

УДК 519.642.2

## ВДЭ-МЕТОД УСКОРЕНИЯ ИТЕРАЦИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

А. Д. Гаджиев, И. А. Кондаков, А. А. Шестаков  
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Работа посвящена одной из реализаций метода выделения диагонального элемента (ВДЭ-метода) для ускорения итераций по интегралу столкновений при решении одномерного уравнения переноса нейтронов.

### Введение

Важным вопросом при решении уравнения переноса нейтронов является ускорение итераций по интегралу столкновений. Если использовать метод простой итерации или итерации Зейделя, то получается медленно сходящийся процесс. Еще в 1907 г. Шмидтом [1] был предложен метод, основанный на определении главной части ошибки, допущенной на простой итерации. Этот метод, названный методом поправок, получил в дальнейшем широкое применение. Ошибка, допущенная на простой итерации, вычислялась приближенно каким-либо более простым методом. А новый, чередующийся итерационный процесс сходил быстрее метода простой итерации.

Одной из реализаций этой идеи является метод выделения диагональных элементов (ВДЭ-метод) [2, 3]. ВДЭ-метод является более простым, чем RDSA-метод [4]. В нем при ускорении подправляются только нулевые моменты функции распределения нейтронов на основе поправочной системы уравнений. Соответственно этому достичь параметров ускорения RDSA-метода не удастся. Но привлекает простота ВДЭ-метода и достаточная его эффективность в сравнении с простой итерацией. Он легко распараллеливается. ВДЭ-метод ускорения может применяться как самостоятельно, так и в сочетании с RDSA-методом. В последнем случае ВДЭ-метод будет применяться для ускорения итераций при решении системы поправочных уравнений.

Эффективность ВДЭ-метода для задач переноса излучения в диффузионном приближении показана в [5]. В ВДЭ-методе ошибку, допущенную на простой итерации, предлагается вычислять, используя способ выделения из уравнения переноса на искомой итерации функции в центрах ячеек. Если обсчитывать ячейку разностной сетки независимо от соседних интервалов, то величины на границах, получаемые от соседних ячеек, можно брать с предыдущей итерации. Это позволяет построить поправочную систему обыкновенных уравнений, которая легко разрешима.

### 1. Описание ВДЭ-метода ускорения итераций

Рассматривается система одномерных многогрупповых уравнений переноса нейтронов:

$$\frac{\xi}{v_g} \frac{\partial N_g}{\partial t} + \frac{\mu}{r^\eta} \frac{\partial}{\partial r} (r^\eta N_g) + \frac{\eta}{2r} \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) N_g] + \alpha_g N_g = \sum_{g'=1}^G \frac{\beta_{g'g}}{2} \int_{-1}^1 N_{g'} d\mu + \frac{f_g}{2} = Q_g(r), \quad g = 1, 2, \dots, G,$$

где  $t$  — время;  $r$  — пространственная переменная;  $\mu$  — косинус угла между направлением полета нейтронов  $\Omega$  и осью  $r$ ;  $v_g$  — скорость нейтронов группы  $g$ ;  $N_g(r, \mu)$  — функция распределения нейтронов

группы  $g$ ;  $\alpha_g(r)$  — коэффициент поглощения нейтронов;  $\beta_{g'g}(r)$  — коэффициент размножения нейтронов с учетом переходов нейтронов между группами  $g$  и  $g'$ ;  $f_g(r, t)$  — заданный независимый источник;  $\xi = \begin{cases} 0 & \text{— стационарный случай;} \\ 1 & \text{— нестационарный случай;} \end{cases} \quad \eta = \begin{cases} 0 & \text{— плоская геометрия;} \\ 2 & \text{— сферически-симметричная геометрия.} \end{cases}$

Данная система решается в прямоугольнике  $D = \{0 \leq r \leq R; -1 \leq \mu \leq 1\}$  с граничными условиями  $N_g(R, \mu, t) = \varphi_g(\mu, t)$  для  $\mu \leq 0$ . В качестве граничного условия при  $r = 0$ ,  $\mu > 0$  берется  $N_g(0, \mu) = N_g(0, -\mu)$ . Начальное условие:  $N_g(r, \mu, t)|_{t=t^0} = N_g^0(r, \mu)$ .

Рассмотрим систему разностных уравнений переноса DDAD-схемы [3]:

$$\left(\frac{p^n}{v_g \Delta t} + \alpha_g\right) N_g + \operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega} \Psi_g\right) = Q_g + p^n \frac{1}{v_g \Delta t} \left(\frac{N_g}{\rho}\right)^n \rho, \quad g = 1, 2, \dots, G. \quad (1)$$

Здесь, как обычно, дробные индексы опущены. Так, например,  $N_g = (N_g)_{m, i+1/2}^{n+1/2}$ ;  $Q_g = (Q_g)_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \beta_{g',g} S N_{g', i+1/2}^{n+1/2} + \frac{f_{g, i+1/2}^{n+1/2}}{2}$ ;  $S N_g^{n+1/2} = \sum_{m=1}^M (N_g)_{m, i+1/2}^{n+1/2} \omega_m$  ( $\omega_m$  — вес квадратуры по угловой переменной  $m = 1, \dots, M$ ;  $n$  — индекс по времени;  $i$  — индекс по пространству).

Диссипативная функция распределения  $\Psi_g$  связана с функцией  $N_g$  по формуле

$$N_g = \Psi_g + \delta_g \Delta x \operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega} \Psi_g\right) - \sum_{g'=1}^G \theta_{g'g} \Delta x \operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega} S \Psi_{g'}\right), \quad (2)$$

где

$$\operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega} \Psi_g^{n+1/2}\right) \equiv \mu_m \frac{r_{i+1}^\eta (\Psi_g)_{m, i+1}^{n+1/2} - r_i^\eta (\Psi_g)_{m, i}^{n+1/2}}{\Delta V_i} + \frac{\eta}{2} \frac{c_i}{\Delta V_i} \frac{a_{m+1/2} (\Psi_g)_{m+1/2, i+1/2}^{n+1/2} - a_{m-1/2} (\Psi_g)_{m-1/2, i+1/2}^{n+1/2}}{\omega_m},$$

$$\operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega} S \Psi_g\right) = \mu_m \left( \frac{r_{i+1}^\eta (S \Psi_g)_{i+1} - r_i^\eta (S \Psi_g)_i}{\Delta V_i} - \frac{\eta}{2} \frac{c_i}{\Delta V_i} (S \Psi_g)_{i+1/2} \right);$$

$\Delta x$  — линейный размер ячейки, определяемый ниже;  $\delta_g, \theta_{g'g}$  — коэффициенты, определяющие искусственную диссипацию.

