

УДК 519.6

НЕОТРАЖАЮЩЕЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ СХЕМАХ НА РАЗНЕСЕННЫХ СЕТКАХ

Ю. А. Бондаренко, Е. А. Гончаров, В. Ю. Колобянин, Ю. В. Янилкин
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Рассматривается неотражающее граничное условие для задач газодинамики при использовании лагранжевых и лагранжево-эйлеровых счетных сеток. Реализация этого условия проводится для двумерной газодинамической методики ЭГАК. Сформулирована двумерная тестовая задача, для которой выполнено численное моделирование с использованием предложенного неотражающего граничного условия. Результаты расчетов в одномерном и двумерном приближениях показывают хорошую эффективность и точность предложенного метода. Алгоритмы являются достаточно общими и могут быть применены в других методиках, использующих представление скорости в узлах счетной сетки, а плотности и энергии — в центрах ячеек.

Введение

Разработка неотражающих граничных условий (НГУ) достаточно широко обсуждается в литературе, посвященной численным методам расчета газодинамических течений. Из большого количества работ отметим [1–4], и особенно [5, 6], относящиеся непосредственно к численному решению задач для нестационарной газовой динамики. Но при всем обилии публикаций пока не разработаны универсальные методы, пригодные для различных разностных схем, и нет готовых рецептов построения качественных НГУ для заданных разностных схем, особенно для эйлеровых.

В настоящей работе предлагаются относительно простые НГУ локального типа для подходящих к границе малых возмущений, в какой-то мере оптимизированные для разностных схем, используемых в методике ЭГАК.

Описание неотражающего граничного условия

В задачах, в которых амплитуда скорости движения среды в ударной (звуковой) волне уменьшается до нескольких процентов от скорости звука, возможно использование НГУ, основанного на связи скорости движения вещества с изме-

нением давления, характерной для малых возмущений. К граничному давлению, соответствующему условиям задачи (например атмосферному давлению на данной высоте в задаче подъема облака взрыва), добавляется величина

$$\Delta p = \rho u c,$$

где ρ , u , c — плотность, скорость вещества и скорость звука у границы. При этом добавка к давлению положительная, если направление движения среды совпадает с направлением распространения возмущения.

Схема реализации данного граничного условия в методике ЭГАК следующая. Для имитации прохождения возмущения через границу счетной области давление на границе задается в виде

$$p_{\text{гр}} = p_{\text{нв}} + \Delta p = p_{\text{нв}} + \rho c u_{\text{гр}}. \quad (1)$$

Здесь $p_{\text{нв}}$ — невозмущенное давление в среде; $u_{\text{гр}}$ — скорость на границе. Будем рассматривать лишь схему на разнесенных сетках, в которой скорости рассчитываются в узлах счетной сетки, а давление, плотность и скорость звука относятся к центру счетной ячейки (рис. 1). Тогда полагаем

$$\begin{aligned} u_{\text{гр}} &= \frac{u_{\text{гр}1} + u_{\text{гр}2}}{2}; \\ p_{\text{нв}} &= p - \Delta p = p - \rho c \frac{u_1 + u_2 + u_{\text{гр}1} + u_{\text{гр}2}}{4}, \end{aligned} \quad (2)$$

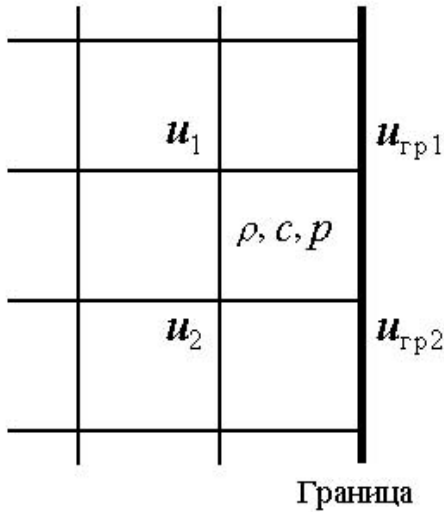


Рис. 1. Фрагмент счетной сетки

где ячейечные величины относятся к граничной ячейке.

Подставляя найденное $p_{\text{нв}}$ в (1) и учитывая (2), получаем

$$p_{\text{гр}} = p + 0,5\rho c \left(\frac{u_{\text{гр}1} + u_{\text{гр}2}}{2} - \frac{u_1 + u_2}{2} \right). \quad (3)$$

Из (3) следует, что вблизи границы

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \approx c \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u_{\text{гр}1} + u_{\text{гр}2}}{2} - \frac{u_1 + u_2}{2} \right) \approx c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (4)$$

где ось Ox направлена по нормали к границе; Δx — размер счетной ячейки. Подставляя (4) в уравнение Эйлера, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -c \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5)$$

Так как рассматривается область, в которой $u \ll c$, то вблизи границы при таком задании граничного условия получается решение в виде бегущей плоской волны, распространяющейся со скоростью звука по направлению к границе.

Постановка тестовой задачи

Для тестирования качества НГУ в одномерных и двумерных задачах газовой динамики предлагается рассмотреть плоскую синусоидальную акустическую волну (сжатия или разрежения) при ее выходе на границу расчетной области. В одномерной задаче направление распространения волны совпадает с одним семейством линий ортогональной сетки, а в двумерной акустическая волна движется под углом к сетке.

