

УДК 519.6+537.5

РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПОЛОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

А. И. Голубев, И. В. Долженков, А. В. Солдатов
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Представлено описание метода расчета электродинамики параболической полости, основанного на численном решении трехмерных однородных уравнений Максвелла, записанных в параболических координатах.

Применимость и точность метода проиллюстрированы на расчетах представительной тестовой задачи, имеющей аналитическое решение.

Введение

В работе [1] приведены основные этапы расчета процессов генерации и распространения электромагнитного излучения, инициируемого пикосекундным лазером. Одним из таких этапов является определение пространственно-временного поведения электромагнитного поля в параболической полости.

В данной работе представлено описание метода расчета электродинамики параболической полости, основанного на численном решении трехмерных однородных уравнений Максвелла. Уравнения Максвелла записаны в параболических координатах [1]. Источники электромагнитного поля задаются в виде эффективных граничных условий на внутренней поверхности параболоида [2]. На оси симметрии параболоида используются естественные граничные условия. А именно, компоненты электрического и магнитного полей должны оставаться ограниченными на этой оси; кроме того, на оси симметрии составляющие векторов электрического и магнитного полей, направленные вдоль нее, не должны зависеть от азимутального угла.

Аппроксимирующие формулы для пространственных производных выведены на основе интегральных следствий уравнений Максвелла, написанных для элементарной ячейки разностной сетки. Такой подход позволяет единообразным способом получать аппроксимирующие формулы во всех узлах сетки, в том числе узлах, расположенных вблизи оси симметрии или непосредственно на ней. При аппроксимации производных по времени использован метод покоординатного расщепления.

Применимость и точность метода проиллюстрированы на численных расчетах представительной тестовой задачи, имеющей аналитическое решение.

Математическая постановка задачи

Следуя работе [1], уравнения Максвелла для вычисления полей в параболическом излучателе (параболоиде) будем решать, используя параболическую систему координат (v, u, φ) (см., например, описание системы в справочнике [3], в котором приняты обозначения $\sigma \equiv v$, $\tau \equiv u$). В этой системе φ — угол вращения относительно оси симметрии параболоида (в дальнейшем оси z). Координатные поверхности $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$ представляют собой софокусные параболоиды вращения с фокусом в точке $(v = 0, u = 0)$. Поверхность $v = v_0$ совпадает с поверхностью параболоида. Отметим, что $v_0^2 = 2F$, где F — фокусное расстояние.

В принятой системе координат уравнения Максвелла для компонент напряженностей электрического (\vec{E}) и магнитного (\vec{H}) полей будут иметь вид (в системе единиц, где скорость света в вакууме $c = 1$)

$$\frac{\partial E_u}{\partial t} = \frac{1}{v\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{\partial}{\partial v} (vH_\varphi) - \frac{1}{uv} \frac{\partial H_v}{\partial \varphi}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_v}{\partial t} = \frac{1}{uv} \frac{\partial H_u}{\partial \varphi} - \frac{1}{u\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{\partial}{\partial u} (uH_\varphi); \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{u^2 + v^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (H_v \sqrt{u^2 + v^2}) - \frac{\partial}{\partial v} (H_u \sqrt{u^2 + v^2}) \right\}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial H_u}{\partial t} = -\frac{1}{v\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{\partial}{\partial v} (vE_\varphi) + \frac{1}{uv} \frac{\partial E_v}{\partial \varphi}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial H_v}{\partial t} = -\frac{1}{uv} \frac{\partial E_u}{\partial \varphi} + \frac{1}{u\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{\partial}{\partial u} (uE_\varphi); \quad (5)$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = -\frac{1}{u^2 + v^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (E_v \sqrt{u^2 + v^2}) - \frac{\partial}{\partial v} (E_u \sqrt{u^2 + v^2}) \right\}. \quad (6)$$

Область G изменения переменных v, u, φ определяется неравенствами

$$0 \leq v \leq v_0; \quad 0 \leq u \leq u_0; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (7)$$

При решении системы уравнений (1)–(6) ее необходимо дополнить начальными и граничными условиями. Применительно к рассматриваемой задаче они формулируются следующим образом. В начальный момент времени $t = 0$ все компоненты E_α, H_α ($\alpha = v, u, \varphi$) равны нулю. Граничные условия имеют следующий вид:

- на границе $v = v_0$ задаются компоненты $E_u(t, u, \varphi), E_\varphi(t, u, \varphi)$ [2];
- на границе $u = u_0$, как правило, ставятся условия излучения

$$E_v = H_\varphi; \quad E_\varphi = -H_v; \quad (8)$$

- на участках $v = 0, 0 \leq u \leq u_0$ и $u = 0, 0 \leq v \leq v_0$, принадлежащих оси симметрии параболоида, предполагается ограниченность всех компонент полей. Кроме того, на этой оси составляющие векторов электрического и магнитного полей, направленные вдоль нее, не должны зависеть от азимутального угла.