Поскольку система уравнений (1) является интегродифференциальной, то по интегралу столкновений строим итерационный процесс. Итерации будем проводить в два этапа.

На первом этапе (этап простой итерации) система уравнений (1) решается с известной правой частью  $Q_g^\nu$  ( $\nu$  — итерационный индекс по интегралу столкновений):

$$q_g N_g^{\nu+1/2} + \operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega} \Psi_g^{\nu+1/2}\right) = Q_g^\nu + p^n \frac{1}{v_g \Delta t} \left(\frac{N}{\rho}\right)^n \rho, \quad q_g = \frac{p^n}{v_g \Delta t} + \alpha_g. \quad (3)$$

Выделим в  $\operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega} \Psi\right)^{\nu+1/2}$  известные значения  $\Psi$  на освещенных гранях. Тогда выражение для  $\operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega} \Psi\right)^{\nu+1/2}$  можно записать в виде

$$\operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega} \Psi\right)^{\nu+1/2} = \frac{1}{\Delta V} a \Psi^{\nu+1/2} - \frac{1}{\Delta V} \sum_{(\vec{\Omega}, \vec{n})_i < 0} b_i \Psi_i^{\nu+1/2}, \quad (4)$$

где  $\Psi^{\nu+1/2}$  — значение  $\Psi$  в центре ячейки;  $\Psi_i^{\nu+1/2}$  — известные значения  $\Psi$  на освещенных гранях;  $a = 2 \frac{\Delta V_i}{\Delta x_s}$ ,

$$\Delta x_s = \begin{cases} \Delta r & \text{на линии } \mu = \mu_0 = -1; \\ \frac{\Delta V_i}{-\mu_m r_i^\eta + \frac{\eta}{2} c_i \frac{a_{m+1/2}}{\omega_m}} = \frac{\Delta V_i}{-\mu_m r_{i+1}^\eta + \frac{\eta}{2} c_i \frac{a_{m-1/2}}{\omega_m}} & \text{при } \mu_m \leq 0; \\ \frac{\Delta V_i}{\mu_m r_{i+1}^\eta + \frac{\eta}{2} c_i \frac{a_{m+1/2}}{\omega_m}} = \frac{\Delta V_i}{\mu_m r_i^\eta + \frac{\eta}{2} c_i \frac{a_{m-1/2}}{\omega_m}} & \text{при } \mu_m > 0. \end{cases}$$

Значения коэффициентов  $b$  для дальнейших выкладок не важны.

**ВДЭ-метод ускорения итераций с использованием коэффициентов квазидиффузионного типа.** Подставляя выражение (4) в уравнение (3) и суммируя по всем направлениям, получаем

$$\begin{aligned} q_g SN_g^{\nu+1/2} + \frac{1}{\Delta V} \left( \sum_{m=1}^M \left( a \Psi_g^{\nu+1/2} \right)_{m-1/2} \Delta \mu_{m-1} \right) - \frac{1}{\Delta V} \left( \sum_{m=1}^M \left( \sum_{(\vec{\Omega}, \vec{n})_i < 0} b_l \Psi_l^{\nu+1/2} \right)_{g, m-1/2} \Delta \mu_{m-1} \right) = \\ = SQ_g^\nu + \frac{p^n \rho}{v_g \Delta t} \left( \frac{SN_g}{\rho} \right)^n. \end{aligned} \quad (5)$$

Введем в рассмотрение положительный коэффициент квазидиффузионного типа [3]:

$$d_g^{\nu+1/2} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{\Delta V} \sum_{m=1}^M \left( a \Psi_g^{\nu+1/2} \right)_{m-1/2} \Delta \mu_{m-1}}{SN_g^{\nu+1/2}} & \text{при } SN_g^{\nu+1/2} \neq 0; \\ 0 & \text{при } SN_g^{\nu+1/2} = 0. \end{cases}$$

Поскольку коэффициент представляет собой дробно-линейный функционал, то следует ожидать слабое изменение этого коэффициента на итерациях.

Запишем систему уравнений (5) в виде

$$\left( q_g^{\nu+1/2} + d_g^{\nu+1/2} \right) SN_g^{\nu+1/2} = \frac{1}{\Delta V} \left( \sum_{m=1}^M \left( \sum_{(\vec{\Omega}, \vec{n})_i < 0} b_l \Psi_l^{\nu+1/2} \right)_{g, m-1/2} \Delta \mu_{m-1} \right) + SQ_g^\nu + \frac{p^n \rho}{v_g \Delta t} \left( \frac{SN_g}{\rho} \right)^n. \quad (6)$$

По аналогии с системой уравнений (6) выпишем для второго (ускоряющего) этапа систему уравнений относительно  $SN_g^{\nu+1}$ :

$$\left( q_g^{\nu+1/2} + d_g^{\nu+1/2} \right) SN_g^{\nu+1} = \frac{1}{\Delta V} \left( \sum_{m=1}^M \left( \sum_{(\vec{\Omega}, \vec{n})_i < 0} b_l \Psi_l^{\nu+1/2} \right)_{g, m-1/2} \Delta \mu_{m-1} \right) + SQ_g^{\nu+1} + \frac{p^n \rho}{v_g \Delta t} \left( \frac{SN_g}{\rho} \right)^n. \quad (7)$$

Заметим, что в системе уравнений (7) коэффициент  $d$  и слагаемые при коэффициентах  $b$  имеют тот же индекс  $\nu + 1/2$ , что и в системе (6), а верхний индекс  $\nu + 1$  приписан величинам  $SN_g$ ,  $SQ_g$ .

