeta, & (\bullet)_{\zeta+1/2} &= \frac{(\bullet)_\zeta + (\bullet)_{\zeta+1}}{2}, \end{aligned}$$

где  $\zeta$  — любой индекс;  $(\bullet)$  — любое выражение, в том числе с индексами (индексы перестановочны).

Напомним, что сетка задается цилиндрическими координатами вершин ячеек  $(r_{i,j}, z_{i,j})_{k+1/2}$ . В качестве примера приведем несколько геометрических величин с индексами:

$$\begin{aligned} x_{i, j+1/2, k+1/2} &= (x_{i, k+1/2})_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left( (x_{i, k+1/2})_j + (x_{i, k+1/2})_{j+1} \right); \\ x_{i+1/2, j, k+1/2} &= (x_{j, k+1/2})_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left( (x_{j, k+1/2})_i + (x_{j, k+1/2})_{i+1} \right); \\ \Delta_i(x_{j, k+1/2}) &= (x_{j, k+1/2})_{i+1} - (x_{j, k+1/2})_i; \\ \Delta_j(x_{i, k+1/2}) &= (x_{i, k+1/2})_{j+1} - (x_{i, k+1/2})_j. \end{aligned}$$

При построении разностной схемы потребуются геометрические величины с целым индексом  $k$ . Определять их будем интерполяцией по следующей формуле:

$$x_k = \frac{\Delta\varphi_{k-1}}{\Delta\varphi_{k-1} + \Delta\varphi_k} x_{k-1/2} + \frac{\Delta\varphi_k}{\Delta\varphi_{k-1} + \Delta\varphi_k} x_{k+1/2}.$$

В вышеприведенных формулах под  $x$  понимаются величины  $r$ ,  $z$  и производные от них.

Площадь ячейки на плоскости  $k = \text{const}$ :

$$S_{i,j} = \int_{D_{i,j}} \sigma dq^1 dq^3 = \int_{D_{i,j}} \left( \frac{\partial r}{\partial q^1} \frac{\partial z}{\partial q^3} - \frac{\partial r}{\partial q^3} \frac{\partial z}{\partial q^1} \right) dq^1 dq^3 = \frac{1}{2} \left[ (r_2 - r_4)(z_1 - z_3) + (r_3 - r_1)(z_2 - z_4) \right].$$

Объем ячейки при  $k = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} V_{i,j} &= \int_{D_{i,j}} r \sigma dq^1 dq^3 = \frac{1}{6} (r_1 + r_2 + r_3) [r_1(z_3 - z_2) + r_2(z_1 - z_3) + r_3(z_2 - z_1)] + \\ &+ \frac{1}{6} (r_1 + r_3 + r_4) [r_1(z_4 - z_3) + r_3(z_1 - z_4) + r_4(z_3 - z_1)]. \end{aligned}$$

Объем пространственной ячейки:

$$V_{i,j,k} = \int_{V_{i,j,k}} r \sigma \varphi_2 dq^1 dq^2 dq^3 = \Delta\varphi_k V_{i,j}.$$

### Разностная схема

Применяя неявную аппроксимацию по  $t$  и интегрируя (1), (2) по ячейке фазового объема  $[t^n, t^{n+1}] \times D_{i,j} \times [\varphi_k, \varphi_{k+1}]$ , получаем

$$M \frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t^n} + \Delta_i (S_1)^{n+1} + \Delta_k (S_2)^{n+1} + \Delta_j (S_3)^{n+1} = M(Q)^{n+1} = \widehat{Q}; \quad (3)$$

$$(S_1)_{i+1/2}^{n+1} + \frac{\chi^{n+1}}{V_{i,j,k}} (A_{11} \Delta_i (T^{n+1}) + A_{12} \Delta_k (T^{n+1}) + A_{13} \Delta_j (T^{n+1})) = 0; \quad (4)$$

$$(S_2)_{k+1/2}^{n+1} + \frac{\chi^{n+1}}{V_{i,j,k}} (A_{21} \Delta_i (T^{n+1}) + A_{22} \Delta_k (T^{n+1}) + A_{23} \Delta_j (T^{n+1})) = 0; \quad (5)$$

$$(S_3)_{j+1/2}^{n+1} + \frac{\chi^{n+1}}{V_{i,j,k}} (A_{31} \Delta_i (T^{n+1}) + A_{32} \Delta_k (T^{n+1}) + A_{33} \Delta_j (T^{n+1})) = 0; \quad (6)$$

$$i = 0, 1, \dots, I-1, \quad j = 0, 1, \dots, J-1, \quad k = 0, 1, \dots, K-1,$$