Задача решается в плоской прямоугольной области $\{0 < x < L_x, 0 < y < L_y\}$. Сетка — равномерная прямоугольная, число ячеек равно $N_x \times N_y$. Уравнение состояния $p = (\gamma - 1)\rho E$, $\gamma = \text{const}$.

Начальные условия задачи: если $0 \leq A \leq \lambda$, то

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{U_0 \cos \varphi}{2} B; \\ v(x, y) &= \frac{U_0 \sin \varphi}{2} B; \\ \rho(x, y) &= \rho_0 \left(1 + \frac{\rho_0 c U_0}{2 p_0} B \right)^{1/\gamma}; \\ e(x, y) &= e_0 \left(1 + \frac{\rho_0 c U_0}{2 p_0} B \right)^{(\gamma-1)/\gamma}; \\ p(x, y) &= p_0 + \frac{\rho_0 c U_0}{2} B, \end{aligned}$$

в противном случае

$$u = v = 0; \quad \rho = \rho_0; \quad e = e_0; \quad p = p_0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\lambda}{\cos \varphi} - x \right) \cos \varphi + (L_y - y) \sin \varphi; \\ B &= 1 - \cos \left(2\pi \frac{A}{\lambda} \right); \end{aligned}$$

угол φ определяет направление движения волны; λ — длина волны.

Полагаем $L_x = L_y = 1$; $N_x = N_y = 100$. В расчетах используются следующие длины волн возмущения: $\lambda = 0,2$ и $\lambda = 0,1$. Величина U_0 определяет амплитуду скорости в звуковой волне. Используются следующие варианты: $U_0 = 0,01$ с и $U_0 = 0,05$ с. Начальные параметры газа: $\gamma = 1,4$; $e_0 = 1$; $\rho_0 = 1$; $p_0 = 0,4$; $c = \sqrt{0,56}$.

В расчетах после выхода возмущения из счетной области по теории должны получиться следующие результаты: $u(x, y) = v(x, y) = 0$; $\rho(x, y) = 1$; $e(x, y) = 1$; в эйлеровой постановке масса вещества $M = 1$ и должна остаться такой, как вначале; в лагранжевой постановке граничные точки должны сдвинуться на величину $\Delta \ell = \int u_n dt$, где u_n — нормальная к границе компонента скорости.

Для тестовых расчетов были выбраны два значения угла между плоской волной и осью Oy (вертикальная ось): 0° и 45° . На левой и нижней границах счетной области задавалось граничное условие *жесткая стенка*, на верхней и правой — НГУ. В двумерных тестах начальное возмущение

задавалось, начиная с середины счетной области, для того чтобы избежать несимметричного влияния на компоненты скорости граничных условий на левой и нижней границах.

Рассмотрим вопрос о точности НГУ. С точки зрения практики очевидно, что бессмысленно добиваться большей точности НГУ, чем точность газодинамической разностной схемы¹. Вопрос состоит в том, что называть порядком точности НГУ.

В качестве количественной меры точности НГУ удобно брать значение коэффициента отражения возмущений от искусственной границы, который определяется как отношение среднеквадратичной (евклидовой) нормы решения, полученного после отражения, к аналогичной норме выходящей из расчетной области волны, падающей на искусственную границу. С физической точки зрения естественно сравнивать кинетические энергии выходящей и отраженной волн. Поэтому коэффициентом отражения можно называть квадратный корень из отношения кинетических энергий отраженной и выходящей волн. Тогда порядком точности НГУ целесообразно называть величину α в оценке $k = O(\lambda^{-\alpha})$, где k — определенный выше коэффициент отражения.

В методике ЭГАК при решении уравнения адвекции могут использоваться как донорный метод, так и метод РРМ. При использовании донорного метода разностная схема методики ЭГАК имеет первый порядок аппроксимации по пространству, следовательно, порядок сходимости не может быть выше первого [7]. Поэтому для практики достаточно, чтобы $\alpha = 1$.

Стандартная для методики ЭГАК схема счета ускорений

В первых тестах для счета ускорений в узлах сетки использовалась стандартная для методики ЭГАК схема, которая изображена на рис. 2. Сначала считаются ускорения граней ячеек, примыкающих к данному узлу, при этом используются давления и массы соседних ячеек. Затем ускорения граней, которые сходятся в узле, усредняются с весами, рассчитываемыми по массам соот-

¹К сожалению, в литературе, в том числе в цитированных работах [1–6] о НГУ, вопрос о сопоставлении качества НГУ с точностью конечно-разностного метода даже не упоминается.

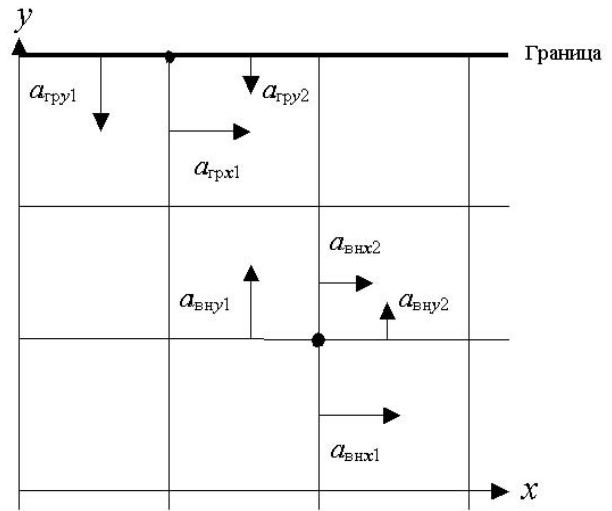


Рис. 2. Схема счета ускорений в методике ЭГАК

ветствующих ячеек, и получаются компоненты ускорения узла счетной сетки. Как видно из рис. 2, для граничного узла отсутствует ускорение грани ячеек, которые должны были бы располагаться снаружи от счетной области ($a_{грx2}$). Потому в качестве соответствующей компоненты ускорения узла использовалось ускорение грани $a_{грx1}$.

