УДК 533.9

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ РАЗВИТИЯ МАЛЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕКТРОННОЙ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЕ

А. И. Голубев, В. А. Терехин, Е. В. Уваров
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Получено точное решение линейной задачи Коши о развитии малых поперечных электромагнитных возмущений в электронной плазме со *ступенчатой* невозмущенной функцией распределения электронов по скоростям. Приведены явные зависимости от времени амплитуд электрического и магнитного полей для устойчивых и неустойчивых колебаний. Дано описание способа сглаживания ступенчатого распределения, не приводящего к существенному изменению дисперсионных свойств плазмы. Найденное решение может быть использовано в качестве теста для методик численного моделирования поведения бесстолкновительной плазмы.

Введение

Для тестирования численных методик моделирования динамики плазмы традиционно используются задачи о развитии малых возмущений в пространственно-однородной плазме. При этом, как правило, оценка точности методики производится на основе сравнения вычисленных из линейной теории скоростей роста (или затухания) амплитуд отдельных гармоник и их временных периодов с аналогичными величинами, получаемыми в расчетах. При моделировании продольных колебаний плазмы чаще всего используется задача о затухании Ландау [1—6], при моделировании поперечных колебаний получила распространение задача о развитии вейбелевской неустойчивости [7] в плазме с анизотропным распределением электронов по скоростям [8, 9]. Кроме того, нередко используется задача о свободном движении плазмы [1, 3], на которой проявляются трудности, возникающие при решении кинетического уравнения с использованием дискретной сетки по скоростным переменным.

В данной работе ищется точное решение задачи Коши для развития малых поперечных колебаний в электронном компоненте нерелятивистской плазмы. Ионный фон считается однородным и неподвижным. Решение задачи Коши будет получено для *ступенчатой* функции распределения электронов по скоростям; такие распределения нередко используются при теоретических исследованиях свойств плазмы (см., например, [10]). Найденное решение содержит не только инкременты отдельных пространственных гармоник и их временные периоды, но и временные зависимости амплитуд этих гармоник, которые в известной авторам литературе не определяются. При тестировании численных методик эта информация представляется важной, поскольку позволяет проводить более детальное сравнение численного и аналитического решений.

Постановка задачи Коши

При получении решения задачи Коши будем полагать, что в некоторой декартовой системе координат (x, y, z) функция распределения электронов зависит лишь от переменных t, x, v_x, v_y, v_z, т. е. задача является пространственно одномерной. Кроме того, ограничимся рассмотрением только таких условий, при которых отличными от нуля являются лишь компоненты E_x, E_y напряженности электрического поля и компонента H_z напряженности магнитного поля. В этом случае невозмущенную стационарную функцию распределения f_0 можно считать зависящей лишь от компонент скорости v_x, v_y, полагая, что по переменной v_z проведено интегрирование.

В отсутствие внешних полей система уравнений, описывающих эволюцию малых возмущений в пространственно однородной плазме, имеет вид [11] (используется гауссова система единиц измерения)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{en_0}{m}\left(E_x + \frac{1}{c}H_z v_y\right)\frac{\partial f_0}{\partial v_x} - \frac{en_0}{m}\left(E_y - \frac{1}{c}v_x H_z\right)\frac{\partial f_0}{\partial v_y} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_x = 0; \tag{2}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x}; \tag{3}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}; \tag{4}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 4\pi\rho.$$

В уравнении (1) n_0 — концентрация электронов; функция распределения $f_0(v_x, v_y)$ нормирована условием $\int f_0 d\vec{v} = 1$.