В дальнейшем, при построении разностной схемы, будут необходимы следующие дополнительные формулы для параболической системы координат [3]:

- компоненты метрического тензора $g_{\alpha\alpha}$ и коэффициенты Ламе h_α ($\alpha = v, u, \varphi$):

$$g_{vv} = g_{uu} = u^2 + v^2; \quad g_{\varphi\varphi} = u^2 v^2; \quad h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}; \quad h_\varphi = uv;$$

- выражения для элементов площадей $dS_{uv}, dS_{u\varphi}, dS_{v\varphi}$ на поверхностях $\varphi = \text{const}, v = \text{const}, u = \text{const}$ соответственно:

$$dS_{uv} = h_u h_v du dv; \quad dS_{u\varphi} = h_u h_\varphi du d\varphi; \quad dS_{v\varphi} = h_v h_\varphi dv d\varphi. \quad (9)$$

Описание разностной схемы

Введем в области G (7) сетку узлов $\Omega = \omega_v \times \omega_u \times \omega_\varphi$, где $\omega_v = (v_1 = 0, v_2, \dots, v_{N_v} = v_0)$, $\omega_u = (u_1 = 0, u_2, \dots, u_{N_u} = u_0)$, $\omega_\varphi = (\varphi_1 = 0, \dots, \varphi_{N_\varphi} = 2\pi)$. Узлы (v_i, u_j, φ_k) ($1 \leq i \leq N_v, 1 \leq j \leq N_u, 1 \leq k \leq N_\varphi$) являются вершинами некоторых шестигранников (ячеек сетки Ω). Отнесем, как

это принято при дискретизации уравнений Максвелла (см., например, [4]), к серединам ребер этих шестигранников значения компонент напряженности электрического поля, а к центрам граней — значения компонент напряженности магнитного поля. Расположение этих величин показано на рис. 1.

Таким образом, компонента E_v отнесена к узлам $(v_{i+1/2}, u_j, \varphi_k)$, компонента E_u — к узлам $(v_i, u_{j+1/2}, \varphi_k)$, компонента E_φ — к узлам $(v_i, u_j, \varphi_{k+1/2})$, H_v — к узлам $(v_i, u_{j+1/2}, \varphi_{k+1/2})$, H_u — к узлам $(v_{i+1/2}, u_j, \varphi_{k+1/2})$, H_φ — к узлам $(v_{i+1/2}, u_{j+1/2}, \varphi_k)$; здесь $v_{i+1/2} = \frac{1}{2}(v_i + v_{i+1})$, $u_{j+1/2}$ и $\varphi_{k+1/2}$ определяются аналогичным образом.

При получении пространственной дискретизации перейдем от дифференциальной формы записи уравнений (1)–(6) к интегральной, проинтегрировав каждое из них по площади грани соответствующего шестигранника.

В качестве шестигранника V_H при дискретизации уравнений (4)–(6) выбирается ячейка сетки Ω , показанная на рис. 1. Проинтегрировав уравнение (4) по площади грани $u = u_j$ (введя для нее обозначение $S_{v\varphi}^{(H)}$), можно получить

$$\iint_{S_{v\varphi}^{(H)}} \frac{dH_u}{dt} dS_{v\varphi} = \iint_{S_{v\varphi}^{(H)}} \left(-\frac{1}{vh_v} \frac{\partial}{\partial v} v E_\varphi + \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_v \right) dS_{v\varphi}. \quad (10)$$

Интеграл в левой части вычисляется по квадратурной формуле вида

$$\iint_{S_{v\varphi}^{(H)}} \frac{dH_u}{dt} dS_{v\varphi} \approx \frac{dH_{u_{i+1/2,j,k+1/2}}}{dt} S_{v\varphi}^{(H)}.$$