где

$$M = \rho V_{i,j,k};$$

$$A_{11} = (r^2 g_{11})_h = r^2 \Delta \varphi_k^2 \left[ (\Delta_j(z))^2 + (\Delta_j(r))^2 \right] + \left( \Delta_j(r) \Delta_k(z) - \Delta_j(z) \Delta_k(r) \right)^2;$$

$$A_{22} = (r^2 g_{22})_h = (S_{i,j})^2;$$

$$A_{33} = (r^2 g_{33})_h = r^2 \Delta \varphi_k^2 \left[ (\Delta_i(z))^2 + (\Delta_i(r))^2 \right] + \left( \Delta_i(z) \Delta_k(r) - \Delta_i(r) \Delta_k(z) \right)^2;$$

$$A_{12} = A_{21} = (r^2 g_{12})_h = (r^2 g_{21})_h = \left( \Delta_j(r) \Delta_k(z) - \Delta_j(z) \Delta_k(r) \right) \left( \Delta_i(r) \Delta_j(z) - \Delta_i(z) \Delta_j(r) \right);$$

$$A_{13} = A_{31} = (r^2 g_{13})_h = (r^2 g_{31})_h = -r^2 \Delta \varphi_k^2 \left( \Delta_i(z) \Delta_j(z) + \Delta_i(r) \Delta_j(r) \right) + \\ + \left( \Delta_j(r) \Delta_k(z) - \Delta_j(z) \Delta_k(r) \right) \left( \Delta_i(z) \Delta_k(r) - \Delta_i(r) \Delta_k(z) \right);$$

$$A_{23} = A_{32} = (r^2 g_{23})_h = (r^2 g_{32})_h = \left( \Delta_i(r) \Delta_j(z) - \Delta_i(z) \Delta_j(r) \right) \left( \Delta_i(z) \Delta_k(r) - \Delta_i(r) \Delta_k(z) \right).$$

Коэффициенты  $A_{mk}$  аппроксимируют выражения  $r^2 g_{mk}$  в середине ячейки. В формулах для коэффициентов  $A_{mk}$  использованы обозначения  $\Delta_\xi(x) = \Delta_\xi(x_{\zeta+1/2, \theta+1/2})$ , где  $x$  принимает значения  $r, z, a, \xi, \zeta, \theta$  — значения индексов  $i, j, k$ .

В уравнениях (3)—(6) сеточные функции  $S_m$  аппроксимируют поток энергии в единицу времени через поверхность  $q^m$ , ограниченную двумя другими парами координатных поверхностей, образующими сеточную структуру. Например,  $(S_1)_{i,k+1/2,j+1/2}^{n+1}$  — поток энергии в единицу времени через поверхность  $q_i^1$ , ограниченную координатными поверхностями  $[q_k^2, q_{k+1}^2]$ ,  $[q_j^3, q_{j+1}^3]$ .

Граничные условия аппроксимируются следующим образом:

$$\alpha_l (T)_l^{n+1} \pm \beta_l \frac{(S_m)_l^{n+1}}{(r \sqrt{g_{mm}})_l} = \gamma_l^{n+1}, \quad m = 1, \quad l = 0, I; \quad m = 2, \quad l = 0, K; \quad m = 3, \quad l = 0, J.$$

### Решение системы разностных уравнений

В силу нелинейности системы (3)—(6) ( $\chi$  и  $E$  зависят от температуры) возникает необходимость в итерационном процессе. По нелинейности  $\chi$  применим метод простой итерации ( $\mu$ -итерации), т. е.  $\chi$  будем брать с предыдущей итерации:

$$\chi^\mu = \chi(\rho, T^\mu).$$

Для решения системы уравнений (3)—(6) применим ИМСП [11, 12, 15], совмещая итерации с итерациями по нелинейности  $\chi$ . ИМСП в свое время был применен для решения системы разностных

уравнений в двумерном случае при использовании схемы РОМБ. Этот метод позволяет вести счет с крупным шагом по времени, при этом схема обладает свойством полной аппроксимации.

Трехмерная разностная задача сводится к серии одномерных задач, решаемых прогонками по каналам:

1) счет по каналам  $j + 1/2, k + 1/2$  ( $j, k$  фиксированы,  $i$  меняется):

$$M \frac{E^{\mu+1/3} - E^n}{\Delta t^n} + \Delta_i(S_1^{\mu+1/3}) + \Delta_k(S_2^\mu) + \Delta_j(S_3^{\mu-1/3}) = \widehat{Q},$$

$$(S_1)_{i+1/2}^{\mu+1/3} + \frac{1}{V_{i,j,k}} \left( \widetilde{\chi}_{i+1/2}^\mu A_{11} \Delta_i (T^{\mu+1/3}) + \widetilde{\chi}_{k+1/2}^{\mu-1} A_{12} \Delta_k (T^\mu) + \widetilde{\chi}_{j+1/2}^{\mu-1} A_{13} \Delta_j (T^{\mu-1/3}) \right) = 0, \quad (7)$$

$$i = 0, 1, \dots, I-1;$$

$$\alpha_i(T)_i^{\mu+1/3} \pm \beta_i \frac{(S_1)_i^{\mu+1/3}}{(r\sqrt{g_{11}})_i} = \gamma_i^{n+1}, \quad i = 0, I.$$