Как обычно, предполагается, что $\int f_0 \vec{v} d\vec{v} = 0$; компоненты плотности тока j_x, j_y связаны с малым возмущением f функции распределения соотношениями

$$j_\alpha = -e\int v_\alpha f d\vec{v} \quad (\alpha = x, y)\,, \tag{5}$$

плотность заряда

$$\rho = -e\int f d\vec{v}. \tag{6}$$

Уравнения (1)—(6) образуют замкнутую систему линейных уравнений, решение которой будем искать на отрезке $0 \le x \le L$, предполагая все величины периодическими функциями от x с периодом L. При этом считается, что при $t = 0$ заданы начальные данные

$$f\,(t=0, x, v_x, v_y) = f_{c0}\,(v_x, v_y)\cos kx + f_{s0}\,(v_x, v_y)\sin kx;$$
$$E_x\,(t=0, x) = e_{c0}\cos kx + e_{s0}\sin kx;$$
$$E_y\,(t=0, x) = E_{c0}\cos kx + E_{s0}\sin kx;$$
$$H_z\,(t=0, x) = h_{c0}\cos kx + h_{s0}\sin kx,$$

где волновой вектор k выбран таким образом, что период $2\pi/k$ в целое число раз меньше L.

Вычисление решения задачи Коши

При принятых начальных и граничных условиях решение уравнений (1)—(6) также будет линейной комбинацией функций $\cos kx$, $\sin kx$ с коэффициентами (e_c, e_s), (E_c, E_s), (h_c, h_s) соответственно для компонент E_x, E_y, H_z, зависящими от времени t, и коэффициентами (f_c, f_s) для функции f, зависящими от t, v_x, v_y. Для этих коэффициентов из (1)—(4) получается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{df_\alpha}{dt} \pm kv_x f_\beta - \frac{en_0}{m}\left(e_\alpha + \frac{1}{c}v_y h_\alpha\right)\frac{\partial f_0}{\partial v_x} - \frac{en_0}{m}\left(E_\alpha - \frac{1}{c}v_x h_\alpha\right)\frac{\partial f_0}{\partial v_y} = 0; \tag{7}$$

$$\frac{de_\alpha}{dt} + 4\pi j_{x\alpha} = 0; \quad \frac{1}{c}\frac{dE_\alpha}{dt} + \frac{4\pi}{c}j_{y\alpha} = \mp kh_\beta; \quad \frac{1}{c}\frac{dh_\alpha}{dt} = \mp kE_\beta; \tag{8}$$

$$j_{x\alpha} = -e\int v_x f_\alpha d\vec{v}, \quad j_{y\alpha} = -e\int v_y f_\alpha d\vec{v}.$$

В этих уравнениях $\alpha = c, s$; $\beta = c, s$; $\beta \neq \alpha$; верхний из знаков $\pm$ или $\mp$ соответствует $\alpha = c$, нижний — $\alpha = s$. Поскольку будут рассматриваться лишь поперечные колебания, положим $e_{c0} = e_{s0} = 0$. Кроме того, предположим, что при $t = 0$ нет возмущений в плотности заряда, т. е.

$$\int f_{c0} d\vec{v} = \int f_{s0} d\vec{v} = 0.$$

Так будет, например, если f_{c0}, f_{s0} — нечетные функции v_y. В этом случае и при $t > 0$ согласно (7) f_c, f_s будут нечетными функциями v_y и $e_c = e_s = 0$.

Применим к оставшимся уравнениям для f_α, E_α, h_α ($\alpha = c, s$) преобразование Лапласа по t. Оставляя для образов те же обозначения, что и для оригиналов, из (7), (8) имеем для них систему линейных алгебраических уравнений

$$pf_\alpha - f_{\alpha 0} \pm kv_x f_\beta - \frac{en_0}{mc}h_\alpha\left(v_y\frac{\partial f_0}{\partial v_x} - v_x\frac{\partial f_0}{\partial v_y}\right) - \frac{en_0}{m}E_\alpha\frac{\partial f_0}{\partial v_y} = 0; \tag{9}$$

$$pE_\alpha - E_{\alpha 0} + 4\pi j_{y\alpha} = \mp ckh_\beta; \tag{10}$$

$$ph_\alpha - h_{\alpha 0} = \mp ckE_\beta, \tag{11}$$

где p — аргумент преобразования Лапласа; $j_{y\alpha}$ связаны с f_α согласно приведенным ранее формулам. Выразим из этих уравнений f_α, f_β, h_α, h_β через E_α, E_β.