Интеграл в правой части можно вычислить, применив формулу Грина. Учитывая выражение для $dS_{v\varphi}$ (9) и используя для компонент полей при вычислении контурного интеграла квадратурные формулы средних, можно получить следующую аппроксимацию уравнения (10):

$$\frac{d}{dt} H_{u_{i+1/2,j,k+1/2}} = \frac{1}{S_{v\varphi}^{(H)}} \left[u_j (\varphi_{k+1} - \varphi_k) \left(v_i E_{\varphi_{i,j,k+1/2}} - v_{i+1} E_{\varphi_{i+1,j,k+1/2}} \right) + \right.$$

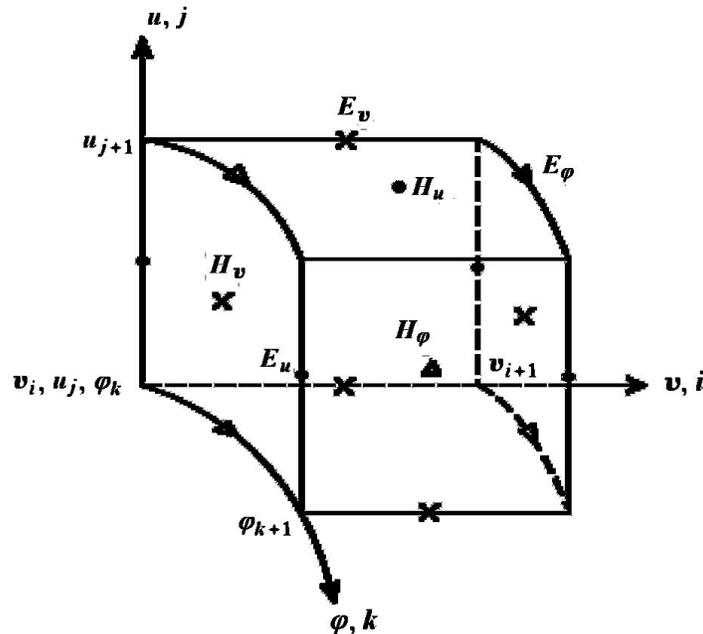


Рис. 1. Расположение сеточных величин на гранях и ребрах ячейки (i, j, k) сетки Ω ($u_j > 0$)

$$+ \int_{v_i}^{v_{i+1}} h_v dv \left(E_{v_{i+1/2,j,k+1}} - E_{v_{i+1/2,j,k}} \right). \quad (11)$$

В этой формуле

$$\int_{v_i}^{v_{i+1}} h_v dv = \int_{v_i}^{v_{i+1}} \sqrt{u_j^2 + v^2} dv; \quad S_{v\varphi}^{(H)} = \int_{v_i}^{v_{i+1}} dv \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} d\varphi h_v h_\varphi.$$

Формулу (11) можно записать в более компактном виде (с понятными обозначениями):

$$\frac{d}{dt} H_{u_{i+1/2,j,k+1/2}} = -a_{i+1/2,j} \frac{v_{i+1} E_{\varphi_{i+1,j,k+1/2}} - v_i E_{\varphi_{i,j,k+1/2}}}{v_{i+1} - v_i} + b_{i+1/2,j} \frac{E_{v_{i+1/2,j,k+1}} - E_{v_{i+1/2,j,k}}}{\varphi_{k+1} - \varphi_k}. \quad (12)$$

Уравнение (12) справедливо для всех ячеек сетки Ω , ребра которых не попадают на ось z . Эти случаи следует обсудить специально. Для ячеек при $u_j > 0$, $v_i = 0$ уравнение (12) останется справедливым, хотя одна из граней вырождается в отрезок $[u_j, u_{j+1}]$ на оси z ; при этом в (12) следует положить $v_i = 0$. Значение $v_i E_\varphi$ при этом также полагается равным нулю. Уравнение для H_u при $j = 1$ (т. е. при $u_j = 0$) не требуется.

Для дискретизации уравнения (5) его необходимо проинтегрировать по площади грани $v = v_i$ (введем для нее обозначение $S_{u\varphi}^{(H)}$). Проведя вычисления способом, аналогичным описанному выше, можно получить уравнение вида

$$\frac{d}{dt} H_{v_{i,j+1/2,k+1/2}} = -b_{i,j+1/2} \frac{E_{u_{i,j+1/2,k+1}} - E_{u_{i,j+1/2,k}}}{\varphi_{k+1} - \varphi_k} + a_{i,j+1/2} \frac{u_{j+1} E_{\varphi_{i,j+1,k+1/2}} - u_j E_{\varphi_{i,j,k+1/2}}}{u_{j+1} - u_j}. \quad (13)$$

Уравнение (13) справедливо и для случая $u_j = 0$, $v_i > 0$; при $i = 1$ (т. е. при $v_i = 0$) это уравнение не требуется.