2) счет по каналам  $i + 1/2, k + 1/2$  ( $i, k$  фиксированы,  $j$  меняется):

$$M \frac{E^{\mu+2/3} - E^n}{\Delta t^n} + \Delta_i(S_1^{\mu+1/3}) + \Delta_k(S_2^\mu) + \Delta_j(S_3^{\mu+2/3}) = \widehat{Q},$$

$$(S_3)_{j+1/2}^{\mu+2/3} + \frac{1}{V_{i,j,k}} \left( \widetilde{\chi}_{i+1/2}^\mu A_{31} \Delta_i (T^{\mu+1/3}) + \widetilde{\chi}_{k+1/2}^{\mu-1} A_{32} \Delta_k (T^\mu) + \widetilde{\chi}_{j+1/2}^\mu A_{33} \Delta_j (T^{\mu+2/3}) \right) = 0, \quad (8)$$

$$j = 0, 1, \dots, J-1;$$

$$\alpha_j(T)_j^{\mu+2/3} \pm \beta_j \frac{(S_3)_j^{\mu+2/3}}{(r\sqrt{g_{33}})_j} = \gamma_j^{n+1}, \quad j = 0, J.$$

3) счет по каналам  $i + 1/2, j + 1/2$ : ( $i, j$  фиксированы,  $k$  меняется).

$$M \frac{E^{\mu+1} - E^n}{\Delta t^n} + \Delta_i(S_1^{\mu+1/3}) + \Delta_k(S_2^{\mu+1}) + \Delta_j(S_3^{\mu+2/3}) = \widehat{Q},$$

$$(S_2)_{k+1/2}^{\mu+1} + \frac{1}{V_{i,j,k}} \left( \widetilde{\chi}_{i+1/2}^\mu A_{21} \Delta_i (T^{\mu+1/3}) + \widetilde{\chi}_{k+1/2}^\mu A_{22} \Delta_k (T^{\mu+1}) + \widetilde{\chi}_{j+1/2}^\mu A_{23} \Delta_j (T^{\mu+2/3}) \right) = 0, \quad (9)$$

$$k = 0, 1, \dots, K-1;$$

$$\alpha_k(T)_k^{\mu+1} \pm \beta_k \frac{(S_2)_k^{\mu+1}}{(r\sqrt{g_{22}})_k} = \gamma_k^{n+1}, \quad k = 0, K.$$

В выражениях (7)–(9) у величин с итерационными индексами  $\mu, \mu + 1/3, \mu + 2/3, \mu + 1$  опущен индекс  $n + 1$ . Аппроксимационные коэффициенты теплопроводности  $\widetilde{\chi}_{i+1/2}, \widetilde{\chi}_{k+1/2}, \widetilde{\chi}_{j+1/2}$  будут представлены ниже.

На каждом этапе по нелинейности  $E$  применяется метод Ньютона ( $\nu$ -итерации).

Рассмотрим решение системы (7) на первом этапе. Система уравнений (7) представляет собой нелинейную систему. Решать ее будем методом итераций с линеаризацией внутренней энергии:

$$E^{\nu+1} = E^\nu + E_T^\nu (T^{\nu+1} - T^\nu).$$

Линеаризованная система принимает вид

$$T_{i+1/2}^{\nu+1} + \frac{\Delta t^n}{ME_T^\nu} \Delta_i(S_1^{\nu+1}) = \frac{\Delta t^n}{ME_T^\nu} \left( \widehat{Q} - \Delta_k(S_2^\mu) - \Delta_j(S_3^\mu) \right) + \frac{1}{ME_T^\nu} \left[ ME^n + M(E_T^\nu T^\nu - E^\nu) \right],$$

$$(S_1)_{i+1/2}^{\nu+1} + \frac{(\widetilde{\chi}^\mu)_{i+1/2}^\nu}{V_{i,j,k}} A_{11} \Delta_i(T^{\nu+1}) = -\frac{1}{V_{i,j,k}} \left( \widetilde{\chi}_{k+1/2}^{\mu-1} A_{12} \Delta_k(T^\mu) + \widetilde{\chi}_{j+1/2}^{\mu-1} A_{13} \Delta_j(T^{\mu-1/3}) \right), \quad (10)$$

