

УДК 519.6

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРАТЧАЙШЕГО РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ С УЧЕТОМ ОГИБАНИЯ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

Д. Ю. Дьянов, К. В. Циберев
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Излагаются основные моменты решения задачи об определении кратчайшего расстояния между двумя точками в пространстве с учетом огибания эллипсоида вращения. Описаны некоторые аспекты программной реализации алгоритма в математической методике ЛЭГАК-3D.

Введение

Задача о нахождении кратчайшего расстояния между двумя точками в пространстве с учетом огибания эллипсоида вращения может возникнуть в разных областях научной деятельности. В данной работе предложен алгоритм, позволяющий с любой наперед заданной точностью определить такое расстояние.

Будем рассматривать только случай, когда точки M_1 и M_2 , между которыми ищется кратчайшее расстояние, лежат друг относительно друга в области тени эллипсоида, т. е. их нельзя соединить прямой линией, не пересекающей эллипсоид. Кратчайшая кривая, соединяющая точки M_1 и M_2 , в этом случае будет состоять из трех составляющих:

- 1) отрезка прямой, выходящего из M_1 и касающегося эллипсоида в точке M_1^* ;
- 2) отрезка прямой, выходящего из M_2 и касающегося эллипсоида в точке M_2^* ;
- 3) *геодезической линии* как кривой наименьшей длины [1], проходящей по эллипсоиду через точки M_1^* и M_2^* .

Обоснуем данное утверждение. Для простоты рассмотрим плоский случай. Пусть на плоскости заданы две точки M_1 и M_2 , лежащие в области тени эллипса. Покажем, что кратчайшее расстояние между точками M_1 и M_2 состоит из отрезков касательных к эллипсу и соответствующей дуги эллипса (рис. 1).

Доказательство этого факта для произвольной выпуклой кривой на плоскости приведено, например, в [2]. Здесь же дадим другое доказательство, которое легко обобщается на трехмерный случай.

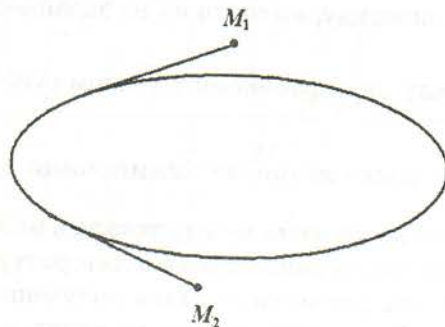


Рис. 1. Кратчайшее расстояние между точками с учетом огибания эллипса

Построим итерационный процесс определения огибающей линии для эллипса (рис. 2). Допустим, что кратчайшая кривая состоит из отрезков прямых M_1A_1 и M_2A_1 . Возьмем произвольные точки $A_2 \in M_1A_1$ и $A_3 \in M_2A_1$ такие, что их можно соединить прямой линией, не пересекающей эллипс. Соединим точки A_2 и A_3 прямой, получим ломаную линию $M_1A_2A_3M_2$, которая короче $M_1A_1M_2$. Далее возьмем произвольные точки $A_4 \in A_2A_3$ и $A_5 \in A_3M_2$ такие, что их можно соединить прямой линией. Получим ломаную линию $M_1A_2A_4A_5M_2$, которая короче $M_1A_2A_3M_2$. Продолжая такой итерационный процесс, получим, что кратчайшее расстояние состоит из двух касательных и дуги эллипса.

В трехмерном случае в связи с тем, что из точек M_1 и M_2 , вообще говоря, можно провести бесконечное множество касательных к эллипсоиду (рис. 3), задача сводится к минимизации функции от двух аргументов:

$$L(M_1^*, M_2^*) = L_1(M_1, M_1^*) + L_2(M_2, M_2^*) + L_3(M_1^*, M_2^*), \quad (1)$$

где L_1, L_2 — длины касательных, L_3 — длина геодезической линии.