Расчеты проводились в лагранжевой постановке. Максимальная начальная скорость вещества в возмущении задавалась равной $u_{\max} = 0,01$ с. Длина волны возмущения бралась равной $\lambda = 0,2$, так что возмущение занимало 20 ячеек.

В табл. 1 приведены некоторые результаты расчета одномерной тестовой задачи. Дополнительно введены обозначения: M , $E_{\text{внутр}}$, $E_{\text{кин}}$ и $E_{\text{полн}}$ — соответственно масса, внутренняя, кинетическая и полная энергии во всей счетной области; $|u|_{\max}$ — максимальное значение компоненты скорости (в одномерном тесте $|u|_{\max} = u_{x,\max}$). При $t = 1,4$ возмущение полностью выходит из счетной области.

Из приведенных данных следует, что в одномерном тесте данное граничное условие имеет малую погрешность. После выхода возмущения из счетной области максимальное значение компоненты скорости уменьшилось приблизительно в 35 раз. Правая граница сдвинулась на $\Delta\ell = 0,001$, что соответствует аналитической оценке.

Заметно худшая картина получилась в двумерном тесте. В табл. 1 и на рис. 3, 4 (см. также цветную вкладку) представлены результаты этого расчета.

Таблица 1

Результаты расчетов одномерной (1D) и двумерной (2D) тестовых задач в лагранжевой постановке

Тип задачи, время	ρ_{\min}	ρ_{\max}	e_{\min}	e_{\max}	M	$E_{\text{внутр}}$	$E_{\text{кин}}$	$E_{\text{полн}}$	$ u _{\max}$
1D, $t = 0$	1	1,009918	1	1,003956	1,0010	1,0014	$2,12 \cdot 10^{-6}$	1,0014	$7,5 \cdot 10^{-3}$
1D, $t = 1,4$	0,999704	1,000244	0,999881	1,000098	1,0010	1,0010	$2,7 \cdot 10^{-9}$	1,0010	$2,2 \cdot 10^{-4}$
2D, $t = 0$	1	1,009977	1	1,003979	1,0005	1,0007	$1,073 \cdot 10^{-6}$	1,0007	$5,29 \cdot 10^{-3}$
2D, $t = 0,6$	0,999464	1,000823	0,999383	1,000353	1,0005	1,0005	$7,46 \cdot 10^{-9}$	1,0005	$7,71 \cdot 10^{-4}$

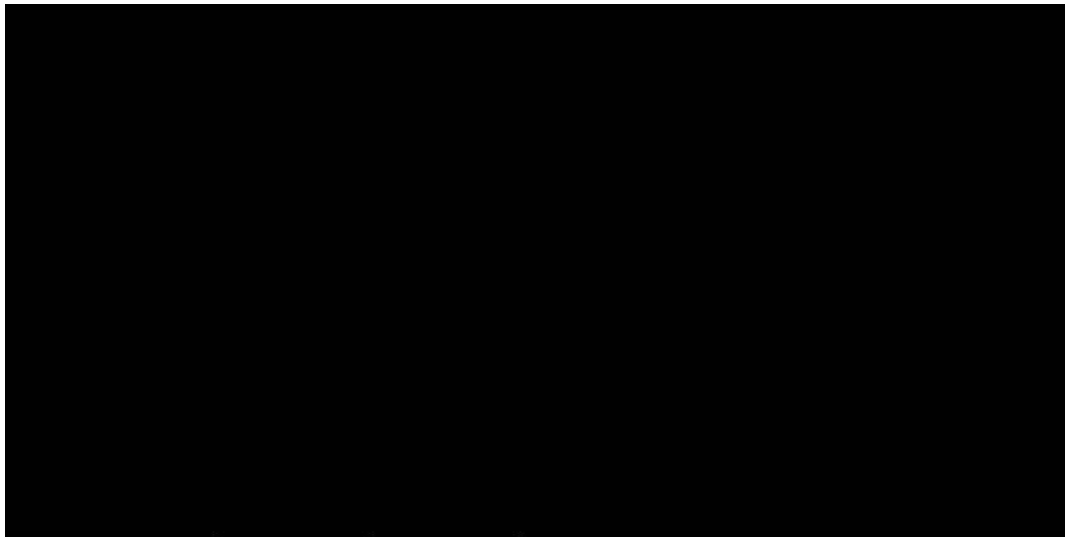


Рис. 3. Профиль горизонтальной компоненты скорости в двумерном тесте ($t = 0,2$)