Если уравнение (6) проинтегрировать по площади грани $\varphi = \varphi_k$ (далее для нее вводится обозначение $S_{uv}^{(H)}$), то можно получить

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_{\varphi_{i+1/2,j+1/2,k}} &= d_{i+1/2,j+1/2} \left(- \frac{f_{i+1/2,j+1} E_{v_{i+1/2,j+1,k}} - f_{i+1/2,j} E_{v_{i+1/2,j,k}}}{u_{j+1} - u_j} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{g_{i+1,j+1/2} E_{u_{i+1,j+1/2,k}} - g_{i,j+1/2} E_{u_{i,j+1/2,k}}}{v_{i+1} - v_i} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$f_{i+1/2,j} = \int_{v_i}^{v_{i+1}} \sqrt{v^2 + u_j^2} dv \frac{1}{v_{i+1} - v_i}; \quad g_{i,j+1/2} = \int_{u_j}^{u_{j+1}} \sqrt{u^2 + v_i^2} du \frac{1}{u_{j+1} - u_j};$$

$d_{i+1/2,j+1/2}$ определено соотношением

$$S_{uv}^{(H)} \equiv \frac{(u_{j+1} - u_j)(v_{i+1} - v_i)}{d_{i+1/2,j+1/2}}.$$

Необходимо отметить, что для вычисления H_φ вблизи оси z требуются значения E_u на этой оси (при $i = 1$) либо значения E_v (при $j = 1$).

При дискретизации уравнений (1)–(3) в качестве шестигранника V_E , используемого для интегрирования, выбирается ячейка, показанная на рис. 2.

Индексы вершин ячейки V_E получаются из индексов вершин ячейки V_H сдвигом на $1/2$ (см. рис. 1). Поэтому разностные формулы для уравнений (1)–(3) могут быть получены из формул (12)–(14) с учетом этого обстоятельства:

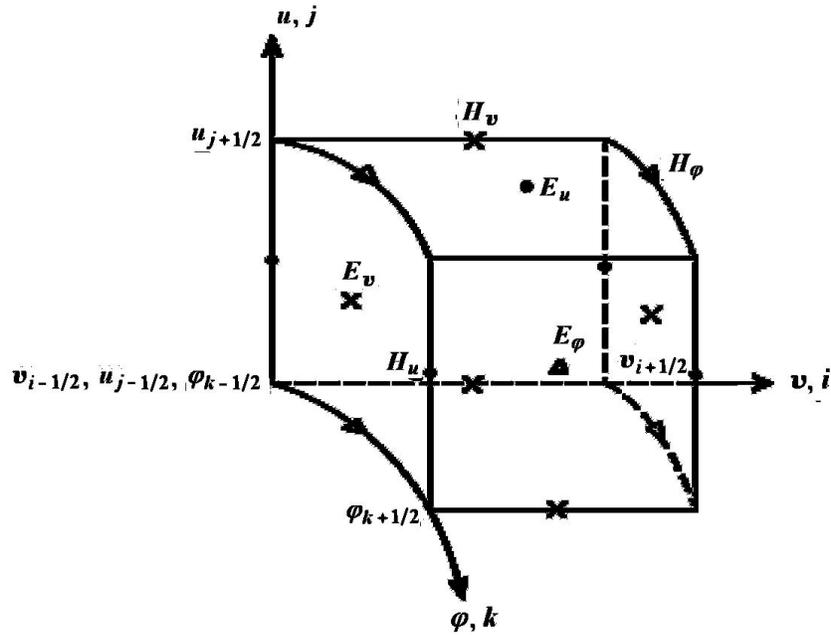


Рис. 2. Ячейка V_E для дискретизации уравнений (1)–(3)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{u_{i,j+1/2,k}} &= \tilde{a}_{i,j+1/2} \frac{v_{i+1/2} H_{\varphi_{i+1/2,j+1/2,k}} - v_{i-1/2} H_{\varphi_{i-1/2,j+1/2,k}}}{v_{i+1/2} - v_{i-1/2}} - \\ &- \tilde{b}_{i,j+1/2} \frac{H_{v_{i,j+1/2,k+1/2}} - H_{v_{i,j+1/2,k-1/2}}}{\varphi_{k+1/2} - \varphi_{k-1/2}}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{v_{i+1/2,j,k}} &= \tilde{b}_{i+1/2,j} \frac{H_{u_{i+1/2,j,k+1/2}} - H_{u_{i+1/2,j,k-1/2}}}{\varphi_{k+1/2} - \varphi_{k-1/2}} - \\ &- \tilde{a}_{i+1/2,j} \frac{u_{j+1/2} H_{\varphi_{i+1/2,j+1/2,k}} - u_{j-1/2} H_{\varphi_{i+1/2,j-1/2,k}}}{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{\varphi_{i,j,k+1/2}} &= \tilde{d}_{i,j} \left(\frac{\tilde{f}_{i,j+1/2} H_{v_{i,j+1/2,k+1/2}} - \tilde{f}_{i,j-1/2} H_{v_{i,j-1/2,k+1/2}}}{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}} - \right. \\ &\left. - \frac{\tilde{g}_{i+1/2,j} H_{u_{i+1/2,j,k+1/2}} - \tilde{g}_{i-1/2,j} H_{u_{i-1/2,j,k+1/2}}}{v_{i+1/2} - v_{i-1/2}} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Наиболее сложным при аппроксимации дополнительных условий является вопрос о вычислении компонент полей в узлах, попадающих на ось z . При выбранном расположении этих величин на сетке Ω единственными компонентами, определенными в узлах на оси z и не зависящими от φ , являются E_u ($0 \leq u \leq u_0, v = 0$ — отрезок 1) и E_v ($0 \leq v \leq v_0, u = 0$ — отрезок 2). Именно для них, следуя [3], сформулируем дополнительные условия на оси z .

Сначала выведем условия для E_u на отрезке 1. Для этого умножим уравнение (1) на $dS_{v\varphi}$ и проинтегрируем результирующее соотношение по v, φ в пределах $0 \leq v \leq v_m, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, где v_m — некоторое заданное малое значение, $v_m \leq v_{3/2}$:

$$\int_0^{v_m} \int_0^{2\pi} uv \sqrt{u^2 + v^2} \frac{\partial E_u}{\partial t} dv d\varphi = \int_0^{v_m} dv \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial v} uv H_\varphi d\varphi \quad (18)$$

(интеграл от второго слагаемого в (1) равен нулю в силу периодичности H_v по φ). Из (18) можно получить (при малых v_m) следующее соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_u(v=0, u, t) \cdot 2\pi \int_0^{v_m} v \sqrt{u^2 + v^2} dv \simeq v_m \int_0^{2\pi} H_\varphi(v=v_m, u, \varphi, t) d\varphi. \quad (19)$$

Таким образом, производная по t от E_u в узлах на оси z зависит от интеграла по φ от значений H_φ на некотором контуре, охватывающем ось z .

Подобным образом из (2) получается соотношение для E_v в узлах на отрезке 2 оси z :

$$\frac{\partial}{\partial t} E_v(v, u=0, t) \cdot 2\pi \int_0^{u_m} u \sqrt{u^2 + v^2} du \simeq u_m \int_0^{2\pi} H_\varphi(v, u=u_m, \varphi, t) d\varphi, \quad (20)$$

где $u_m \leq u_3/2$. При использовании соотношений (19), (20) в разностных уравнениях следует интегралы по φ заменить на квадратурные формулы.

Дискретизация полученных уравнений (12)–(17), (19), (20) по времени t проводится с использованием метода покоординатного расщепления [5] на интервале $t_n \leq t \leq t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Согласно этому методу решение указанных уравнений осуществляется в три этапа: 1) учет изменений функций по переменной φ ; 2) учет изменений функций по переменной u ; 3) учет изменений функций по переменной v . Значения компонент полей, полученные на очередном этапе, служат начальными данными для уравнений следующего этапа. Аппроксимация по переменной t для каждого этапа имеет одинаковый вид (см. ниже уравнения (21)–(23)).

Отметим, что использование в условиях (19), (20) значений H_φ , вычисленных на предыдущем этапе, привело к неустойчивому счету. Поэтому на оси симметрии авторы применили неявные аппроксимации интегральных граничных условий. Для упрощения решения полученной системы линейных уравнений дополнительно привлекаются уравнения разностной схемы для проинтегрированных по азимутальному углу компонент полей.