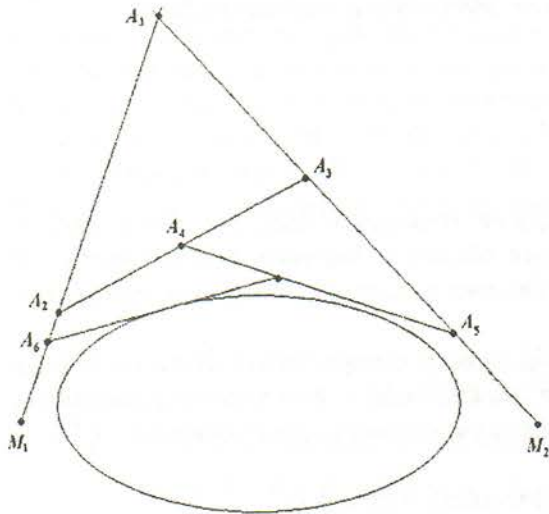


Рис. 2. Нахождение кратчайшего расстояния между точками на плоскости с учетом огибания эллипса

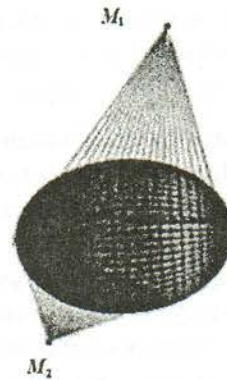


Рис. 3. Определение кратчайшего расстояния между точками в пространстве с учетом огибания эллипсоида

Таким образом, для нахождения расстояния между двумя точками пространства с учетом огибания эллипсоида вращения нужно решить следующие задачи:

- 1) нахождение расстояния (длины геодезической линии) между двумя произвольными точками на эллипсоиде вращения;
- 2) нахождение касательных к эллипсоиду, выходящих из заданной точки, в зависимости от некоторого параметра;
- 3) минимизация расстояния между двумя точками с учетом огибания эллипсоида вращения.

Кратчайшее расстояние на эллипсоиде вращения

Задача о нахождении кратчайшего расстояния между точками на эллипсоиде иногда рассматривается в книгах по дифференциальной геометрии, а также в литературе, посвященной вариационному исчислению. Но обычно данная задача решается до этапа получения интегральных формул, содержащих эллиптические интегралы, либо вообще, только до получения дифференциального уравнения. Конкретных алгоритмов получения требуемого расстояния авторами обнаружено не было. В

зарубежной литературе можно встретить некий итерационный метод для нахождения длины геодезической линии на эллипсоиде [3], который, как выяснилось, применим только для сфероидов, и то не слишком сплюснутых. Это объясняется прежде всего нацеленностью данного алгоритма на конкретную задачу — нахождение расстояния на земной поверхности, которая, как известно, представляет собой не сильно сплюснутый сфероид. Поэтому при решении вышепоставленной задачи возникла проблема разработки и реализации собственного численного алгоритма нахождения длины геодезической линии.

Будем рассматривать задачу в декартовой системе координат с осью Ox , совпадающей с осью вращения. Параметрическое уравнение эллипсоида записывается в виде

$$x(u, \nu) = u; \quad y(u, \nu) = f(u) \cos(\nu); \quad z(u, \nu) = f(u) \sin(\nu),$$

где $f(u) = b\sqrt{1 - \left(\frac{u}{a}\right)^2}$; u — соответствующая координата точки по оси Ox ; ν — угол вращения вокруг оси симметрии; a, b — соответственно большая и малая полуоси эллипсоида вращения.

Зафиксируем две точки $M_1(u_1, \nu_1)$, $M_2(u_2, \nu_2)$ на эллипсоиде вращения, где $u_1 \leq u_2$, $\nu_1 \leq \nu_2$ (другие варианты расположения точек простейшими преобразованиями приводятся к рассматриваемому случаю). Кратчайшее расстояние между точками M_1 и M_2 — это геодезическая линия. Ее уравнение можно выводить, исходя из принципов классического вариационного исчисления [4] или воспользовавшись соответствующими формулами дифференциальной геометрии [1].

Для эллипсоида вращения соответствующая краевая задача в принятой системе координат имеет вид

$$\frac{d}{du} \frac{f^2(u)\nu'(u)}{\sqrt{1 + f'^2(u) + f^2(u)\nu'^2(u)}} = 0; \quad (2)$$

$$\nu(u)|_{u_1} = 0; \quad \nu(u)|_{u_2} = \nu_2 - \nu_1.$$

Здесь $\nu(u)$ — изменение угла вращения вокруг оси симметрии при движении от точки $M_1(u_1, \nu_1)$ к точке $M(u, \nu)$ по геодезической линии. Например, для точки M_2 (т. е. $u = u_2$) это угол между прямыми P_1M_1 и P_2M_2 (рис. 4), т. е. $\nu_2 - \nu_1$.

Очевидно, если рассматривать $\nu(u)$ как однозначную функцию, то она дает истинное изменение угла только в случае, если геодезическая линия между точками M_1 и M_2 является кривой, однозначно определяемой параметром u (рис. 5).