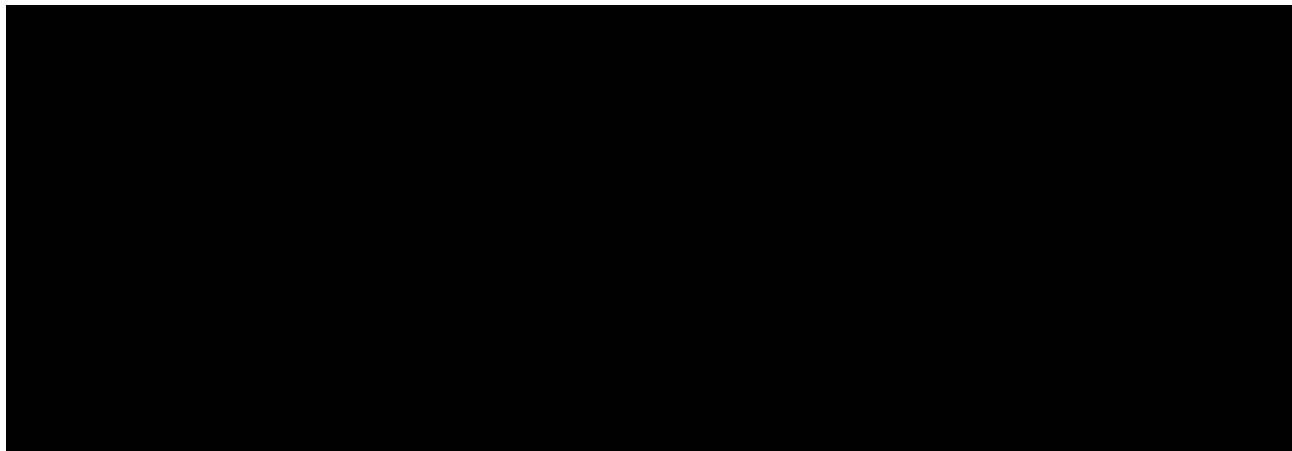


Рис. 4. Форма верхней границы в двумерном тесте ($t = 0,6$)

При $t = 0,6$ возмущение полностью выходит из счетной области. Как следует из рис. 3, 4, имеются заметные искажения формы возмущения. Также существенно отличается от теоретической и форма верхней границы (точно такой же контур у правой границы).

На интервале от 0,5 до 0,79 (отрезок границы, через который проходит только часть возмущения) теоретическая кривая задается выражением

$$\Delta \ell = \frac{u_{\max}}{2} \frac{\lambda}{c} \left[\frac{x - 0,5}{0,29} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi(x - 0,5)}{0,29} \right].$$

Для $x > 0,79$ смещение границы должно равняться 0,00071, а в расчете эта величина получилась равной 0,001. Значение $|u|_{\max}$ уменьшилось примерно в 7 раз. После выхода возмущения из счетной области также заметно хуже согласуются с аналитическими значения плотности и удельной внутренней энергии.

Таким образом, при стандартном для методики ЭГАК способе счета ускорений в узлах граничных ячеек в двумерном тесте получены неудовлетворительные результаты. Это потребовало существенной переработки схемы счета ускорений в граничных ячейках.

Оптимизированная схема счета ускорений

Лагранжева постановка расчетов. Сравнение значений продольной (вдоль границы) компоненты ускорений, полученных в двумерном тесте в граничных узлах, с соответствующими значениями во внутренних точках показывает заметное различие (значения компонент ускорений в идеальном случае при смещении по диагонали должны совпадать). Это связано с тем, что в граничных узлах ускорение рассчитывается фактически со сдвигом по нормали к границе внутрь счетной области на половину размера ячейки. Для того чтобы уменьшить влияние этого эффекта, продольную компоненту ускорения в граничных узлах можно рассчитывать, используя давления в серединах ребер граничных ячеек, получаемые по формуле (4), и соответствующие массы ячеек:

$$a_{\text{прод}} = \frac{2(P_{\text{гр}2} - P_{\text{гр}1})}{m_{\text{гр}1} + m_{\text{гр}2}}. \quad (6)$$

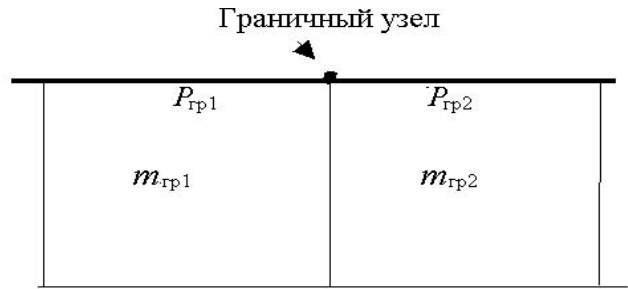


Рис. 5. Фрагмент счетной сетки

Смысл обозначений в формуле (6) ясен из рис. 5. Результаты расчета двумерного теста, в котором в граничных узлах продольные компоненты ускорения считались по формуле (6), а нормальные компоненты — по стандартной схеме, показали, что граничная компонента ускорения сдвинута примерно на 0,4 ячейки внутрь счетной области.

Чтобы устранить этот сдвиг, была введена экстраполяция нормальной компоненты ускорения на граничный узел по формуле

$$a_{\text{норм, экстр}} = a_1 + \frac{a_{\text{норм}} - a_1}{0,6 + \frac{0,5c\tau}{(y_{\text{гр}} - y_1)} \frac{u}{|u_y|}}. \quad (7)$$

Когда знаменатель становился больше единицы, экстраполяция не делалась, и в этом случае $a_{\text{норм, экстр}} = a_{\text{норм}}$.

На рис. 6 дана иллюстрация величин, используемых в формуле (7), записанных для верхней границы. Из рисунка видно, что сосчитанная в граничном узле нормальная компонента ускорения соотносится с точкой, сдвинутой на $0,4(y_{\text{гр}} - y_1)$ внутрь от границы.