Вычитая из системы (7) систему (6), получаем систему для поправок:

$$\left( q_g^{\nu+1/2} + d_g^{\nu+1/2} \right) \Delta SN_g^{\nu+1} = SQ_g^{\nu+1} - SQ_g^\nu,$$

где

$$\begin{aligned} SQ_g^{\nu+1} - SQ_g^\nu &= SQ_g^{\nu+1} - SQ_g^{\nu+1/2} + SQ_g^{\nu+1/2} - SQ_g^\nu = \sum_{g'=1}^G \beta_{g'g} \Delta SN_{g'}^{\nu+1} + \sum_{g'=1}^G \beta_{g'g} \Delta SN_{g'}^{\nu+1/2}; \\ \Delta SN_g^{\nu+1} &= SN_g^{\nu+1} - SN_g^{\nu+1/2}; \quad \Delta SN_g^{\nu+1/2} = SN_g^{\nu+1/2} - SN_g^\nu. \end{aligned}$$

Таким образом, в процессе расчета кинетических групп для системы поправочных уравнений, которую можно записать в виде

$$\left(q_g^{\nu+1/2} + d_g^{\nu+1/2}\right) \Delta SN_g^{\nu+1} = \sum_{g'=1}^G \beta_{g'g} \Delta SN_{g'}^{\nu+1} + \sum_{g'=1}^G \beta_{g'g} \Delta SN_{g'}^{\nu+1/2}, \quad (8)$$

получаем величины  $d_g^{\nu+1/2}$ ,  $\Delta SN_g^{\nu+1/2}$ . В одnogрупповом случае из системы (8) получаем явную формулу для вычисления поправок  $\Delta SN_g^{\nu+1}$ :

$$\Delta SN^{\nu+1} = \frac{\beta}{q^{\nu+1/2} + d^{\nu+1/2} - \beta} \Delta SN^{\nu+1/2}. \quad (9)$$

Систему (8) решаем прямым методом обращения многогрупповой матрицы или методом Зейделя (с итерационным индексом  $k$ ):

$$\left(q_g^{\nu+1/2} + d_g^{\nu+1/2} - \beta_{gg}\right) \Delta SN_g^{k+1} = \sum_{g'=1}^{g-1} \beta_{g'g} \Delta SN_{g'}^{k+1} + \sum_{g'=g+1}^G \beta_{g'g} \Delta SN_{g'}^k + \sum_{g'=1}^G \beta_{g'g} \Delta SN_{g'}^{\nu+1/2}. \quad (10)$$

Основным недостатком этого варианта ВДЭ-метода ускорения итераций является появление отрицательных значений  $d_g^{\nu+1/2}$  из-за возможных осцилляций решения кинетического уравнения и плохая сходимость итераций в стационарных задачах при  $q_g^{\nu+1/2} = \alpha_g^{\nu+1/2} \approx \sum_{g'=1}^G \beta_{g'g}$ . Так, например, в стационарных одnogрупповых задачах при  $\alpha = \beta$  сходимость определяется коэффициентом  $\beta/d$  (см. уравнение (9)), который неограниченно возрастает с ростом  $\beta$  или при  $d \rightarrow 0$ . В этом случае систему (8) можно решать методом Якоби:

$$\left(q_g^{\nu+1/2} + d_g^{\nu+1/2}\right) \Delta SN_g^{\nu+1} = \sum_{g'=1}^G \beta_{g'g} \Delta SN_{g'}^{\nu+1/2} \quad (11)$$

или методом типа Зейделя:

$$\left(q_g^{\nu+1/2} + d_g^{\nu+1/2}\right) \Delta SN_g^{k+1} = \sum_{g'=1}^{g-1} \beta_{g'g} \Delta SN_{g'}^{k+1} + \sum_{g'=g}^G \beta_{g'g} \Delta SN_{g'}^k + \sum_{g'=1}^G \beta_{g'g} \Delta SN_{g'}^{\nu+1/2}. \quad (12)$$

В отличие от формул (10) в выражении (12)  $\Delta SN_g$  для искомой группы в правой части берутся с предыдущей итерации  $k$ , т. е. коэффициент перехода с итерации на итерацию имеет вид

$$\frac{\beta_{g'g}}{q_g^{\nu+1/2} + d_g^{\nu+1/2}} \leq 1.$$

**ВДЭ-метод ускорения итераций без использования коэффициента квазидиффузионного типа.** Подставляя выражение (2) в уравнение (3), получаем уравнение относительно функции  $\Psi$ :

$$q_g \Psi_g^{\nu+1/2} + (1 + q_g \delta_g \Delta x) \operatorname{div}_h \left( \vec{\Omega} \Psi_g^{\nu+1/2} \right) = Q_g^\nu + \frac{p^n}{v_g \Delta t} \left( \frac{N_g}{\rho} \right)^n \rho + q_g \sum_{g'=1}^G \theta_{g'g} \Delta x \operatorname{div}_h \left( \vec{\Omega} S \Psi_{g'}^{\nu+1/2} \right).$$

Подставляя в это уравнение выражение (4), получаем

$$\begin{aligned} \left[ q_g + (1 + q_g \delta_g \Delta x) \frac{a}{\Delta V} \right] \Psi_g^{\nu+1/2} = & Q_g^\nu + \frac{p^n}{v_g \Delta t} \left( \frac{N_g}{\rho} \right)^n \rho + \\ & + q_g \sum_{g'=1}^G \theta_{g'g} \Delta x \operatorname{div}_h \left( \vec{\Omega} S \Psi_{g'}^{\nu+1/2} \right) + \frac{1 + q_g \delta_g \Delta x}{\Delta V} \sum_{(\vec{\Omega}, \vec{n})_i < 0} b_i \Psi_i^{\nu+1/2}. \end{aligned}$$