$$i = 0, 1, \dots, I-1;$$

$$\alpha_i T_i^{\nu+1} \pm \frac{\beta_i}{(r\sqrt{g_{11}})_i} (S_1)_i^{\nu+1} = \gamma_i^{n+1}, \quad i = 0, I; \quad (11)$$

$$E^\nu = E(\rho, T^\nu); \quad E_T^\nu = \frac{\partial E(\rho, T^\nu)}{\partial T};$$

$$T^{\nu=0} = T^\mu.$$

Система разностных уравнений (10), (11) незамкнута. Для ее замыкания нужно задавать соотношения, связывающие температуру и компоненты вектора теплового потока с целыми и полуцелыми индексами. Будем брать следующие соотношения связи (аналог схемы 2 из работы [14]):

$$\begin{aligned} T_{i+1/2}^{\nu+1} &= \frac{1}{2}(T_i + T_{i+1})^{\nu+1} + \delta_{i+1/2} \Delta_i (S_1)^{\nu+1}; \\ (S_1)_{i+1/2}^{\nu+1} &= \frac{1}{2} \left( (S_1)_i + (S_1)_{i+1} \right)^{\nu+1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \delta_{i+1/2} &= \frac{V_{i,j,k}}{4(\tilde{\chi}^\mu)_{i+1/2}^\nu A_{11}}, \quad (\tilde{\chi}^\mu)_{i+1/2}^\nu = \chi^\mu + \frac{\Lambda \chi_{i+1/2}^\mu}{4(1 + 2K_{i+1/2}^\nu)}, \\ K_{i+1/2}^\nu &= \frac{\chi^\mu \Delta t^n A_{11}}{ME_T^\nu V_{i,j,k}}, \quad \Lambda \chi_{i+1/2}^\mu = \chi_\pi - 2\chi_{i+1/2}^\mu + \chi_\pi, \\ \chi_\pi &= \begin{cases} \chi_{i-1/2}^\mu & \text{при } 1 \leq i \leq I-2 \quad (\text{т. е. во внутренних точках}); \\ \chi_{1/2}^\mu & \text{при } i = 0, \quad \text{если задан поток на левой границе}; \\ \chi(\rho_{1/2}, T_0^{\text{rp}}) & \text{при } i = 0, \quad \text{если задана температура на левой границе} \\ & \text{и в случае внутренних границ при счете по областям.} \end{cases} \end{aligned}$$

Значения  $\chi_\pi$  выбираются аналогично, с той лишь разницей, что во внутренних точках (при  $1 \leq i \leq I-2$ )  $\chi_\pi = \chi_{i+3/2}^\mu$ .

Подставляя соотношения связи (12) в (10), получаем систему разностных уравнений относительно температур и тепловых потоков, определенных на гранях ячеек:

$$T_i + T_{i+1} - c_i (S_1)_i + c_i (S_1)_{i+1} = f_i^0, \quad (13)$$

$$-a_i T_i + a_i T_{i+1} + (S_1)_i + (S_1)_{i+1} = f_i^1, \quad i = 0, 1, \dots, I-1;$$

$$\alpha_0 T_0 + \beta_0 (S_1)_0 = \gamma_0^{n+1}; \quad \alpha_I T_I - \beta_I (S_1)_I = \gamma_I^{n+1}. \quad (14)$$

В выражениях (13), (14) у температур и тепловых потоков опущен верхний индекс  $\nu + 1$ .

Для решения системы уравнений (13), (14) применяется потоковый вариант метода прогонки [10], свободный от накопления ошибок и потерь точности во всей области изменения коэффициента теплопроводности. После вычисления  $T_i^{\nu+1}$ ,  $(S_1)_i^{\nu+1}$  ( $i = 0, 1, \dots, I-1$ ) значения  $T_{i+1/2}^{\nu+1}$  находятся по первой формуле (12). Итерации  $\nu$  доводятся до выполнения условия  $\left| T_{i+1/2}^{\nu+1} - T_{i+1/2}^\nu \right| \leq \leq \varepsilon_{\text{сх}} \left( 1 + \left| T_{i+1/2}^\nu \right| \right)$ ,  $i = 0, 1, \dots, I-1$ . При завершении  $\nu$ -итераций полагаем  $T^{\mu+1/3} = T^{\bar{\nu}}$ , где  $\bar{\nu}$  — номер последней итерации.

Система уравнений (8) на втором этапе решается аналогично системе (7). При завершении итераций  $\nu$  полагаем  $T^{\mu+2/3} = T^{\bar{\nu}}$ .