Из уравнений (11) имеем

$$h_\alpha = \frac{h_{\alpha 0}}{p} \mp \frac{kc}{p}E_\beta. \tag{12}$$

Из уравнений (9) находим

$$f_\alpha = \frac{1}{p^2 + k^2 v_x^2}\left(p\varphi_\alpha \mp kv_x\varphi_\beta\right) \quad (\alpha = c, s;\ \beta = c, s;\ \alpha \neq \beta),$$

где

$$\varphi_\alpha = f_{\alpha 0} + \frac{en_0}{mc}h_\alpha\left(v_y\frac{\partial f_0}{\partial v_x} - v_x\frac{\partial f_0}{\partial v_y}\right) + \frac{en_0}{m}E_\alpha\frac{\partial f_0}{\partial v_y}.$$

Используя полученные уравнения для f_α, находим компоненты плотности токов $j_{y\alpha}$:

$$j_{y\alpha} = -e\int v_y f_\alpha d\vec{v} = -e\int \frac{v_y}{p^2 + k^2 v_x^2}\left(p\varphi_\alpha \mp kv_x\varphi_\beta\right) d\vec{v}.$$

Вычислим интегралы в правой части. Учитывая вид φ_α, имеем

$$I_{1\alpha} = p\int \frac{v_y}{p^2+k^2v_x^2}\varphi_\alpha d\vec{v} = p\left[\int \frac{v_y f_{\alpha 0}}{p^2+k^2v_x^2}d\vec{v} + \right.$$

$$\left. + \frac{en_0}{mc}h_\alpha \int \frac{v_y}{p^2+k^2v_x^2}\left(v_y\frac{\partial f_0}{\partial v_x} - v_x\frac{\partial f_0}{\partial v_y}\right)d\vec{v} + \frac{en_0}{m}E_\alpha\left(\int \frac{v_y}{p^2+k^2v_x^2}\frac{\partial f_0}{\partial v_y}d\vec{v}\right)\right].$$

Второй интеграл в квадратных скобках равен нулю вследствие нечетности подынтегральной функции по v_x ($f_0(v_x, v_y)$ полагается четной по v_x и по v_y функцией). Выполнив в последнем интеграле интегрирование по частям, найдем

$$I_{1\alpha} = -n_0\frac{ep}{m}E_\alpha g + p\int \frac{v_y f_{\alpha 0}}{p^2+k^2v_x^2}d\vec{v},$$

где

$$g = \int \frac{f_0}{p^2+k^2v_x^2}d\vec{v}.$$

С помощью аналогичных рассуждений нетрудно показать, что

$$I_{2\alpha} = k\int \frac{v_xv_y}{p^2+k^2v_x^2}\varphi_\beta d\vec{v} = \frac{ek}{mc}n_0h_\beta h + k\int \frac{v_xv_y}{p^2+k^2v_x^2}f_{\beta 0}d\vec{v},$$

где

$$h = \int \frac{v_x^2 f_0}{p^2+k^2v_x^2}d\vec{v} + \int \frac{v_xv_y^2}{p^2+k^2v_x^2}\frac{\partial f_0}{\partial v_x}d\vec{v}.$$

Следовательно,

$$j_{y\alpha} = \frac{e^2p}{m}n_0gE_\alpha \pm \frac{e^2k}{mc}n_0hh_\beta - ej_{\alpha 0}, \quad j_{\alpha 0} = \int \frac{pf_{\alpha 0} \mp kv_xf_{\beta 0}}{p^2+k^2v_x^2}v_yd\vec{v}.$$