Выражая из этого уравнения  $\Psi_g^{\nu+1/2}$  и подставляя его в выражение (4), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_h \left( \vec{\Omega} \Psi \right)^{\nu+1/2} &= \left[ q_g + (1 + q_g \delta_g \Delta x) \frac{a}{\Delta V} \right]^{-1} \left[ \frac{a}{\Delta V} \left( Q_g^\nu + \frac{p^n}{v_g \Delta t} \left( \frac{N_g}{\rho} \right)^n \rho + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + q_g \sum_{g'=1}^G \theta_{g'g} \Delta x \operatorname{div}_h \left( \vec{\Omega} S \Psi_{g'}^{\nu+1/2} \right) \right) + \frac{q_g}{\Delta V} \sum_{(\vec{\Omega}, \vec{n})_l < 0} b_l \Psi_l^{\nu+1/2} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя новое выражение  $\operatorname{div}_h \left( \vec{\Omega} \Psi \right)^{\nu+1/2}$  в уравнение (3), получаем

$$\begin{aligned} N_g^{\nu+1/2} + \left[ q_g + (1 + q_g \delta_g \Delta x) \frac{a}{\Delta V} \right]^{-1} \left( \frac{a}{\Delta V} \sum_{g'=1}^G \theta_{g'g} \Delta x \operatorname{div}_h \left( \vec{\Omega} S \Psi_{g'}^{\nu+1/2} \right) + \frac{1}{\Delta V} \sum_{(\vec{\Omega}, \vec{n})_l < 0} b_l \Psi_l^{\nu+1/2} \right) &= \\ = \left[ q_g + (1 + q_g \delta_g \Delta x) \frac{a}{\Delta V} \right]^{-1} \left( 1 + \delta_g \Delta x \frac{a}{\Delta V} \right) \left( Q_g^\nu + \frac{p^n}{v_g \Delta t} \left( \frac{N_g}{\rho} \right)^n \rho \right). \end{aligned}$$

По аналогии с системой уравнений для первого этапа выпишем для второго (ускоряющего) этапа систему уравнений относительно  $N_g^{\nu+1}$ :

$$\begin{aligned} N_g^{\nu+1} + \left[ q_g + (1 + q_g \delta_g \Delta x) \frac{a}{\Delta V} \right]^{-1} \left( \frac{a}{\Delta V} \sum_{g'=1}^G \theta_{g'g} \Delta x \operatorname{div}_h \left( \vec{\Omega} S \Psi_{g'}^{\nu+1/2} \right) + \frac{1}{\Delta V} \sum_{(\vec{\Omega}, \vec{n})_l < 0} b_l \Psi_l^{\nu+1/2} \right) &= \\ = \left[ q_g + (1 + q_g \delta_g \Delta x) \frac{a}{\Delta V} \right]^{-1} \left( 1 + \delta_g \Delta x \frac{a}{\Delta V} \right) \left( Q_g^{\nu+1} + \frac{p^n}{v_g \Delta t} \left( \frac{N_g}{\rho} \right)^n \rho \right). \end{aligned}$$

Переходя к поправочной системе, получаем

$$\Delta N_g^{\nu+1} = \left[ q_g + (1 + q_g \delta_g \Delta x) \frac{a}{\Delta V} \right]^{-1} \left( 1 + \delta_g \Delta x \frac{a}{\Delta V} \right) (Q_g^{\nu+1} - Q_g^\nu).$$

При суммировании поправочной системы по всем направлениям получаем систему уравнений без коэффициента квазидиффузионного типа, которую можно записать в виде

$$\Delta S N_g^{\nu+1} = e_g^{\nu+1/2} \left( \sum_{g'=1}^G \beta_{g'g} \Delta S N_{g'}^{\nu+1} + \sum_{g'=1}^G \beta_{g'g} \Delta S N_{g'}^{\nu+1/2} \right), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} e_g &= \frac{1}{2q_g} \sum_{m=1}^M \frac{(1 + 2\delta_g)_{m-1/2}}{\left( 1 + 2\delta_g + \frac{2}{q_g \Delta x} \right)_{m-1/2}} \Delta \mu_{m-1}; \quad (14) \\ \Delta S N_g^{\nu+1} &= S N_g^{\nu+1} - S N_g^{\nu+1/2}, \quad \Delta S N_g^{\nu+1/2} = S N_g^{\nu+1/2} - S N_g^\nu. \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициент  $e_g$  (14) не зависит от решения на итерациях, а определяется только параметрами разностной сетки  $\tau$ ,  $\Delta x$ , параметром среды  $\alpha$  и параметром схемы  $\delta$ . От параметра схемы  $\theta$  скорость ВДЭ-метода не зависит.

Систему (13) решаем прямым методом обращения многогрупповой матрицы или методом Зейделя:

$$\Delta S N_g^{k+1} = \frac{e_g^{\nu+1/2}}{1 - e_g^{\nu+1/2} \beta_{gg}^0} \left( \sum_{g'=1}^{g-1} \beta_{g'g} \Delta S N_{g'}^{k+1} + \sum_{g'=g+1}^G \beta_{g'g} \Delta S N_{g'}^k + \sum_{g'=1}^G \beta_{g'g} \Delta S N_{g'}^{\nu+1/2} \right).$$

В одnogрупповом случае получаем явную формулу для вычисления поправок  $\Delta SN_g^{\nu+1}$ :

$$\Delta SN^{\nu+1} = \frac{e^{\nu+1/2}\beta}{1 - e^{\nu+1/2}\beta} \Delta SN^{\nu+1/2}. \quad (15)$$

Нетрудно показать, что при  $\beta \leq q$  выполняется неравенство  $0 \leq e^{\nu+1/2}\beta < 1$  и в формуле (15) знаменатель всегда больше нуля.

## 2. Оценка скорости сходимости ВДЭ-метода ускорения итераций в одnogрупповом случае для одномерной плоской геометрии

Для одnogруппового случая плоской стационарной задачи

$$\mu \frac{\partial N}{\partial r} + \alpha N = \frac{\beta}{2} SN + \frac{f}{2} \quad (16)$$

разностные уравнения (3) имеют вид

$$\begin{aligned} \mu \frac{\Psi_{i+1} - \Psi_i}{\Delta r_i} + \alpha_{i+1/2} N_{i+1/2} &= Q_{i+1/2}, \\ N_{i+1/2} &= \frac{\Psi_{i+1} + \Psi_i}{2} + \delta \Delta x \mu \frac{\Psi_{i+1} - \Psi_i}{\Delta r_i} - \theta \Delta x \mu \frac{(S\Psi)_{i+1} - (S\Psi)_i}{\Delta r_i}, \end{aligned} \quad (17)$$