Если границы  $k = 0$  и  $k = K$  являются внешними, то система разностных уравнений на третьем этапе приводится к такому же виду, что и система (13), (14) на первом этапе. В том случае, когда сетка по  $\varphi$  меняется от 0 до  $2\pi$ , имеет место периодичность граничных условий:

$$T_{k=0} = T_{k=K}; \quad (S_2)_{k=0} = (S_2)_{k=K} \quad (15)$$

и система уравнений типа (13) с граничными условиями (15) решается с применением потокового варианта циклической прогонки, которая строится на базе потоковой прогонки [10] по аналогии с построением циклической прогонки для трехточечных разностных схем [19].

Систему (13) на третьем этапе запишем в матричном виде:

$$A_k \vec{T}_k + B_k \vec{S}_k = \vec{F}_k, \quad k = 0, 1, \dots, K-1, \quad (16)$$

где

$$\vec{T}_k = \begin{pmatrix} T_k \\ T_{k+1} \end{pmatrix}; \quad \vec{S}_k = \begin{pmatrix} S_k \\ S_{k+1} \end{pmatrix}; \quad \vec{F}_k = \begin{pmatrix} f_k^0 \\ f_k^1 \end{pmatrix}; \quad A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a_k & a_k \end{pmatrix}; \quad B_k = \begin{pmatrix} -c_k & c_k \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты и правая часть периодичны:

$$c_k = c_{k+K}; \quad a_k = a_{k+K}; \quad f_k^0 = f_{k+K}^0; \quad f_k^1 = f_{k+K}^1; \\ T_0 = T_K; \quad S_0 = S_K.$$

Решение задачи (16) будем искать в виде линейной комбинации:

$$T_k = U_k + u_k T_0 + p_k S_{K-1}, \quad S_k = W_k + w_k T_0 + q_k S_{K-1}, \quad k = 0, 1, \dots, K-1, \quad (17)$$

где

$$U_0 = 0, \quad u_0 = 1, \quad p_0 = 0; \quad W_{K-1} = 0, \quad w_{K-1} = 0, \quad q_{K-1} = 1.$$

Сеточные функции  $U_k, W_k$  — решения неоднородной задачи с нулевыми граничными условиями:

$$A_k \vec{U}_k + B_k \vec{W}_k = \vec{F}_k, \quad k = 0, 1, \dots, K-2; \\ U_0 = 0; \quad W_{K-1} = 0, \quad (18)$$

а  $u_k, p_k, w_k, q_k$  — решения однородных задач:

$$A_k \vec{u}_k + B_k \vec{w}_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, K-2; \\ u_0 = 1; \quad w_{K-1} = 0; \quad (19)$$

$$A_k \vec{p}_k + B_k \vec{q}_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, K-2; \\ p_0 = 0; \quad q_{K-1} = 1. \quad (20)$$

Выясним, при каких условиях  $T_k$  и  $S_k$ , определяемые формулами (17), являются решениями задачи (13), (15).

Умножим (19) на  $T_0$ , (20) — на  $S_{K-1}$  и затем сложим их с (18). Учитывая (17), получаем, что  $S_k$  и  $T_k$  удовлетворяют уравнениям системы (16) при  $k = 0, 1, \dots, K-2$ . Если  $S_k$  и  $T_k$ , определяемые соотношениями (17), будут удовлетворять (16) при  $k = K-1$ , то задача будет решена. Подставим (17) в (16) при  $k = K-1$  и, учитывая, что  $T_0 = T_K, S_0 = S_K$ , получим

$$(1 + u_{K-1} + c_{K-1} w_0) T_0 + (p_{K-1} - c_{K-1} + c_{K-1} q_0) S_{K-1} = f_{K-1}^0 - U_{K-1} - c_{K-1} W_0; \\ (a_{K-1} - a_{K-1} u_{K-1} + w_0) T_0 + (1 - a_{K-1} p_{K-1} + q_0) S_{K-1} = f_{K-1}^1 + a_{K-1} U_{K-1} - W_0. \quad (21)$$

Решение системы (21) имеет вид

$$T_0 = \frac{1}{D} [(f_{K-1}^0 - U_{K-1} - c_{K-1} W_0) (1 - a_{K-1} p_{K-1} + q_0) - \\ - (f_{K-1}^1 + a_{K-1} U_{K-1} - W_0) (p_{K-1} - c_{K-1} + c_{K-1} q_0)]; \quad (22)$$

$$S_{K-1} = \frac{1}{D} [(f_{K-1}^1 + a_{K-1}U_{K-1} - W_0)(1 + u_{K-1} + c_{K-1}w_0) - (f_{K-1}^0 - U_{K-1} - c_{K-1}W_0)(a_{K-1} - a_{K-1}u_{K-1} + w_0)], \quad (23)$$

где

$$D = \begin{vmatrix} 1 + u_{K-1} + c_{K-1}w_0 & p_{K-1} - c_{K-1} + c_{K-1}q_0 \\ a_{K-1} - a_{K-1}u_{K-1} + w_0 & 1 - a_{K-1}p_{K-1} + q_0 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, если выбрать  $T_0$  и  $S_{K-1}$  по формулам (22), (23) то выражения (16) при всех  $k$ ,  $k = 0, \dots, K-1$ , будут выполнены и решение задачи (13) можно найти по формулам (17).