Подставляя полученное выражение для $j_{y\alpha}$ в (10) и заменяя затем h_β согласно (12), для образа E_α получаем следующее уравнение:

$$E_\alpha\left[p\left(1+\omega_p^2g\right) + \frac{k^2c^2}{p} + \frac{\omega_p^2k^2}{p}h\right] = E_{\alpha 0} + 4\pi ej_{\alpha 0} \mp \frac{h_{\beta 0}}{p}\left(kc + \frac{\omega_p^2k}{c}h\right). \qquad (13)$$

Учитывая вид функций g, h, выражение в квадратных скобках в формуле (13) можно привести к виду

$$p + \frac{\omega_p^2+k^2c}{p} + \frac{\omega_p^2k^2}{p}\int \frac{v_xv_y^2}{p^2+k^2v_x^2}\frac{\partial f_0}{\partial v_x}d\vec{v} \equiv \frac{D(p,k)}{p}.$$

Следовательно, образы E_α выражаются через начальные данные задачи Коши в виде

$$E_\alpha = \frac{p}{D}E_{\alpha 0} + \frac{4\pi ep}{D}j_{\alpha 0} \mp \frac{kc+\omega_p^2kh/c}{D}h_{\beta 0}. \qquad (14)$$

До сих пор нигде не использовался конкретный вид функции $f_0(v_x, v_y)$. Предположим, что функция $f_0(v_x, v_y)$ имеет вид

$$f_0\left(v_x, v_y\right) = \varphi\left(v_x\right)\ \psi\left(v_y\right),$$

где функции $\varphi\left(v_x\right)$, $\psi\left(v_y\right)$ нормированы условиями

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(v_x\right) dv_x = 1; \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi\left(v_y\right) dv_y = 1.$$

Кроме того, будем считать, что $\varphi\left(v\right)$ — ступенчатая функция:

$$\varphi\left(v\right) = \frac{1}{2v_0}\theta\left(v_0^2 - v^2\right), \quad \theta\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Вычислим для нее интегралы, входящие в (14):

$$\int \frac{v_x v_y^2}{p^2 + k^2 v_x^2} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} d\vec{v} = v_s^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{v_x}{p^2 + k^2 v_x^2} \left(-\frac{v_x}{v_0}\right) \delta\left(v_0^2 - v_x^2\right) dv_x = -\frac{v_s^2}{p^2 + k^2 v_0^2};$$

$$\int \frac{v_x^2 f_0}{p^2 + k^2 v_x^2} d\vec{v} = \frac{1}{v_0} \int\limits_{0}^{v_0} \frac{v_x^2 dv_x}{p^2 + k^2 v_x^2} = \frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{p}{kv_0} \operatorname{arctg} \frac{kv_0}{p}\right),$$

где $v_s^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_y^2 \psi\left(v_y\right) dv_y$.

Учитывая эти выражения, получаем

$$D\left(p, k\right) = p^2 + \omega_p^2 + k^2 c^2 - \frac{\omega_p^2 k^2 v_s^2}{p^2 + k^2 v_0^2}. \tag{15}$$

Для h имеем следующее выражение:

$$h = \frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{p}{kv_0} \operatorname{arctg} \frac{kv_0}{p}\right) - \frac{v_s^2}{p^2 + k^2 v_0^2}.$$

Интегралы, входящие в $j_{\alpha 0}$, зависят от вида начальных возмущений функции распределения. В дальнейшем будем полагать, что $f_{\alpha 0}\left(v_x, v_y\right) = 0$, $\alpha = c, s$. Оригиналы для функций p/D, $\dfrac{kc + \omega_p^2 kh/c}{D}$ по-разному зависят от времени; в частности, оригинал для h содержит функцию $\sin kv_0 t$, которой нет в оригинале для p/D. Поэтому нет оснований надеяться (при нулевом $f_{\alpha 0}$!) на погашение колебаний какой-либо частоты за счет выбора $E_{\alpha 0}$, $h_{\beta 0}$. В дальнейшем будем полагать $h_{\beta 0} = 0$ $(\beta = s, c)$.