где в данном частном случае

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{\Delta r}{|\mu_m|}; \quad \Psi_{i+1/2} = \frac{\Psi_{i+1} + \Psi_i}{2}; \quad Q_{i+1/2} = \frac{\beta_{i+1/2}}{2} (SN)_{i+1/2} + \frac{f_{i+1/2}}{2}; \\ \operatorname{div}_h(\vec{\Omega}\Psi) &= \mu \frac{\Psi_{i+1} - \Psi_i}{\Delta r_i} = 2 \frac{\Psi_{i+1/2} - \Psi_s}{\Delta x_i} = 2|\mu| \frac{\Psi_{i+1/2} - \Psi_s}{\Delta r_i}, \quad \Psi_s = \begin{cases} \Psi_i & \text{при } \mu > 0; \\ \Psi_{i+1} & \text{при } \mu < 0; \end{cases} \\ N_{i+1/2} &= 0,5(\Psi_{i+1} + \Psi_i) + \frac{\mu}{|\mu|} \delta \Delta \Psi_i - \frac{\mu}{|\mu|} \theta \Delta (S\Psi)_i. \end{aligned}$$

В зависимости от значений параметров  $\delta$ ,  $\theta$  получаем разные схемы решения уравнения переноса (16):

- 1)  $\delta = 0,5$ ;  $\theta = 0$  — DSt-схема (аналог шаговой схемы, имеющей 1-й порядок точности);
- 2)  $\delta = 0$ ;  $\theta = 0$  — DD-схема (алмазная схема, имеющая 2-й порядок точности);
- 3)  $\delta = \frac{\alpha \Delta r}{8|\mu|}$ ;  $\theta = \frac{\beta \Delta r}{16|\mu|}$  — DDAD-схема (диссипативная схема, имеющая 2-й порядок точности);
- 4)  $\delta = \frac{\alpha \Delta x}{12} = \frac{\alpha \Delta r}{12|\mu|}$ ;  $\theta = \frac{\beta \Delta x}{24} = \frac{\beta \Delta r}{24|\mu|}$  — LM-схема (имеющая 4-й порядок точности).

Подставляя  $N_{i+1/2}$  из второго уравнения системы (17) в первое, получаем

$$\Psi_{i+1/2} = \frac{2 \left( \delta + \frac{|\mu|}{\alpha \Delta r} \right)}{1 + 2 \left( \delta + \frac{|\mu|}{\alpha \Delta r} \right)} \Psi_s + \frac{\frac{1}{\alpha}}{1 + 2 \left( \delta + \frac{|\mu|}{\alpha \Delta r} \right)} Q_{i+1/2} + \frac{\frac{\theta \mu}{|\mu|}}{1 + 2 \left( \delta + \frac{|\mu|}{\alpha \Delta r} \right)} \Delta (S\Psi)_i. \quad (18)$$

Подставляя  $\Psi_{i+1/2}$  из уравнения (18) в  $\operatorname{div}_h(\vec{\Omega}\Psi) = 2|\mu| \frac{\Psi_{i+1/2} - \Psi_s}{\Delta r_i}$ , а полученное выражение — в первое уравнение системы (17)  $N_{i+1/2} = \frac{1}{\alpha_{i+1/2}} \left( Q_{i+1/2} - \operatorname{div}_h(\vec{\Omega}\Psi) \right)$ , получаем

$$N_{i+1/2} = \frac{\frac{1 + 2\delta}{\alpha}}{1 + 2 \left( \delta + \frac{|\mu|}{\alpha \Delta r} \right)} Q_{i+1/2} + \frac{\frac{2|\mu|}{\alpha \Delta r}}{1 + 2 \left( \delta + \frac{|\mu|}{\alpha \Delta r} \right)} \Psi_s - \frac{\frac{2\theta\mu}{\alpha \Delta r}}{1 + 2 \left( \delta + \frac{|\mu|}{\alpha \Delta r} \right)} \Delta (S\Psi)_i. \quad (19)$$

Суммируя  $N_{i+1/2}$  из уравнения (19) по  $\mu$  и составляя поправочное уравнение, получаем явную формулу, аналогичную (13), для вычисления поправок  $\Delta SN^{\nu+1}$ :

$$\Delta SN^{\nu+1} = \omega_2 \Delta SN^{\nu+1/2}, \quad (20)$$

где  $\omega_2 = \frac{\beta_c}{1 - \beta_c}$ ,  $\beta_c = \frac{\beta_g}{2\alpha_g} \sum_{m=1}^M \frac{1 + 2\delta_{g_{m-1/2}}}{1 + 2\delta_{g_{m-1/2}} + \frac{2|\mu_{m-1/2}|}{\alpha_g \Delta r}} \Delta \mu_{m-1}$ .

В нестационарном случае  $\beta_c = \frac{\beta_g}{2q_g} \sum_{m=1}^M \frac{1 + 2\delta_{g_{m-1/2}}}{1 + 2\delta_{g_{m-1/2}} + \frac{2|\mu_{m-1/2}|}{q_g \Delta r}} \Delta \mu_{m-1}$ .

На равномерной сетке с постоянными параметрами  $\alpha$ ,  $\beta$  коэффициент перехода  $\omega$  будет постоянным. Тогда на первом этапе для всех ячеек разностной сетки имеем

$$SN^{\nu+1/2} - SN^{\nu-1/2} = \omega_1 (SN^\nu - SN^{\nu-1}). \quad (21)$$

На втором этапе получаем

$$SN^{\nu+1} - SN^{\nu+1/2} = \omega_2 (SN^{\nu+1/2} - SN^\nu).$$

Для оценки скорости сходимости ВДЭ-метода требуется определить коэффициент перехода  $\omega$  из условия

$$SN^{\nu+1} - SN^\nu = \omega (SN^\nu - SN^{\nu-1}). \quad (22)$$

Если предположить выполнение соотношения

$$SN^{\nu+1/2} - SN^\nu = \omega_3 (SN^\nu - SN^{\nu-1}),$$

где  $\omega_3$  — некоторая константа, то получаем

$$SN^{\nu+1} - SN^{\nu+1/2} = \omega_2 \omega_3 (SN^\nu - SN^{\nu-1}); \quad (23)$$

$$SN^{\nu+1} - SN^\nu = (SN^{\nu+1} - SN^{\nu+1/2}) + (SN^{\nu+1/2} - SN^\nu) = (\omega_2 \omega_3 + \omega_3) (SN^\nu - SN^{\nu-1}).$$