Геодезическая линия между M_1 и M_2 однозначно не определяется параметром u , если кривая имеет точку ветвления $M^*(u^*, \nu^*)$, в которой точка, движущаяся по геодезической линии, меняет направление движения относительно оси Ox (рис. 6). Тогда $\nu(u)$ даст соответствующее изменение угла вращения вокруг оси симметрии при движении от точки M_1 к точке P по геодезической линии.

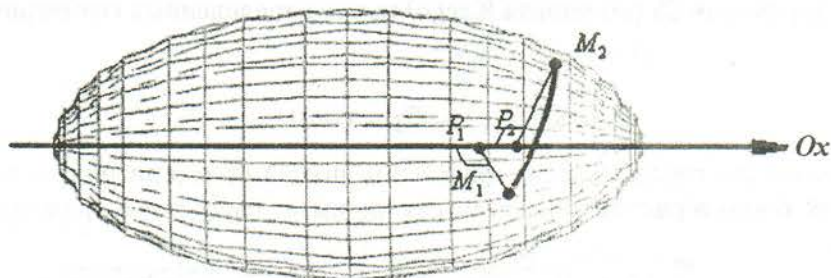


Рис. 4. Геометрическая интерпретация $\nu(u_2)$

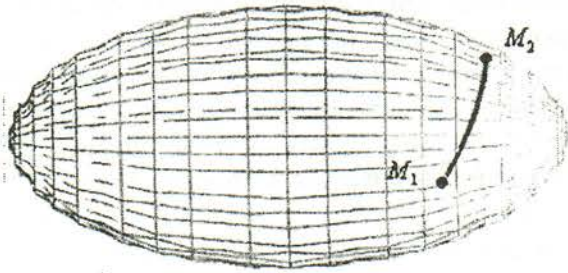


Рис. 5. Кривая, однозначно определяемая параметром u

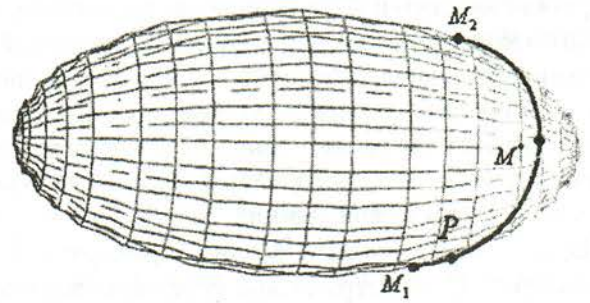


Рис. 6. Кривая с точкой ветвления

Таким образом, чтобы оставаться в классе однозначных функций, необходимо немного модифицировать краевую задачу. Для этого предположим, что точка ветвления $M^*(u^*, \nu^*)$ найдена (точный алгоритм поиска будет предложен далее). Тогда можно записать две следующие краевые задачи:

$$\frac{d}{du} \frac{f^2(u)w_1'(u)}{\sqrt{1+f'^2(u)+f^2(u)w_1'^2(u)}} = 0; \quad w_1(u)|_{u_1} = 0; \quad w_1(u)|_{u_2} = \nu^* - \nu_1; \quad (3)$$

$$\frac{d}{du} \frac{f^2(u)w_2'(u)}{\sqrt{1+f'^2(u)+f^2(u)w_2'^2(u)}} = 0; \quad w_2(u)|_{u^*} = 0; \quad w_2(u)|_{u_2} = \nu_2 - \nu^*. \quad (4)$$

Здесь $w_1(u), w_2(u)$ — изменение угла вращения вокруг оси симметрии при движении соответственно от точек $M_1(u_1, \nu_1)$ и $M^*(u^*, \nu^*)$ к $M(u, \nu)$ по геодезической линии. Причем теперь функции $w_1(u)$ и $w_2(u)$ — однозначные функции от аргумента u .

Таким образом, требуется:

- 1) найти точку ветвления M^* на геодезической линии, если она существует;
- 2) решить краевую задачу вида (2) для однозначной функции при отсутствии точки ветвления или две краевые задачи (3), (4), если точка ветвления существует.