Опишем последовательность действий при решении системы уравнений (16):

- 1) с использованием потокового варианта метода прогонки [10] решаем задачи (18)–(20) и находим сеточные функции  $U_k, u_k, p_k, W_k, w_k, q_k, k = 0, 1, \dots, K-2$ ;
- 2) по формулам (22), (23) вычисляем  $T_0$  и  $S_{K-1}$ ;
- 3) по формулам (17) находим  $T_k, S_k, k = 0, 1, \dots, K-1$ .

В результате счета третьего этапа получаем  $T^{\mu+1}$  и итерация  $\mu$  завершается. Итерации  $\mu$  доводятся до выполнения условия  $|T^{\mu+1} - T^\mu| \leq \varepsilon_{\text{сх}}^\mu (1 + |T^\mu|)$ .

После завершения  $\mu$ -итераций значение  $E^{n+1}$  вычисляется по уравнению состояния  $E^{n+1} = E(\rho, T^\mu)$ , где  $\bar{\mu}$  — номер последней  $\mu$ -итерации.

**Счет по областям.** Выше рассмотрена методика решения задачи теплопроводности в области, покрытой регулярной сеткой. На практике, как правило, для удовлетворительного описания физической системы используются несколько сеточных областей, которые заполняют пространство без зазоров. В результате уравнение теплопроводности решается по областям с обменом граничными условиями на внутренних границах. Обмен граничными условиями может осуществляться как на итерациях, так и на шагах по времени. Обмен граничными условиями на итерациях позволяет свести к минимуму погрешность решения из-за счета по областям.

Решение уравнения теплопроводности по областям рассматривалось во многих работах (см., например, [12, 16–18]). В работе [12] в качестве граничных условий на внутренних границах предложено использовать определенные комбинации температуры и теплового потока (псевдоинварианты  $S \pm aT$ ,  $a = \sqrt{\chi/\Delta t}$ , и счетные псевдоинварианты  $S + (X_{\text{лп}}/Y_{\text{лп}})T$ ,  $S + (X_{\text{пл}}/Y_{\text{пл}})T$ ;  $X_{\text{лп}}, Y_{\text{лп}}, X_{\text{пл}}, Y_{\text{пл}}$  — прогоночные коэффициенты прогонок слева направо и справа налево), которые следуют непосредственно из метода РОМБ. Использование в качестве внутренних граничных условий псевдоинвариантов (или счетных псевдоинвариантов) обеспечивает безусловную устойчивость схемы.

Методика решения уравнения теплопроводности по областям, изложенная в работе [12], обобщена на трехмерный случай. Обмен граничными условиями осуществляется на итерациях, совмещенных с итерациями по нелинейности коэффициента теплопроводности.

### Численные расчеты

Рассматривается сфера радиусом  $R = 1$ , коэффициент теплопроводности  $\chi = 4T^4$ . На внешней поверхности сферы задается температура  $T_{R=1} = 1$ . Расчеты проводились с шагом по времени  $\Delta t = 0,001$  в двухобластном и четырехобластном вариантах. В двухобластном варианте области примыкают друг к другу по полной границе  $R_{\text{гр}} = 0,5$ , а в четырехобластном варианте — по участкам границ (сферические и конические поверхности).

Далее в обозначении  $A \times B \times C$  для пространственных сеток  $A$  задает число точек по радиусу;  $B$  — число точек по углу в листе;  $C$  — число листов.

Расчеты проводились на неортогональных сетках:

1. В двухобластном варианте *центр* сетки размещается в точке  $(0,2, 0,2, 0,2)$ , т. е. сдвинут на  $0,2$  по оси  $Z$ , а ось  $Z$  сдвинута на  $0,2\sqrt{2}$  относительно центра сферы. Число точек —  $50 \times 100 \times 100$  в области 1,  $50 \times 100 \times 100$  — в области 2. Сетка на двух листах, развернутых относительно друг друга на  $180^\circ$ , схематично представлена на рис. 3.

2. В четырехобластной задаче центр и ось  $Z$  сдвинуты относительно центра сферы так же, как в двухобластной задаче. Сетка на двух листах, развернутых относительно друг друга на  $180^\circ$ , схематично представлена на рис. 4. Параметры сеток: область 1 —  $50 \times 10 \times 30$ , область 2 —  $50 \times 38 \times 30$ , область 3 —  $50 \times 38 \times 30$ , область 4 —  $50 \times 12 \times 30$ .