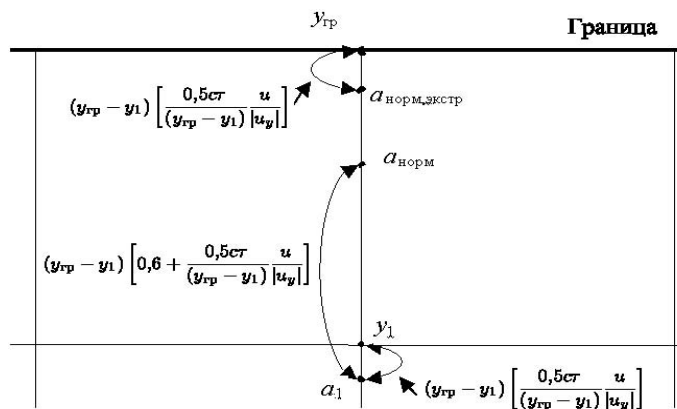


Рис. 6. Геометрическая иллюстрация величин, используемых при построении формулы (7)

При получении формулы (7) учитывалось следующее обстоятельство. Так как возмущение приближается к границе, то сдвиг внутрь счетной области эквивалентен некоторому опережению по времени. При решении уравнения движения в методике ЭГАК используются так называемые предвычисленные давления, а именно прогнозируемые давления в момент времени, промежуточный между n -м и $(n + 1)$ -м временными слоями. Поэтому по отношению к временному слою t^n ускорения во внутренних точках рассчитываются также с некоторым опережением. Отметим, что для рассматриваемого граничного условия при вычислении нормальной компоненты ускорения в граничном узле используются величины, относящиеся только к временному слою t^n . Чем больше счетный шаг, тем больший во внутренних точках сдвиг по времени по отношению к временному слою t^n , или, что равноценно, сдвиг внутрь счетной области и тем ближе его величина к смещению в граничном узле. Именно этот факт отражает выражение $\frac{0,5ct}{(y_{гр} - y_1)} \frac{u}{|u_y|}$ в формуле (7). Множитель 0,5 введен в предположении, что предвычисленные давления вычисляются в момент времени, отстоящий от n -го временного слоя приблизительно на поло-

вину временного шага. С помощью отношения $u/|u_y|$ учитывается угол, который образует возмущение при подходе к границе. При этом предполагается, что радиус кривизны фронта возмущения много больше размеров счетной ячейки.

Проведенный тестовый расчет был выполнен с временным шагом 0,001, который приблизительно в 50 раз меньше, чем получаемый по условию Куранта. Поэтому полученный в нем сдвиг внутрь области фактически приравнивается к сдвигу, необходимому при бесконечно малом шаге по времени. Выбор в тестовом расчете шага, заметно меньшего, чем в автоматическом режиме, объясняется тем, что размеры ячеек в представляющей интерес части счетной области в реальном расчете могут быть намного меньше, чем у границы. В этом случае шаг по времени в автоматическом режиме будет определяться именно самыми мелкими ячейками.

В табл. 2 представлены результаты одномерного и двумерного тестов, а на рис. 7, 8 (см. также цветную вкладку) — растровые картины двумерного теста. В этих расчетах в граничных узлах продольные компоненты ускорения считались по формуле (6), а нормальные компоненты поправлялись с помощью экстраполяции по формуле (7).

Таблица 2

Результаты одномерного и двумерного тестов с оптимизированным счетом ускорения

Тип задачи, время	ρ_{\min}	ρ_{\max}	e_{\min}	e_{\max}	M	$E_{\text{внутр}}$	$E_{\text{кин}}$	$E_{\text{полн}}$	$ u _{\max}$
1D, $t = 1,4$	0,99989	1,00011	0,9999351	1,000066	1,0010	1,0010	$3,86 \cdot 10^{-10}$	1,0010	$1,07 \cdot 10^{-4}$
2D, $t = 0,6$	0,999491	1,00015	0,999797	1,000063	1,0005	1,0005	$3,59 \cdot 10^{-10}$	1,0005	$1,77 \cdot 10^{-4}$

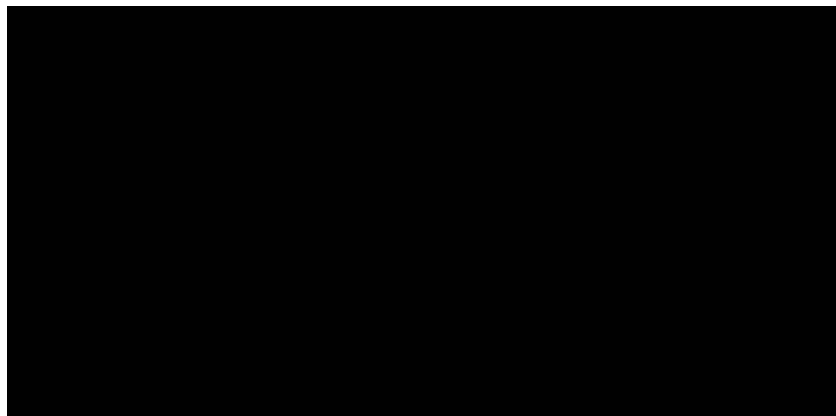


Рис. 7. Профиль горизонтальной компоненты скорости в двумерном тесте с оптимизированным счетом ускорения ($t = 0,2$)