Рассмотрим случай, когда геодезическая линия между двумя точками M_1 и M_2 не имеет точки ветвления. Соответствующее решение краевой задачи (2) можно записать в квадратурах через эллиптический интеграл [5]:

$$\nu(u_1, u, C_1) = C_1 \int_{u_1}^u \frac{\sqrt{1+f'^2(u)} du}{f(u)(f^2(u)-C_1^2)} = C_1 \frac{a}{b} \int_{u_1}^u \frac{\sqrt{a^4 - a^2u^2 + b^2u^2} du}{(a^2 - u^2) \sqrt{a^2(b^2 - C_1^2) - b^2u^2}}. \quad (5)$$

Здесь константа интегрирования C_1 (константа Клеро) имеет определенный геометрический смысл [6] (теорема Клеро):

$$f(u) \sin \beta(u) = C_1 = \text{const}, \quad (6)$$

где $\beta(u)$ — угол Клеро между геодезической кривой и u -линией (т. е. кривой $\nu = \text{const}$).

Длина геодезической линии в рассматриваемом случае имеет следующее представление:

$$L(u_1, u_2, C_1) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{f(u) \sqrt{1+f'^2(u)} du}{\sqrt{f^2(u)-C_1^2}} = \frac{b}{a} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{a^4 - a^2u^2 + b^2u^2} du}{\sqrt{a^2(b^2 - C_1^2) - b^2u^2}}. \quad (7)$$

Данный интеграл также является эллиптическим и не выражается через элементарные функции.

Видно, что задача свелась к нахождению константы Клеро и последующему интегрированию выражения (7). Будем искать константу Клеро из уравнения относительно s :

$$\nu_2 - \nu_1 - \nu(u_1, u_2, s) = 0.$$

Теперь рассмотрим случай, когда геодезическая линия имеет точку ветвления. В этом случае решения краевых задач (3), (4) записываются аналогично случаю, рассмотренному ранее. При этом, используя теорему Клеро, можно найти точку ветвления $M^*(u^*, \nu^*)$. В силу теоремы Клеро и гладкости геодезической линии точкой $M^*(u^*, \nu^*)$ может быть только точка, в которой угол между кривой и u -линией равен $\beta(u) = 90^\circ$. Таким образом, в силу формулы (6) получаем

$$u^* = a \sqrt{1 - \left(\frac{C_1}{b}\right)^2},$$

где константа C_1 определяет геодезическую линию как в краевой задаче (3), так и в (4).

Теперь можно посчитать полное изменение угла по формуле

$$w_1(u_1, u^*, C_1) + w_2(u^*, u_2, C_1) = \int_{u_1}^{u^*} \frac{C_1 a \sqrt{a^4 - a^2 u^2 + b^2 u^2} du}{b(a^2 - u^2) \sqrt{a^2(b^2 - C_1^2) - b^2 u^2}} + \int_{u^*}^{u_2} \frac{C_1 a \sqrt{a^4 - a^2 u^2 + b^2 u^2} du}{b(a^2 - u^2) \sqrt{a^2(b^2 - C_1^2) - b^2 u^2}}.$$

Учитывая, что $u_1 \leq u_2$, формулу можно записать в виде, более пригодном для численной реализации:

$$w_1(u_1, u^*, C_1) + w_2(u^*, u_2, C_1) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{C_1 a \sqrt{a^4 - a^2 u^2 + b^2 u^2} du}{b(a^2 - u^2) \sqrt{a^2(b^2 - C_1^2) - b^2 u^2}} + 2 \int_{u_2}^{u^*} \frac{C_1 a \sqrt{a^4 - a^2 u^2 + b^2 u^2} du}{b(a^2 - u^2) \sqrt{a^2(b^2 - C_1^2) - b^2 u^2}}.$$

Таким образом, задача снова свелась к нахождению константы Клеро и последующему нахождению длины геодезической линии. Уравнение относительно константы Клеро s в этом случае имеет вид

$$\nu_2 - \nu_1 - w_1(u_1, u^*, s) - w_2(u^*, u_2, s) = 0, \quad u^* = a \sqrt{1 - \left(\frac{s}{b}\right)^2}.$$

Теперь приведем общий алгоритм для нахождения длины геодезической линии:

1. Определяем, есть точка ветвления или нет. Это следует из условия неравенства:

если $\nu(u_1, u_2, S_{\max}) \geq \nu_2 - \nu_1$, точки ветвления нет;

если $\nu(u_1, u_2, S_{\max}) < \nu_2 - \nu_1$, точка ветвления есть.

Здесь $S_{\max} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \max(u_1, u_2)^2}$.