Отсюда следует, что

$$\omega = \omega_3 (\omega_2 + 1). \quad (24)$$

На предыдущей итерации выполняются соотношения, аналогичные соотношениям (22),

$$SN^\nu - SN^{\nu-1} = \omega (SN^{\nu-1} - SN^{\nu-2}), \text{ или } SN^{\nu-1} - SN^{\nu-2} = \frac{1}{\omega} (SN^\nu - SN^{\nu-1}),$$

и соотношения, аналогичные соотношениям (23),

$$SN^\nu - SN^{\nu-1/2} = \omega_2 \omega_3 (SN^{\nu-1} - SN^{\nu-2}) = \frac{\omega_2 \omega_3}{\omega} (SN^\nu - SN^{\nu-1}).$$

Из этих уравнений получаем

$$SN^{\nu+1/2} - SN^{\nu-1/2} = (SN^{\nu+1/2} - SN^\nu) + (SN^\nu - SN^{\nu-1/2}) = \left(1 + \frac{\omega_2}{\omega}\right) \omega_3 (SN^\nu - SN^{\nu-1}).$$

Сравнивая полученное выражение с уравнением (21), получаем что  $\omega_1 = \left(1 + \frac{\omega_2}{\omega}\right) \omega_3$ , откуда следует  $\omega_3 = \frac{\omega \omega_1}{\omega + \omega_2}$ . Учитывая соотношение (24), получаем формулу для коэффициента перехода  $\omega$  через коэффициенты перехода  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  для первого и второго этапов:

$$\omega = \omega_1 (1 + \omega_2) - \omega_2. \quad (25)$$

Несложно убедиться, что при любом параметре  $\omega_2 \geq 0$  и  $\omega_1 \leq 1$  получаем  $\omega \leq \omega_1$ , т. е. ВДЭ-метод всегда сходится быстрее простой итерации (даже при  $\omega_2 \geq 1$ ).

Спектральным анализом Фурье в работе [6] получено выражение для коэффициента перехода  $\omega_1$  на простой итерации:

$$\omega_1 = \frac{\beta}{2\alpha} \sum_{m=1}^M \frac{1}{1 + 2\eta_{m-1/2} \sin \xi} \Delta\mu_{m-1} \leq \frac{\beta}{\alpha},$$

где  $\eta_{m-1/2} = \frac{\mu_{m-1/2}}{\alpha h}$ ;  $\xi = \frac{\lambda h}{2}$ ,  $h = \Delta r$ ,  $-\infty < \lambda < \infty$ .

Используя коэффициент перехода  $\omega_2$  из формулы (20), получаем по формуле (25)  $\omega = \frac{\omega_1 - \beta_c}{1 - \beta_c}$ .

В случае оптически плотной среды при  $\alpha h \rightarrow \infty$  следует, что  $\omega_1 \rightarrow \frac{\beta}{\alpha}$ ,  $\beta_c \rightarrow \frac{\beta}{\alpha}$ ,  $\omega \rightarrow 0$ . В случае оптически прозрачной среды при  $\alpha h \rightarrow 0$  следует, что  $\omega_1 \rightarrow 0$ ,  $\beta_c \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow 0$ . То есть в предельных случаях скорость сходимости ВДЭ-метода максимальна.

Спектральным анализом Фурье можно получить выражение для коэффициента перехода  $\omega$  в методе RDSA, рассмотренном в работе [4]:

$$\begin{aligned} \omega &= A\omega_1; & A &= \frac{3\beta h^2 + 8a\theta h (\sin \xi)^2}{3q^0 q^1 h^2 + 4am (\sin \xi)^2}; & q^0 &= \frac{p}{v\tau} + \alpha - \beta; & q^1 &= \frac{p}{v\tau} + \alpha; \\ a &= 1 + q^0 \delta^0 h; & m &= 1 + q^1 h (\delta^0 - 2\theta^0); & \xi &= \frac{\lambda h}{2}; & h &= \Delta r; & -\infty < \lambda < \infty. \end{aligned}$$

В стационарном случае ( $p = 0$ ) оптически плотной среды при  $\alpha h \rightarrow \infty$  следует, что  $A \rightarrow 0$ ,  $\omega_1 \rightarrow \beta/\alpha$ ,  $\omega \rightarrow 0$ . В случае оптически прозрачной среды при  $p = 0$ ,  $\alpha h \rightarrow 0$  следует, что  $A \rightarrow \frac{3\beta h^2 + 8(1 - \beta h \delta) \theta h (\sin \xi)^2}{4(1 - \beta h \delta) (\sin \xi)^2}$ ,  $\omega_1 \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow 0$ .

### 3. Численные расчеты

Для исследования ВДЭ-метода были проведены методические расчеты.

**Задача 1 (Ларсена).** Первая модельная задача взята из работы [6].

Плоская система состоит из одной области  $0 \leq r \leq 8$  с нулевым источником и коэффициентами  $\alpha$  и  $\beta = 0,98\alpha$ . В задаче варьируется оптическая толщина системы. Геометрия задачи показана на рис. 1.

Правое граничное условие — вакуум; слева — входящий поток  $N(0, \mu) = N(0, -\mu) + 1$  для  $\mu \geq 0$ .

Задача рассчитывалась на сетке с  $\Delta r = 1$  ( $I = 8$ );  $\Delta \mu = 0,5$  ( $M = 4$ ). Константы сходимости итераций:  $\varepsilon_1 = 10^{-4}$ ;  $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ . Число групп  $G = 1$ , задача стационарная.

Результаты расчетов (число итераций) приведены в табл. 1—4. При этом все расчеты проводились по одномерной программе с выбором параметров  $\delta_g$ ,  $\theta_{g'g}$  из разд. 2.