Найдем оригинал для p/D. Очевидно, что

$$\frac{p}{D} = \frac{p\left(p^2 + b_1\right)}{p^4 + p^2\left(a + b_1\right) + ab_1 - b_2},$$

где

$$a = \omega_p^2 + k^2 c^2; \quad b_1 = k^2 v_0^2; \quad b_2 = \omega_p^2 k^2 v_s^2.$$

Функция $D(p,k)$, определяемая (15), обращается в нуль при $p^2 = -z_1$ и $p^2 = -z_2$, где

$$z_1 = \frac{1}{2}\left[a + b_1 + \sqrt{(a-b_1)^2 + 4b_2}\right]; \quad z_2 = \frac{1}{2}\left[a + b_1 - \sqrt{(a-b_1)^2 + 4b_2}\right],$$

так что

$$\frac{p}{D} = \frac{p\left(p^2 + b_1\right)}{\left(p^2 + z_1\right)\left(p^2 + z_2\right)}.$$

Поскольку рассматривается нерелятивистский случай, то имеет место неравенство $a \gg b_1$; очевидно также, что $z_1 > a$. Нетрудно видеть, что всегда $z_2 < b_1$. Кроме того, корень z_2 при определенных значениях параметров k, v_0, v_s может оказаться отрицательным. Установим условия, когда $z_2 < 0$. Очевидно, это будет при $ab_1 - b_2 < 0$, или, что то же, при

$$\frac{ck}{\omega_p} < \left(\frac{v_s^2}{v_0^2} - 1\right)^{1/2}. \tag{16}$$

Неравенство (16) является условием развития неустойчивости Вейбеля для заданных параметров k, v_0, v_s. Инкремент γ роста амплитуды неустойчивой гармоники равен

$$\gamma = |z_2|^{1/2} = \left(\frac{b_2 - ab_1}{z_1}\right)^{1/2}. \tag{17}$$

Обозначим

$$p_1 = i\sqrt{z_1}; \quad p_2 = -i\sqrt{z_1}; \quad p_3 = i\sqrt{z_2}; \quad p_4 = -i\sqrt{z_2}.$$

Тогда оригинал для p/D будет иметь вид

$$F(t) = \frac{p_1\left(p_1^2 + b_1\right)}{(p_1 - p_2)(-z_1 + z_2)} e^{p_1 t} + \frac{p_2\left(p_2^2 + b_1\right)}{(p_2 - p_1)(-z_1 + z_2)} e^{p_2 t} + \\ + \frac{p_3\left(p_3^2 + b_1\right)}{(z_1 - z_2)(p_3 - p_4)} e^{p_3 t} + \frac{p_4\left(p_4^2 + b_1\right)}{(z_1 - z_2)(p_4 - p_3)} e^{p_4 t},$$

или с учетом выражений для p_i $(i = 1 \div 4)$

$$F(t) = \frac{1}{z_1 - z_2}\left[(z_1 - b_1)\cos\left(\sqrt{z_1}t\right) + (b_1 - z_2)\cos\left(\sqrt{z_2}t\right)\right]. \tag{18}$$

Эта формула справедлива, если не выполнено неравенство (16), т. е. в случае устойчивых колебаний. Если же неравенство (16) выполнено, то

$$F(t) = \frac{1}{z_1 - z_2}\left[(z_1 - b_1)\cos\left(\sqrt{z_1}t\right) + (b_1 - z_2)\operatorname{ch}(\gamma t)\right], \tag{19}$$

где γ определено согласно (17). Во всех случаях

$$E_\alpha(t) = E_{\alpha 0} F(t). \tag{20}$$

Амплитуды h_α вычисляются по формулам

$$h_\alpha(t) = \mp kcE_{\beta 0}\int_0^t F(\tau)\,d\tau. \tag{21}$$

Интегрируя (18), (19), получаем:

– для устойчивых колебаний

$$\int_0^t F(\tau)\,d\tau = \frac{1}{z_1 - z_2}\left(\frac{z_1 - b_1}{\sqrt{z_1}}\sin(\sqrt{z_1}t) + \frac{b_1 - z_2}{\sqrt{z_2}}\sin(\sqrt{z_2}t)\right);$$