2. Находим константу Клеро для соответствующей геодезической линии из следующего уравнения:

$$\nu_2 - \nu_1 - V(u_1, u_2, s) = 0, \tag{8}$$

где

$$V(u_1, u_2, s) = \begin{cases} \nu(u_1, u_2, s), & \text{если } \nu(u_1, u_2, S_{\max}) \geq \nu_2 - \nu_1; \\ w_1(u_1, u^*, s) + w_2(u^*, u_2, s), & \text{если } \nu(u_1, u_2, S_{\max}) < \nu_2 - \nu_1; \end{cases}$$

$$u^* = a \sqrt{1 - \left(\frac{s}{b}\right)^2}.$$

Здесь следует отметить, что $s \geq 0$, так как $s \leq 0$ соответствует случаю $\nu_1 > \nu_2$.

3. Находим длину геодезической линии:

$$L(u_1, u_2, C_1) = \begin{cases} \frac{b}{a} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{a^4 - a^2 u^2 + b^2 u^2} du}{\sqrt{a^2(b^2 - C_1^2) - b^2 u^2}}, & \text{если } \nu(u_1, u_2, S_{\max}) \geq \nu_2 - \nu_1; \\ \frac{b}{a} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{a^4 - a^2 u^2 + b^2 u^2} du}{\sqrt{a^2(b^2 - C_1^2) - b^2 u^2}} + 2 \frac{b}{a} \int_{u_2}^{u^*} \frac{\sqrt{a^4 - a^2 u^2 + b^2 u^2} du}{\sqrt{a^2(b^2 - C_1^2) - b^2 u^2}}, & \text{если } \nu(u_1, u_2, S_{\max}) < \nu_2 - \nu_1. \end{cases}$$

Параметризация касательных к эллипсоиду, выходящих из заданной точки

Для параметризации касательных можно использовать множество вариантов. В данной работе в качестве параметра выбирается какая-либо из осей (в зависимости от положения точки).

Возьмем, например, ось Ox и точку M_1 . Проведем из точки M_1 все касательные к эллипсоиду (рис. 7). Очевидно, что точки их касания с эллипсоидом образуют некую замкнутую кривую γ . Теперь построим плоскость $x = \text{const}$. Эта плоскость в общем случае пересечет замкнутую кривую γ в двух точках. Таким образом, x -координата не может однозначно характеризовать касательную, так как обычно одному x соответствуют две касательные. Очевидно, существуют две точки $K_1^*(x_1^*, y_1^*, z_1^*)$, $K_2^*(x_2^*, y_2^*, z_2^*)$ на кривой γ , в которых плоскость $x = \text{const}$ будет пересекать кривую в одной точке, т. е. в этих точках x -координата однозначно характеризует касательные. Таким образом, если спроецировать кривую γ на плоскость Oxy , получим картину, изображенную на рис. 8.

Введем обозначения γ_1 и γ_2 для частей кривой γ , которые на проекции на плоскость Oxy лежат соответственно выше и ниже прямой, проходящей через точки $K_1^*(x_1^*, y_1^*, z_1^*)$, $K_2^*(x_2^*, y_2^*, z_2^*)$. Теперь введем фиктивный интервал $(x_2^*, x_2^* + (x_2^* - x_1^*))$ и будем распределять касательные из отрезка $[x_1^*, x_2^*]$ на отрезок $[x_1^*, x_2^* + (x_2^* - x_1^*)]$ по следующему принципу (рис. 9):

1. На отрезке $[x_1^*, x_2^*]$ возьмем касательные к эллипсоиду, точки касания которых расположены на кривой γ_1 .
2. На интервале $(x_2^*, x_2^* + (x_2^* - x_1^*))$ возьмем касательные к эллипсоиду, точки касания которых расположены на кривой γ_2 .

То есть получаем, что условие $x \in [x_1^*, x_2^* + (x_2^* - x_1^*)]$ однозначно и непрерывно характеризует касательные.