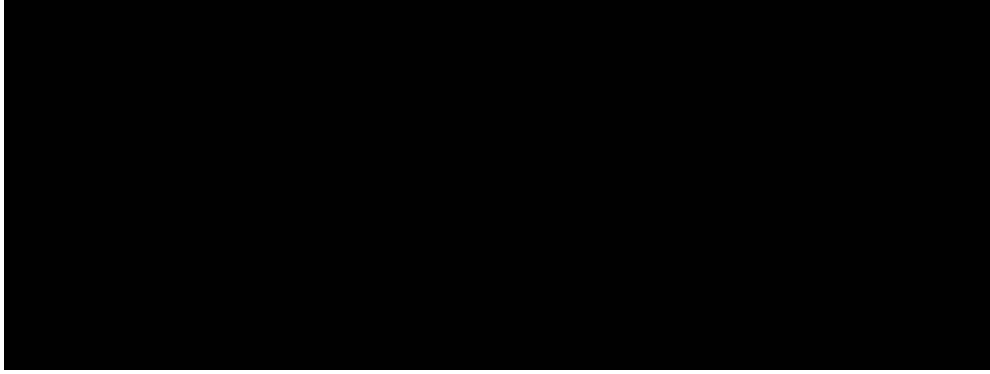


Рис. 8. Форма верхней границы в двумерном тесте с оптимизированным счетом ускорения ($t = 0,2$)

Сравнение данных, приведенных в табл. 1 и 2, показывает, что в одномерном тесте, в котором и ранее получались хорошие результаты, за счет оптимизации счета ускорения в граничных узлах произошло улучшение результата применения НГУ.

Но наибольшие улучшения видны в двумерном тесте. Его результаты по точности находятся на уровне одномерного теста. Максимальное значение компоненты остаточной скорости примерно в 30 раз меньше соответствующего значения в начальном возмущении. Приблизительно в 3 000 раз уменьшилась кинетическая энергия в области. Также на уровне значений одномерного теста находятся и отличия от аналитических значений плотности и удельной внутренней энергии.

Из рис. 8 видно, что распространение возмущения происходит практически без искажения его контура. Показанная на рисунке форма границы после выхода возмущения из счетной области хорошо совпадает с теоретической как в переходной области (см. формулу (6)), так и для больших значений x , где теоретическое смещение границы должно равняться 0,00071.

В табл. 3 сведены результаты расчетов двумерной тестовой задачи с экстраполяцией по

формуле (7) и без нее для двух вариантов счетного шага — 0,001 и автоматического ($\approx 0,05$). Из приведенных данных следует, что экстраполяция нормальной к границе компоненты ускорения по формуле (7) существенно влияет на результаты счета, когда временной шаг намного меньше автоматического для граничных ячеек.

Эйлерова постановка расчетов. В расчетах в эйлеровой постановке при использовании НГУ дополнительно требуется корректно учесть конвективные члены.

При счете потоков, как втекающих, так и вытекающих, будем использовать плотность и удельную внутреннюю энергию из приграничной ячейки. Если для вытекающих потоков такое представление является достаточно точным, то для втекающих потоков оно представляет собой экстраполяцию.

Уравнения движения в двумерном случае для плоской системы координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}; \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned} \quad (8)$$

Таблица 3

Результаты расчетов двумерной тестовой задачи с вариацией способа счета нормальной компоненты ускорения и величины временного шага

Вариант расчета	ρ_{\min}	ρ_{\max}	ϵ_{\min}	ϵ_{\max}	$E_{\text{кин}}$	$ u _{\max}$
Экстраполяция, $\tau = 0,001$	0,999491	1,00015	0,999797	1,000063	$3,59 \cdot 10^{-10}$	$1,77 \cdot 10^{-4}$
Экстраполяция, τ – автом.	0,99976	1,00029	0,999892	1,000049	$2,73 \cdot 10^{-10}$	$8,22 \cdot 10^{-4}$
Без экстраполяции, $\tau = 0,001$	0,999249	1,00065	0,999701	1,000262	$1,59 \cdot 10^{-9}$	$4,65 \cdot 10^{-4}$
Без экстраполяции, τ – автом.	0,999665	1,00006	0,999867	1,000082	$3,08 \cdot 10^{-10}$	$9,34 \cdot 10^{-4}$

Произведем оценку членов в этих уравнениях. Очевидно, что все конвективные члены — порядка u^2/λ . Как следует из уравнения (5), члены в правых частях уравнения (8) вблизи границы счетной области имеют порядок величины cu/λ . Так как $u \ll c$, то в первом приближении конвективными членами в уравнениях движения можно пренебречь, т. е. не учитывать изменения скорости в граничных узлах счетной сетки за счет потоков импульса через границы ячеек.

Был проведен тестовый расчет двумерной задачи в эйлеровой постановке без учета конвективных членов в уравнениях движения, который показал, что происходит заметное снижение точности НГУ по сравнению с расчетом в лагранжевой постановке. Поэтому необходимо учесть конвективные члены в уравнениях движения.

На рис. 9 представлена схема учета конвективных членов в уравнении движения. На эйлеровом этапе расчета газодинамики с помощью потоков импульса через границы четырехугольников, указанных на рисунке пунктиром, находится изменение импульса узла ячейки и соответственно изменение компонент скорости.

В узлах граничных ячеек отсутствуют потоки J_3 , J_4 , J_5 , и J_6 . Поэтому напрямую на эйлеровом этапе нельзя сосчитать добавки скорости в узловых точках граничной ячейки.