– для неустойчивых колебаний

$$\int_0^t F(\tau)\,d\tau = \frac{1}{z_1 - z_2}\left(\frac{z_1 - b_1}{\sqrt{z_1}}\sin(\sqrt{z_1}t) + \frac{b_1 - z_2}{\gamma}\operatorname{sh}(\gamma t)\right).$$

Отметим, что явно выраженный экспоненциальный рост амплитуды h_α наступает при условии

$$\frac{b_1 - z_2}{z_1 - b_1}\frac{\sqrt{z_1}}{\gamma}\operatorname{sh}(\gamma t) \gg 1,$$

или, что то же, при

$$t \gg \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{\gamma(z_1 - b_1)}{(b_1 - z_2)\sqrt{z_1}}\right) \equiv t_e\,.$$

Полученные формулы (20), (21) можно использовать при тестировании численных методик.

О сглаживании ступенчатых распределений

Отметим следующее обстоятельство. Для численных методик моделирования поведения плазмы, основанных на методе частиц, ступенчатый характер зависимости невозмущенной функции распределения f_0 от переменной v_x не создает дополнительных трудностей. Не так обстоит дело с методиками, основанными на разностных методах решения кинетического уравнения Власова: по методикам, не использующим сглаживание численных осцилляций, вообще нельзя провести расчет такой задачи, а методики со сглаживанием осцилляций будут непредсказуемым образом изменять истинные дисперсионные свойства плазмы. Поэтому при тестировании подобных методик желательно сгладить ступенчатые распределения, не изменяя при этом существенно полученные выше корни z_1, z_2. Покажем, как это можно сделать.

Выберем в качестве $\varphi(v)$ следующую функцию:

$$\varphi(v) = \varphi_0 \cdot \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{(v + v_0)^2}{v_*^2}\right), & v < -v_0; \\ 1, & |v| \le v_0; \\ \exp\left(-\dfrac{(v - v_0)^2}{v_*^2}\right), & v > v_0, \end{cases}$$

где v_* — параметр, определяющий ширину *размазки* ступенчатого распределения; φ_0 определяется из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v)\,dv = 1.$$

Несложные вычисления дают

$$\varphi_0 = \frac{1}{2v_0 + \sqrt{\pi}v_*}.$$

Предположив, что $v_* \ll v_0$, определим, как изменится при таком сглаживании дисперсионное уравнение $D(p,k) = 0$. Сразу отметим, что если функция $\psi(v_y)$ также имеет ступенчатый вид, то ее тоже надо сгладить аналогично $\varphi(v_x)$; в дальнейшем считается, что такое сглаживание выполнено и величина v_s^2 в формуле (15) вычислена с его учетом — обозначим ее через $\widetilde{v}_s^2$. Оставив только члены первого порядка по v_*/v_0, после несложных вычислений придем к следующему дисперсионному уравнению (вместо уравнения $D(p,k) = 0$):

$$-p^2 = k^2c^2 + \omega_p^2 \left[1 - \frac{k^2\widetilde{v}_s^2}{p^2 + k^2v_0^2}\left(1 - \frac{\sqrt{\pi}v_*}{v_0}\frac{k^2v_0^2}{p^2 + k^2v_0^2}\right)\right]. \tag{22}$$

Отсюда следует, что корни дисперсионного уравнения (22) будут незначительно отличаться от корней z_1, z_2, если $v_* \ll v_0$ и

$$v_s^2 \approx \widetilde{v}_s^2 \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}v_*}{v_0}\frac{k^2v_0^2}{z_2 - k^2v_0^2}\right). \tag{23}$$

Это соотношение следует использовать при постановке расчетов со сглаженным распределением частиц.