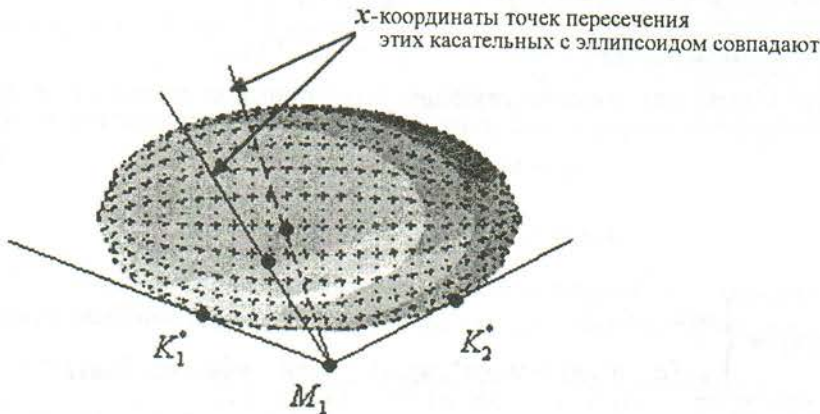


Рис. 7. Параметризация касательных

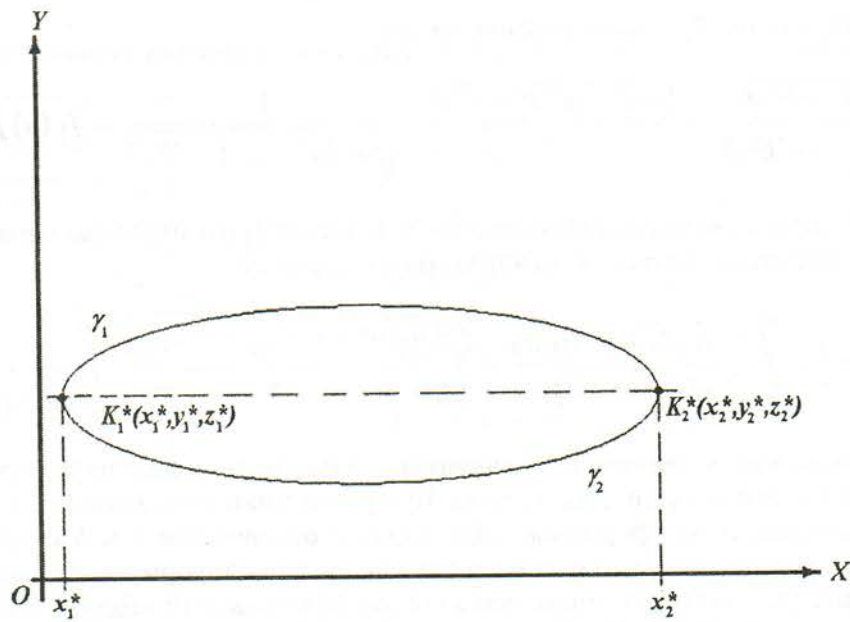


Рис. 8. Проекция кривой γ на плоскость Oxy

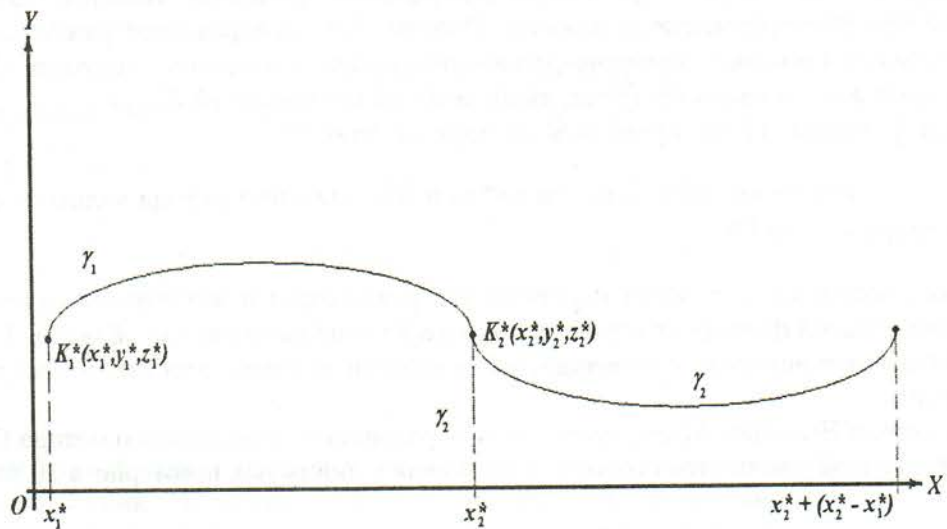


Рис. 9. Параметризация касательной

Основные принципы реализации алгоритма в методике ЛЭТАК-3D

Для реализации описанного выше алгоритма нахождения длины геодезической линии для эллипсоида вращения необходимо:

- 1) найти интегралы вида (5), (7);
- 2) решить уравнение (8).

Для вычисления интегралов вида (5), (7) применение традиционных методов интегрирования (метода Симпсона и т. д.) неэффективно и приводит к большим погрешностям. Это обусловлено наличием в подынтегральных функциях особенностей. Для интегрирования (5), (7) в данном случае применяются нестандартные квадратурные формулы [7]. Рассмотрим это подробнее на примере интеграла (7).