Относительно потоков J_3 и J_6 можно сказать следующее. Суммарный поток импульса, пере-

носимый какой-либо компонентой скорости, равен разности потоков через противоположные стороны ячейки (в данном случае $J_3 - J_6$). Для длинноволновых возмущений эти потоки будут отличаться слабо. Поэтому получающаяся разность может оказаться заметно меньше величины самих потоков. Тем не менее из-за малости размера ячейки по сравнению с длиной волны возмущения можно ожидать, что эта разность будет близка к разности потоков $J_2 - J_7$. Поэтому перенос импульса продольной компонентой скорости можно учитывать на эйлеровом этапе, приравняв поток J_2 потоку J_3 , а J_7 — потоку J_6 .

Для потоков J_4 и J_5 такой подход неприменим. В случае приравнивания их соответственно потокам J_1 и J_8 имеем равенство нулю их разности. Поэтому получим полные потоки импульса, переносимые нормальной к границе компонентой скорости, учитывая соответствующие части конвективных членов на лагранжевом этапе расчета газодинамики. То есть на лагранжевом этапе для случая, представленного на рис. 9, для плоской системы координат будем решать уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}; \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - u_x \frac{\partial u_y}{\partial x}. \end{aligned}$$

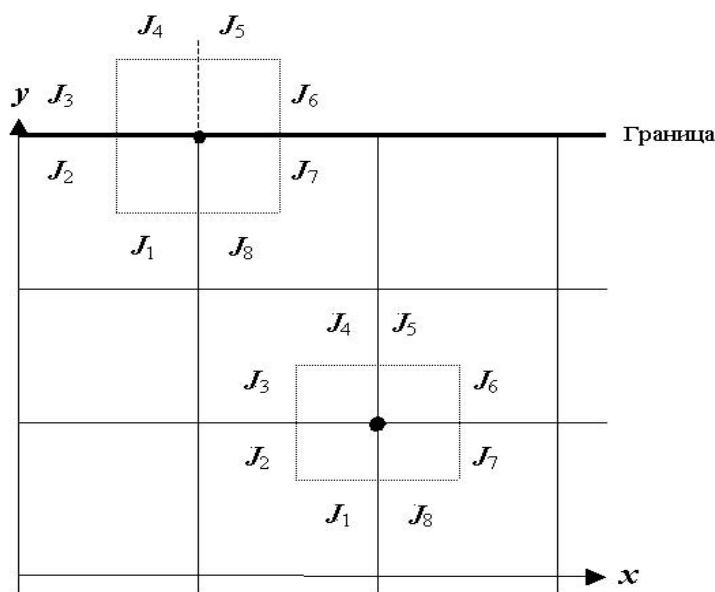


Рис. 9. Схема учета конвективных членов в уравнении движения

С соответствующими изменениями были проведены одномерный и двумерный тестовые расчеты. Их результаты представлены в табл. 4. Форма возмущения в процессе его движения по счетной области практически совпадает с изображенной на рис. 7.

Из приведенных данных следует, что после учета конвективных членов в тестовых расчетах в эйлеровой постановке получены результаты, мало уступающие результатам в лагранжевой постановке.

Из рис. 10 видно, что распространение возмущения, как и в случае лагранжевой постановки, происходит практически без искажения его контура.

Вариация длины волны и амплитуды скорости возмущения

Проведены тестовые расчеты с вариацией длины волны и амплитуды скорости возмущения.

В качестве номинальных используются расчеты одномерной и двумерной задач в эйлеровой постановке. В них на момент $t = 0$ заданы $A = 0,01$ с, $\lambda = 0,2$ (двадцать счетных ячеек по

направлению λ в одномерной задаче). В сравнительных расчетах задавались $\lambda = 0,1$ и $A = 0,05$ с.

В табл. 5, 6 приводятся результаты, полученные в этих расчетах с шагом по времени $\tau = 0,001$, который приблизительно в 50 раз меньше автоматического.

Из приведенных в табл. 5, 6 данных следует, что имеет место сильная зависимость остаточной скорости возмущения от длины волны λ и начальной амплитуды скорости A .

Была выполнена вариация λ и A в расчетах двумерной задачи с автоматическим выбором временного шага. В табл. 7 приведены результаты этих расчетов.

Из сравнения данных табл. 6 и 7 следует, что в расчетах с автоматическим выбором шага по времени практически исчезает зависимость от λ . Это указывает на возможную погрешность формулы (7), по которой с помощью процедуры экстраполяции подправляются нормальные к границе компоненты ускорения в узлах граничных ячеек. Понятно, что чем короче длина волны, тем сильнее могут сказаться ошибки экстраполяции.

Таблица 4

Результаты одномерного и двумерного тестов в эйлеровой постановке с учетом конвективных членов

Тип задачи, время	ρ_{\min}	ρ_{\max}	e_{\min}	e_{\max}	M	$E_{\text{внутр}}$	$E_{\text{кин}}$	$E_{\text{полн}}$	$ u _{\max}$
1D, $t = 1,4$	0,999946	1,000052	0,999979	1,000022	1,0	1,0	$1,82 \cdot 10^{-10}$	1,0	$6,26 \cdot 10^{-5}$
2D, $t = 0,6$	0,999528	1,000135	0,999810	1,000055	0,9999	0,9999	$2,4 \cdot 10^{-10}$	0,9999	$1,32 \cdot 10^{-4}$

Таблица 5

Результаты расчетов одномерной тестовой задачи с вариацией λ и A ($t = 1,4$)