Замечание. Поскольку $v_0^2 \ll c^2$, $v_s^2 \ll c^2$, то корень $z_1 \approx a$. Следовательно, $z_2 \simeq b_1 - b_2/a$; поэтому выражение в скобках в формуле (23) примет вид

$$1 - \frac{\sqrt{\pi}v_*}{v_0}\frac{ab_1}{b_2} = 1 - \frac{\sqrt{\pi}v_*}{v_0}\left(1 + \frac{k^2c^2}{\omega_p^2}\right)\frac{v_0^2}{v_s^2}.$$

Это означает, что размазывание ступенчатого профиля по переменной v_* приводит при вычислении z_2 к уменьшению $\widetilde{v}_s^2$. При этом в (23) множитель при v_*/v_0 равен

$$\frac{k^2v_0^2}{z_2 - k^2v_0^2} = \frac{b_1}{z_2 - b_1} \approx -\frac{ab_1}{b_2},$$

так что в устойчивом режиме, когда $b_2 < b_1$, он может стать большим. Следовательно, выбрать параметр сглаживания v_* для устойчивого режима более сложно, чем для неустойчивого.

Заключение

В данной работе получено точное решение линейной задачи Коши о развитии малых поперечных электромагнитных возмущений в электронной плазме со ступенчатой невозмущенной функцией распределения электронов по скоростям. Это решение может быть использовано в качестве теста для методик численного моделирования поведения бесстолкновительной плазмы.

Имеющийся у авторов опыт по использованию этого решения в качестве теста позволяет сделать следующие выводы:

– при использовании метода частиц в ячейке наиболее сложными для моделирования оказываются устойчивые режимы со значениями волнового числа вблизи верхней границы области неустойчивости;

– сглаживая ступенчатую функцию распределения с обоснованным выбором параметра сглаживания, можно получить распределение, пригодное для численного моделирования с применением разностных методов решения уравнения Власова. При проведении расчетов необходимо обеспечивать на сглаживающем профиле достаточно большое (порядка 5—10) число интервалов сеток по скоростным переменным.

Список литературы

1. *Cheng C. Z., Knorr G.* The integration of the Vlasov equation in configuration space // J. Comp. Phys. 1976. Vol. 22. P. 330—351.
2. *Arber T. D., Vann R. G. L.* A critical comparison of Eulerian-grid-based Vlasov solvers // Ibid. 2002. Vol. 180. P. 339—357.
3. *Nakamura T., Yabe T.* Cubic interpolated propagation scheme for solving the hyper-dimensional Vlasov-Poisson equation in phase space // Comp. Phys. Commun. 1999. Vol. 120. P. 122—154.
4. *Fijalkow E.* Numerical solution to the Vlasov equation: the 1D code // Comp. Phys. Commun. 1999. Vol. 116. P. 329—335.
5. *Fijalkow E.* Numerical solution to the Vlasov equation: the 2D code // Ibid. P. 336—344.
6. *Filbet F., Sonnendrucker E., Bertrand P.* Conservative numerical schemes for the Vlasov equation // J. Comp. Phys. 2001. Vol. 172. P. 166—187.
7. *Weibel E. S.* Spontaneously growing transverse waves in a plasma due to an anisotropic velocity distribution // Phys. Rev. Lett. 1959. Vol. 2, No 3. P. 83—84.
8. *Morse R. L., Nielson C. W.* Numerical simulation of the Weibel instability in one and two dimensions // Phys. Fluids. 1971. Vol. 14, No 4. P. 830—840.
9. *Mangeney A., Califano F., Cavazzoni C., Travnicek P.* A Numerical scheme for the integration of the Vlasov-Maxwell system of equations // J. Comp. Phys. 2002. Vol. 179. P. 495—538.
10. *Yoon P. H., Davidson R. C.* Closed-form analytical model of the electron whistler and cyclotron maser instabilities in relativistic plasma with arbitrary energy anisotropy // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 35, No 6. P. 2619—2630.
11. *Ишимару С.* Основные принципы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1975.

Статья поступила в редакцию 22.06.07.