На рис. 5, 6 представлены профили температуры на момент времени  $t = 0,16$  вдоль лучей, исходящих из физического центра сферы, схематично указанных на рис. 3 и 4. Результаты расчетов сравниваются с *точным* решением, полученным по одномерной программе на подробной сетке. Отметим, что тепловая волна проходит через границы областей, ось  $Z$  и границу типа *центр*.

Численные решения, полученные на неортогональных сетках как в двухобластном, так и в четырехобластном варианте, хорошо согласуются с точным решением. Результаты расчетов демонстрируют действенность методики и хорошую точность.

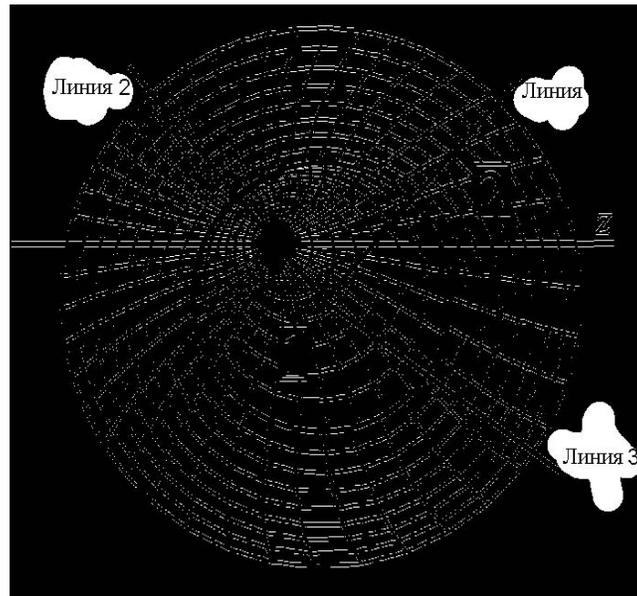


Рис. 3. Схема двухобластного варианта задачи: 1, 2 — номера областей

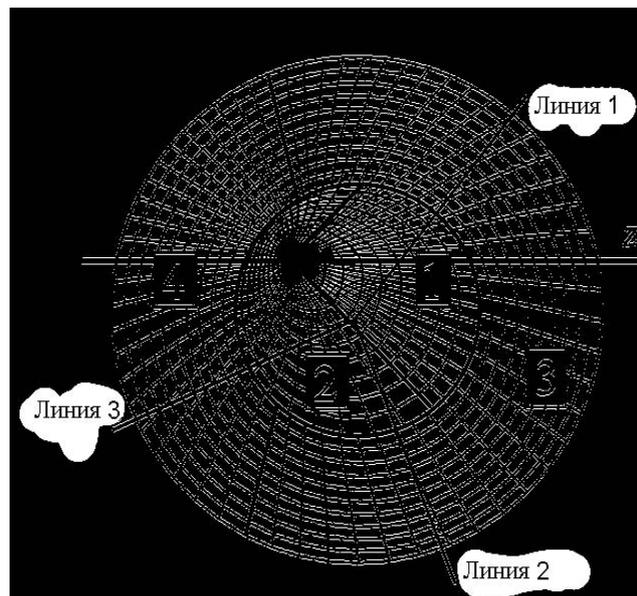


Рис. 4. Схема четырехобластного варианта задачи: 1—4 — номера областей

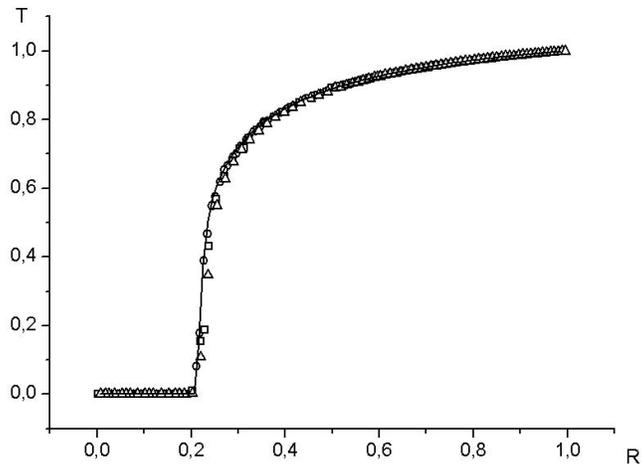


Рис. 5. Профили температуры на момент времени  $t = 0,16$  по радиусу в различных секторах вдоль соответствующих линий (см. рис. 3) в сравнении с точным решением для двухобластного варианта:  $\circ$  — линия 1;  $\square$  — линия 2;  $\triangle$  — линия 3; — — точное решение