Из табл. 1—3 видно, что ВДЭ-метод с применением коэффициента квазидиффузионного типа ускоряет простую итерацию примерно в 2 раза, однако в оптически плотных средах (табл. 2, 3) для

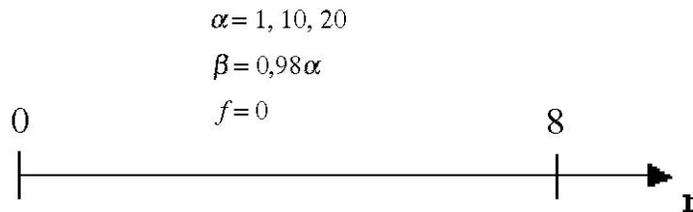


Рис. 1. Геометрия задачи 1

Таблица 1

Число итераций в расчете задачи 1 при  $\alpha = 1$

Итерационный метод	Разностная схема					
	DD	DSt	DD+DSt	LM	DDAD	DDAD ( $\theta = 0$ )
Простая итерация	187	157	187	188	188	169
ВДЭ с коэффициентом $d$	107	91	107	107	108	97
ВДЭ без коэффициента $d$	147	60	108	87	82	73

Таблица 2

Число итераций в расчете задачи 1 при  $\alpha = 10$

Итерационный метод	Разностная схема					
	DD	DSt	DD+DSt	LM	DDAD	DDAD ( $\theta = 0$ )
Простая итерация	242	212	215	242	233	185
ВДЭ с коэффициентом $d$	Расх.*	41	46	97	109	55
ВДЭ без коэффициента $d$	Расх.	20	33	86	101	10

\* Метод расходится.

Таблица 3

Число итераций в расчете задачи 1 при  $\alpha = 20$

Итерационный метод	Разностная схема					
	DD	DSt	DD+DSt	LM	DDAD	DDAD ( $\theta = 0$ )
Простая итерация	222	200	202	234	236	168
ВДЭ с коэффициентом $d$	Расх.	29	33	135	139	58
ВДЭ без коэффициента $d$	Расх.	13	20	126	129	5

Таблица 4

Число итераций в расчете задачи 1 при  $\alpha = 10$  с применением методов ускорения

Итерационный метод	Разностная схема				
	DD	DSt	DD+DSt	DDAD	LM
ВДЭ с коэф. $d$ ; $\omega = \frac{\beta}{q - \beta + d}$ , $-1 \leq \omega \leq 1$	138	122	123	141	135
ВДЭ с коэф. $d$ по Якоби; $\omega = \frac{\beta}{q + d}$	Расх.	129	134	151	145
ВДЭ с коэф. $d$ по Зейделю; $\omega = \frac{\beta}{q + d}$	96	92	134	119	109

DD-схемы расходится из-за возникающих осцилляций. Этого можно избежать, если ввести ограничение на коэффициент перехода с итерации на итерацию (первая строка табл. 4):

$$\omega = \begin{cases} -1 & \text{при } \frac{\beta}{q - \beta + d} < -1; \\ 1 & \text{при } \frac{\beta}{q - \beta + d} > 1; \\ \frac{\beta}{q - \beta + d} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

К сожалению, это ограничение увеличивает число итераций в остальных схемах почти в 2 раза. Для других схем ВДЭ-метод сходится.

В табл. 4 приведены различные варианты при реализации ускорения по ВДЭ-методу. Во второй и третьей строках табл. 4 приведено число итераций при счете по ВДЭ-методу с применением формул (11), (12). Эти варианты дают примерно такие же результаты, что и ВДЭ-метод с ограничением на коэффициент перехода  $\omega$ . Поэтому их применение нецелесообразно. Вариант с методом типа Зейделя для поправок дает чуть лучшие показатели за счет введения внутренних итераций. Внутренние итерации доводились до сходимости с константой сходимости 0,01, и их число обычно не превышало 3.

Из табл. 1—3 видно, что ВДЭ-метод дает наилучшие результаты для DSt и DDAD-схем с  $\theta = 0$ , ускоряя простую итерацию примерно от 3 до 33 раз, однако при  $\theta = 0$  точность расчетов снижается до первого порядка.

На основе разных вариантов одногрупповой задачи Ларсена была создана многогрупповая задача. В многогрупповом случае задача была сформулирована с учетом различных оптических толщин для четырех групп:  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 10, \alpha_3 = 20, \alpha_4 = 30$ ;  $\beta_{g'g} = \begin{cases} 0,98\alpha_g & \text{при } g = g'; \\ 0 & \text{при } g \neq g'. \end{cases}$  Результаты

расчетов этой задачи приведены в табл. 5.

Из табл. 5 видно, что результаты расчетов многогрупповой задачи качественно повторяют результаты расчетов одногрупповых задач.

Таблица 5

Число итераций в расчете многогрупповой задачи 1

Итерационный метод	Разностная схема					
	DD	DSt	DD+DSt	LM	DDAD	DDAD ( $\theta = 0$ )
Метод Зейделя по группам	242	212	215	242	236	185
ВДЭ с коэффициентом $d$	Расх.	91	107	139	139	97
ВДЭ без коэффициента $d$	Расх.	60	108	128	129	73

**Задача 2 (Кобаяши).** Для второй модельной задачи расчеты проводились только в многогрупповой постановке. Многогрупповые константы взяты из работы [7].

Сферически-симметричная система,  $0 \leq r \leq 105$ , состоит из трех областей (рис. 2) с единичным источником во 2-й и 3-й группах первой области. Число групп  $G = 4$ , задача стационарная.

Начальное условие:  $N_g = 0$  при  $t = 0, g = 1, \dots, 4$ .

Граничное условие:  $N_g = 0$  при  $\mu < 0, g = 1, \dots, 4$ .

Константы  $\alpha$  задаются табл. 6.

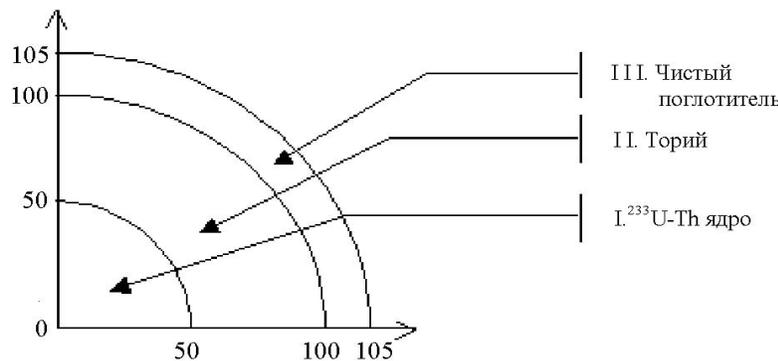


Рис. 2. Геометрия задачи 2

Значения  $\alpha$  для задачи 2

$g$	Область I	Область II	Область III
1	0,09947	0,12494	1
2	0,13572	0,16404	1
3	0,17825	0,23776	1
4	0,26476	0,34153	1