Подынтегральную функцию (7) можно разбить на две:

$$\frac{b}{a} \frac{\sqrt{a^4 - a^2 u^2 + b^2 u^2}}{\sqrt{a^2 (b^2 - C_1^2) - b^2 u^2}} = \frac{b\sqrt{a^4 - a^2 u^2 + b^2 u^2}}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 (b^2 - C_1^2) - b^2 u^2}} = f_1(u) f_2(u).$$

Так как интеграл от $f_2(u)$ можно взять аналитически, а функция $f_1(u)$ медленно меняется на малом интервале, то можно записать следующую квадратурную формулу:

$$L(M_1(u_1, \nu_1), M_2(u_2, \nu_2)) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{f(u) \sqrt{1+f'^2(u)} du}{\sqrt{f^2(u) - C_1^2}} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{b\sqrt{a^4 - a^2 x_{i+0,5}^2 + b^2 x_{i+0,5}^2}}{a} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{du}{\sqrt{a^2 (b^2 - C_1^2) - b^2 u^2}}.$$

Здесь следует учитывать, что по записанной квадратурной формуле можно найти точное значение интеграла (7) в случае, когда $a = b$ (т. е. для сферы). При увеличении отношения a к b увеличивается погрешность данной квадратурной формулы. Для задач с отношением a к b в пределах одного порядка численно было установлено, что погрешность квадратурной формулы близка к $O(h)$.

Перед поиском длины геодезической линии оси эллипса желательно приводить к виду $a = 1$, $b = b_{\text{старое}}/a$. Данная параметризация позволяет резко сократить количество операций, что заметно даже на приведенной выше квадратурной формуле.

Для решения уравнения (6) можно применять любые численные методы решения трансцендентных уравнений от одного аргумента. При этом следует учитывать, что $V(u_1, u_2, s)$ имеет ограниченную область определения $s \in (0, S_{\text{max}})$, и либо доопределять функцию, либо использовать методы, гарантирующие невыход аргумента за данную область. При программной реализации алгоритма были протестированы несколько методов: дихотомии, простых итераций, секущих. Наиболее пригодным для данной задачи оказался метод дихотомии на интервале $(0, S_{\text{max}})$.

Минимизация функции (1) тестировалась на двух методах:

- метод спуска с использованием для одномерной минимизации метода золотого сечения [7];
- метод Нелдера—Мида [8].

Метод спуска рассматривался из-за простоты его реализации и внутренней приспособленности для оптимизации целевой функции с ограничениями в виде прямоугольной области. Реализованный метод спуска позволяет находить с необходимой точностью искомое расстояние, но дает результат слишком медленно.

Применение метода Нелдера—Мида, являющегося развитием симплексного метода Спенсера, Хекста и Химсворта, позволило увеличить скорость нахождения минимума примерно в 10 раз.

Тестовые расчеты

Оценка точности разработанного алгоритма определения положения фронта детонационной волны (нахождение длины огибающей линии — см. рис. 3) проводилась на следующих задачах:

- огибание сферы (простейший случай);
- огибание эллипсоида вращения.

Для задачи огибания сферы результат сравнивался с аналитическим решением.

Пусть дана сфера радиусом $R = 1,5$ см с центром в начале координат, в пространстве заданы две произвольные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Требуется определить минимальное расстояние между точками с учетом огибания сферы. В табл. 1 приведено сравнение результатов расчета с точными значениями.

Аналогичное сравнение результатов для эллипсоида невозможно в силу отсутствия аналитического решения для произвольных точек. Однако в некоторых случаях можно вычислить расстояние с любой заданной точностью.

Таблица 1

Сравнение результатов расчетов с аналитическим решением при огибании сферы

| Точки в пространстве | Расстояние между точками | | Погрешность, % |
|--|--------------------------|-------------------|----------------------|
| | Точное значение | Результат расчета | |
| $x_1 = 2,2, y_1 = 2,2, z_1 = 1,841$ $x_2 = -2,108, y_2 = -1,749, z_2 = -1,39$ | 7,220886 | 7,220891 | $6,92 \cdot 10^{-5}$ |
| $x_1 = 0,2, y_1 = 2,2, z_1 = 1,7$ $x_2 = 1,7, y_2 = -1,8, z_2 = -0,3$ | 4,760214 | 4,760216 | $4,2 \cdot 10^{-5}$ |
| $x_1 = -1,3, y_1 = 1,7, z_1 = -0,8$ $x_2 = 0,2, y_2 = -1,8, z_2 = 2,2$ | 5,038506 | 5,038517 | $2,18 \cdot 10^{-4}$ |
| $x_1 = 0,0, y_1 = 0,0, z_1 = 1,5$ $x_2 = 0,0, y_2 = 0,0, z_2 = -1,5$ | 4,712388 | 4,712388 | 0,0 |