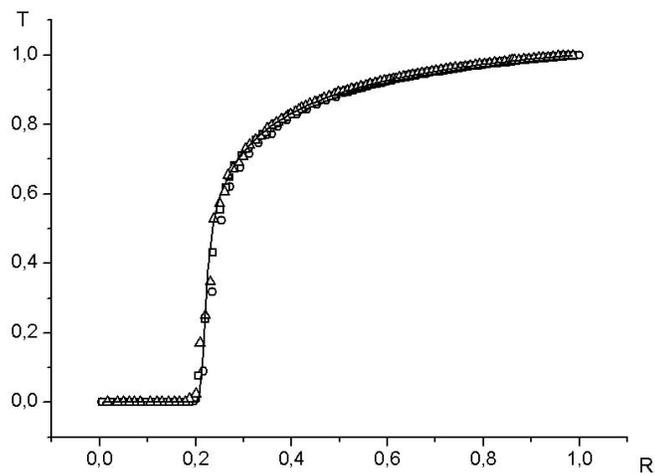


Рис. 6. Профили температуры на момент времени  $t = 0,16$  по радиусу в различных секторах вдоль соответствующих линий (см. рис. 4) в сравнении с точным решением для четырехобластного варианта:  $\circ$  — линия 1;  $\square$  — линия 2;  $\triangle$  — линия 3; — — точное решение

### Список литературы

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
2. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
3. Amsden A., Butler D., O'Rourke P. The KIVA-2 computer program for transient multidimensional chemically reactive flows with sprays // Int. Fuels and Lubricants Meeting and Exposition. Toronto, 1987.
4. Воронин Б. Л., Скрипник С. И., Софронов И. Д. Эйлерово-лагранжева методика численного решения трехмерных нестационарных задач газовой динамики с учетом теплопроводности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1988. Вып. 3. С. 3—8.

5. *Быков А. Н., Воронин Б. Л., Козуб А. Г., Скрыпник С. И., Софронов И. Д., Урм А. В.* Комплекс программ РАМЗЕС расчета трехмерных задач газовой динамики с теплопроводностью // *Технология математического моделирования* / Под ред. В. П. Ильина. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1989. С. 37—41.
6. *Рудько Н. М., Скрыпник С. И.* Методика и программа численного решения трехмерного уравнения теплопроводности по полностью неявной разностной схеме на переменном пространственном шаблоне // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 1999. Вып. 3. С. 74—79.
7. *Софронов И. Д., Винокуров О. А., Змушко В. В. и др.* Комплекс программ МИМОЗА-99 // Там же. Вып. 4. С. 37—41.
8. *Софронов И. Д., Тихомиров Б. П., Баженов С. В. и др.* Приближенные методы расчета лучистого энергопереноса в оптически неоднородных областях сложной формы // Там же. С. 68—75.
9. *Соколов С. С., Панов А. И., Воропинов А. А., Новиков И. Г., Соболев И. В., Ялозо А. В.* Методика ТИМ расчета трехмерных задач механики сплошных сред на неструктурированных многогранных лагранжевых сетках // Там же. 2005. Вып. 3. С. 37—52.
10. *Гаджиев А. Д., Писарев В. Н.* Неявный конечно-разностный метод "РОМБ" для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью // *Журнал вычисл. мат. и мат. физ.* 1979. Т. 19. С. 1288—1303.
11. *Гаджиев А. Д., Писарев В. Н., Шестаков А. А.* Метод расчета двумерных задач теплопроводности на неортогональных сетках // Там же. 1982. Т. 22. № 2. С. 339—347.
12. *Гаджиев А. Д., Писарев В. Н., Рыкованова В. В., Шестаков А. А.* Методика и программа ТОМ 1 для решения двумерного уравнения теплопроводности // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики.* 1985. Вып. 1. С. 53—65.
13. *Писарев В. Н.* Параметрическое семейство схем РОМБ для одномерного уравнения теплопроводности // Там же. 1986. Вып. 2. С. 67—75.
14. *Писарев В. Н.* Параметрическое семейство схем РОМБ для двумерного уравнения теплопроводности // Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1992. Вып. 3. С. 42—48.
15. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
16. *Загускин В. Л., Кондрашов В. Е.* О счете уравнений теплопроводности и газовой динамики прогонкой по отдельным областям // *Докл. АН СССР.* 1965. Т. 163, № 5. С. 1107—1109.
17. *Барышникова К. Н., Змушко В. В.* Устойчивая разностная схема для решения уравнений теплопроводности прогонкой по областям // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики.* 1984. Вып. 2. С. 72—75.
18. *Шагалиев Р. М.* Об одном устойчивом алгоритме раздельного счета по областям двумерного уравнения теплопроводности по узловой разностной схеме // Там же. Вып. 3. С. 25—33.
19. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

Статья поступила в редакцию 01.06.07.

---