В области 1

$$\{ \beta_{g'g} \} = \begin{pmatrix} 0,06293 & 0,02963 & 0,0029 & 0 \\ 0 & 0,12415 & 0,0067 & 0,0003 \\ 0 & 0 & 0,16905 & 0,0032 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25455 \end{pmatrix} + 10^{-3} \cdot \begin{pmatrix} 9,94141 & 9,94141 & 9,94141 & 9,94141 \\ 8,41624 & 8,41624 & 8,41624 & 8,41624 \\ 9,60889 & 9,60889 & 9,60889 & 9,60889 \\ 1,46382 & 1,46382 & 1,46382 & 1,46382 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0,577 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,362 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,061 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,06866619357 & 0,03322879042 & 0,00350642601 & 0 \\ 0,00485617048 & 0,12719667888 & 0,00721339064 & 0,0003 \\ 0,00554432953 & 0,00347841818 & 0,16963614229 & 0,0032 \\ 0,00084462414 & 0,00052990284 & 0,00008929302 & 0,25455 \end{pmatrix}.$$

В области 2

$$\{ \beta_{g'g} \} = \begin{pmatrix} 0,06963 & 0,04736 & 0,00512 & 0 \\ 0 & 0,15353 & 0,0079 & 0,00004 \\ 0 & 0 & 0,22893 & 0,00399 \\ 0 & 0 & 0 & 0,33242 \end{pmatrix} + 10^{-3} \cdot \begin{pmatrix} 4,83123 & 4,83123 & 4,83123 & 4,83123 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0,577 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,362 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,061 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,07241761971 & 0,04910890526 & 0,00541470503 & 0 \\ 0 & 0,15353 & 0,0079 & 0,00004 \\ 0 & 0 & 0,22893 & 0,00399 \\ 0 & 0 & 0 & 0,33242 \end{pmatrix}.$$

В области 3  $\{ \beta_{g'g} \} = 0$ .

Задача рассчитывалась на сетке с  $\Delta r = 1$  ( $I = 105$ );  $\Delta \mu = 0,25$  ( $M = 8$ ). Константы сходимости итераций:  $\varepsilon_1 = 10^{-4}$ ;  $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ . Результаты расчетов приведены в табл. 7.

Из табл. 7 видно, что применение при расчете задачи 2 ВДЭ-метода без коэффициента  $d$  дает наименьшее число итераций.

Решение задачи в виде профиля  $SN_g$  для всех групп приведено на рис. 3.

Число итераций в расчете задачи 2

Итерационный метод	Разностная схема					
	DD	DSt	DD+DSt	LM	DDAD	DDAD ( $\theta = 0$ )
Простая итерация	481	431	481	482	482	478
Метод Зейделя по группам	464	416	464	465	465	464
ВДЭ с коэффициентом $d$	412	369	412	413	413	409
ВДЭ без коэффициента $d$	403	321	403	400	398	403
ВДЭ без коэффициента $d$ с простой итерацией по группам на обоих этапах	419	331	419	416	461	410

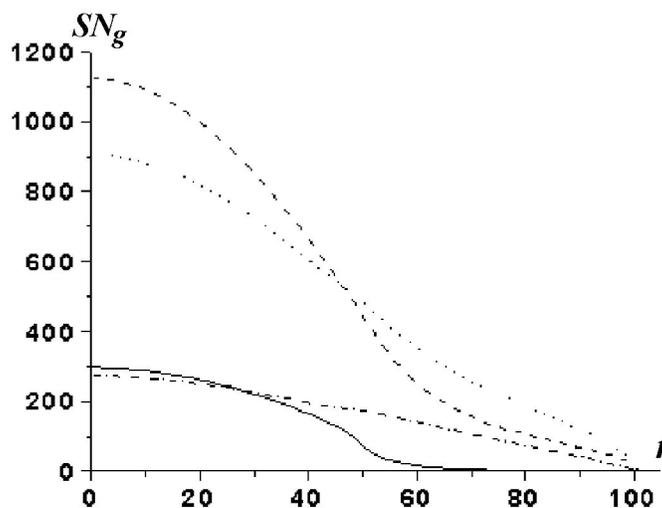


Рис. 3. Профиль  $SN_g$ : — —  $g = 1$ ; - - -  $g = 2$ ; ····  $g = 3$ ; - · - ·  $g = 4$

Заключение

В результате проведенных исследований можно сказать, что ВДЭ-метод, реализованный для уравнения переноса нейтронов, дает менее значительное ускорение итераций, чем для задач переноса излучения. Он уступает RDSA-методу по скорости сходимости итераций, но является более простым в реализации и легко распараллеливается.

Список литературы

1. Schmidt E. Auflosung der allgemeinen linear Integralgleichungen // Math. Ann. 1907. Bd. 64. S. 161.
2. Гусев В. Ю., Козманов М. Ю., Рачилов Е. Б. Метод решения неявных разностных уравнений, аппроксимирующих системы уравнений переноса и диффузии излучения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1984. Т. 24, № 12. С. 1842—1849.
3. Гаджиев А. Д., Селезнев В. Н., Шестаков А. А.  $DS_n$ -метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 4. С. 33—46.
4. Гаджиев А. Д., Кондаков И. А., Шестаков А. А. RDSA-метод для численного решения уравнения переноса нейтронов // Там же. 2007. Вып. 2. С. 3—19.

5. *Гаджиев А. Д., Шестаков А. А.* Метод выделения диагональной матрицы для численного решения уравнения переноса излучения в  $P_1$ -приближении по схеме РОМБ // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2006. Вып. 1. С. 3—13.
6. *Larsen E. W.* Unconditionally stable diffusion-synthetic acceleration methods for the slab geometry discrete ordinates equation // Nucl. Sci. and Eng. 1982. Vol. 82. P. 47—70.
7. *Kobajashi K., Misawa T.* Spherical harmonics method for a two-dimensional multigroup transport equation using a semi-discrete ordinates equation: part II // Ibid. 1986. Vol. 92. P. 407—420.

Статья поступила в редакцию 19.03.08.

---