Пусть дан эллипсоид вращения с полуосями $a = 2, b = 1,5$ и центром в начале координат, в пространстве заданы две произвольные точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$. Требуется определить минимальное расстояние между точками с учетом огибания эллипсоида вращения. В табл. 2 приведено сравнение результатов с точными решениями для некоторых точек.

Таблица 2

Сравнение результатов расчетов с аналитическим решением при огибании эллипсоида

| Точки в пространстве | Расстояние между точками | | Погрешность, % |
|---|--------------------------|-------------------|----------------------|
| | Точное значение | Результат расчета | |
| $x_1 = 0,0, y_1 = 0,0, z_1 = 2,0$ $x_2 = 0,0, y_2 = 0,0, z_2 = -1,5$ | 4,951163 | 4,951184 | $2,24 \cdot 10^{-4}$ |
| $x_1 = 0,0, y_1 = 0,0, z_1 = 1,5$ $x_2 = 0,0, y_2 = 0,0, z_2 = -1,5$ | 4,712388 | 4,712388 | 0,0 |
| $x_1 = 2,0, y_1 = 0,0, z_1 = 0,0$ $x_2 = -2,0, y_2 = 0,0, z_2 = 0,0$ | 5,525873 | 5,527733 | $3,36 \cdot 10^{-2}$ |

При решении данной задачи было использовано 100 точек интегрирования для нахождения длины геодезической линии. При увеличении числа точек интегрирования расчет занимает больше времени, но результат имеет более высокую точность. В табл. 3 приведены зависимости точности расчетов от количества точек интегрирования (для эллипсоида вращения с полуосями $a = 2, b = 1,5$ и точек пространства $M_1(2, 0, 0), M_2(-2, 0, 0)$).

Таблица 3

Сходимость результатов расчетов

| Количество точек интегрирования | Расстояние между точками | | Погрешность, % |
|---------------------------------|--------------------------|-------------------|----------------------|
| | Точное значение | Результат расчета | |
| 100 | 5,525873 | 5,527733 | $3,36 \cdot 10^{-2}$ |
| 1 000 | 5,525873 | 5,525933 | $1,0 \cdot 10^{-3}$ |
| 10 000 | 5,525873 | 5,525874 | $1,8 \cdot 10^{-5}$ |

Заключение

Предложен алгоритм, позволяющий с любой наперед заданной точностью определить расстояние между двумя точками с учетом огибания эллипсоида вращения.

Программная реализация разработанного алгоритма осуществлена в рамках математической методики ЛЭГАК-3D [9, 10]. Алгоритм распараллелен и может быть использован в расчетах на многопроцессорных ЭВМ с распределенной памятью.

Продемонстрирована применимость реализованного алгоритма на некоторых тестовых расчетах.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00807).

Список литературы

1. Позняк Э. Г., Шижин Е. В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство. М.: Изд-во МГУ, 1990.
2. Люстерник Л. А. Кратчайшие линии. Вариационные задачи. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
3. Vincenty T. Direct and inverse solution of geodesic on the ellipsoid with application of nested equations // Survey Review XXII. April. 1975.
4. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Эдиториал УРСС, 2002.
5. Зорич В. А. Математический анализ. Т. 1. М.: МЦНМО, 2002.
6. Калинин В. А. Использование свойств геодезических линий при моделировании технологического процесса намотки // Прикладная геометрия. Вып. 2, № 2. www.mai.ru/~aprg/Volume2/number2/kva22/kva.22.htm.
7. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
8. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. М.: Радио и связь, 1988.
9. Бахрах С. М., Спиридонов В. Ф., Шанин А. А. Метод расчета гидродинамических течений неоднородной среды в лагранжево-эйлеровых переменных // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278, № 4. С. 829—833.
10. Бахрах С. М., Величко С. В., Спиридонов В. Ф. и др. Методика ЛЭГАК-3D расчета трехмерных нестационарных течений многокомпонентной сплошной среды и принципы ее реализации на многопроцессорных ЭВМ с распределенной памятью // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2004. Вып. 4. С. 41—50.

Статья поступила в редакцию 19.12.07.