Вариант расчета	ρ_{\min}	ρ_{\max}	e_{\min}	e_{\max}	M	$E_{\text{вн}}$	$E_{\text{кин}}$	$E_{\text{полн}}$	$ u _{\max}$
$\lambda = 0,2; A = 0,01$ с	0,999946	1,000052	0,999979	1,000022	1,0	1,0	$1,82 \cdot 10^{-10}$	1,0	$6,26 \cdot 10^{-5}$
$\lambda = 0,1; A = 0,01$ с	0,999826	1,00025	0,999925	1,000101	1,0	1,0	$6,2 \cdot 10^{-9}$	1,0	$2,54 \cdot 10^{-4}$
$\lambda = 0,2; A = 0,05$ с	0,999396	1,00035	0,999773	1,000153	0,9999	0,9999	$1,25 \cdot 10^{-8}$	0,9999	$1,7 \cdot 10^{-2}$

Таблица 6

Результаты расчетов двумерной тестовой задачи с вариацией λ и A ($t = 1,4$)

Вариант расчета	ρ_{\min}	ρ_{\max}	e_{\min}	e_{\max}	M	$E_{\text{вн}}$	$E_{\text{кин}}$	$E_{\text{полн}}$	$ u _{\max}$
$\lambda = 0,2; A = 0,01$ с	0,999528	1,000135	0,99981	1,000055	0,9999	0,9999	$2,4 \cdot 10^{-10}$	0,9999	$1,32 \cdot 10^{-4}$
$\lambda = 0,1; A = 0,01$ с	0,99956	1,00059	0,999837	1,000241	0,9999	0,9999	$2,03 \cdot 10^{-9}$	0,9999	$7,6 \cdot 10^{-4}$
$\lambda = 0,2; A = 0,05$ с	0,99849	1,00111	0,999411	1,000449	0,9999	0,9999	$6,4 \cdot 10^{-8}$	0,9999	$7,4 \cdot 10^{-2}$

Результаты расчетов двумерной тестовой задачи с вариацией λ и A (τ – автоматический)

Вариант расчета	ρ_{\min}	ρ_{\max}	ϵ_{\min}	ϵ_{\max}	M	$E_{\text{вн}}$	$E_{\text{кин}}$	$E_{\text{полн}}$	$ u _{\max}$
$\lambda = 0,2; A = 0,01 \text{ с}$	0,999858	1,000046	0,999916	1,000051	0,9999	0,9999	$1,46 \cdot 10^{-10}$	0,9999	$8,29 \cdot 10^{-5}$
$\lambda = 0,1; A = 0,01 \text{ с}$	0,999919	1,00011	0,999915	1,000086	0,9999	0,9999	$9,15 \cdot 10^{-11}$	0,9999	$9,61 \cdot 10^{-5}$
$\lambda = 0,2; A = 0,05 \text{ с}$	0,99796	1,00358	0,999395	1,001424	0,9998	0,9998	$5,48 \cdot 10^{-8}$	0,9998	$7,4 \cdot 10^{-2}$

Сравнение результатов, приведенных в табл. 6 и 7, показывает, что влияние амплитуды скорости возмущения на коэффициент отражения практически не зависит от шага по времени.

Исходя из результатов тестов, в реальных расчетах можно рекомендовать постановку НГУ на расстояниях, где амплитуда возмущений, подходящих к границе, составляет приблизительно 1% от скорости звука.

Заключение

Разработано НГУ для численного решения задач газодинамики с использованием лагранжевых и лагранжево-эйлеровых счетных сеток. Реализация НГУ проведена для двумерной газодинамической методики ЭГАК. Сформулирована двумерная тестовая задача, для которой выполнено численное моделирование с использованием предложенного граничного условия. Результаты расчетов в одномерном и двумерном приближении показали хорошую эффективность и точность предложенного метода.

Предложенный метод является достаточно общим и может быть применен в методиках, использующих представление скорости в узлах счетной сетки, а плотности и энергии — в центрах ячеек.

Список литературы

1. Ильгамов М. А. О неотражающих условиях на границах расчетной области // Динамика оболочек в потоках. Труды семинара. Вып. 18. Казань: Казанский физико-

технический институт КФ АН СССР, 1985. С. 4—76.

2. Ильгамов М. А. Обзор работ по неотражающим условиям на границах расчетной области // Численные граничные условия. Казань: Казанский физико-технический институт КНЦ АН СССР, 1990. С. 6—54.
3. Tsynkov S. V. Numerical solution of problems on unbounded domains. A review // Appl. Numerical Mathematics. 1998. Vol. 27. P. 465—532.
4. Софронов И. Л. Нелокальные искусственные граничные условия для задач трехмерного стационарного обтекания // Математическое моделирование. 1998. Т. 10, № 9. С. 64—86.
5. Rowley C. W., Colonius T. Discretely nonreflecting boundary conditions for linear hyperbolic systems // J. of Comp. Physics. 2000. Vol. 157, No 2. P. 500—538.
6. Дородницын Л. В. Неотражающие граничные условия для систем уравнений газовой динамики // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2002. Т. 42, № 4. С. 522—549.
7. Янилкин Ю. В., Колобянин В. Ю., Чистякова И. Н., Егужова М. Ю. Применение метода РРМ в расчетах по методикам ЭГАК и ТРЭК // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 4. С. 69—79.

Статья поступила в редакцию 07.06.07.