Проиллюстрируем это на примере уравнений для E_v, H_φ на втором этапе схемы расщепления (переноса по переменной u). Для дальнейшего не важно, что часть величин получена на предыдущем этапе (переноса по переменной φ); рассмотрим этот этап как самостоятельный и предположим, что известны значения компонент E_v, H_φ при $t = t_n$ и надо вычислить их при $t = t_{n+1}$. Разностная схема для второго этапа имеет вид

$$\frac{E_{v_{i+1/2,j,k}}^{n+1} - E_{v_{i+1/2,j,k}}^n}{\Delta t} = -\tilde{a}_{i+1/2,j} \frac{u_{j+1/2} H_{\varphi_{i+1/2,j+1/2,k}} - u_{j-1/2} H_{\varphi_{i+1/2,j-1/2,k}}}{\Delta u_j} \quad (j \neq 1); \quad (21)$$

$$\frac{E_{v_{i+1/2,1}}^{n+1} - E_{v_{i+1/2,1}}^n}{\Delta t} = -\tilde{a}_{i+1/2,1} \sum_{k=1}^{N_\varphi} H_{\varphi_{i+1/2,3/2,k}} (\varphi_{k+1/2} - \varphi_{k-1/2}) \quad (j = 1); \quad (22)$$

$$\frac{H_{\varphi_{i+1/2,j+1/2,k}}^{n+1} - H_{\varphi_{i+1/2,j+1/2,k}}^n}{\Delta t} = -d_{i+1/2,j+1/2} \frac{f_{i+1/2,j+1} E_{v_{i+1/2,j+1,k}} - f_{i+1/2,j} E_{v_{i+1/2,j,k}}}{\Delta u_{j+1/2}}. \quad (23)$$

В уравнениях (21)–(23) $H_\varphi = \alpha H_\varphi^{n+1} + (1 - \alpha) H_\varphi^n$; $E_v = \alpha E_v^{n+1} + (1 - \alpha) E_v^n$.

Отметим, что коэффициенты \tilde{a}, d, f в (21)–(23) не зависят от индекса k . Следовательно, точно такая же система будет для просуммированных по k значений E_v, H_φ . Введем обозначения

$$E_{i+1/2,j} = \sum_{k=1}^{N_f} E_{v_{i+1/2,j,k}} (\varphi_{k+1/2} - \varphi_{k-1/2}); \quad H_{i+1/2,j+1/2} = \sum_{k=1}^{N_f} H_{\varphi_{i+1/2,j+1/2,k}} (\varphi_{k+1/2} - \varphi_{k-1/2}).$$

Для них из (21)–(23) находим

$$\begin{aligned}
 \frac{E_{i+1/2,j}^{n+1} - E_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} &= -\tilde{a}_{i+1/2,j} \frac{u_{j+1/2} H_{i+1/2,j+1/2} - u_{j-1/2} H_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta u_j} & (j \neq 1); \\
 \frac{E_{i+1/2,1}^{n+1} - E_{i+1/2,1}^n}{\Delta t} &= -2\pi \tilde{a}_{i+1/2,1} H_{i+1/2,3/2} & (j = 1); \\
 \frac{H_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - H_{i+1/2,j+1/2}^n}{\Delta t} &= -d_{i+1/2,j+1/2} \frac{f_{i+1/2,j+1} E_{i+1/2,j+1} - f_{i+1/2,j} E_{i+1/2,j}}{\Delta u_{j+1/2}}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

При любом параметре α эти уравнения могут быть решены с использованием скалярной прогонки. После определения значения $E_{i+1/2,j}^{n+1}$ легко вычислить $E_{v_{i+1/2,1}}^{n+1}$: $E_{v_{i+1/2,1}}^{n+1} = E_{i+1/2,1}^{n+1}/(2\pi)$. $E_{v_{i+1/2,1}}^{n+1}$ будет граничным значением для E_v на оси симметрии в уравнениях (21), (22), которые также решаются скалярной прогонкой.

Установим устойчивость схемы (21)–(23) с указанным выше способом вычисления E_v при $u = 0$, используя энергетический метод [6]. Поскольку исследование устойчивости будет проводиться при фиксированных значениях индексов i, k , то можно полагать, что сеточные величины не зависят от v, φ . Это означает, что фактически будет исследоваться устойчивость схемы (24). В последующих формулах индекс $i + 1/2$ у сеточных величин опустим. Поскольку устойчивость аппроксимации граничного условия (8) при $j = N_u$ не вызывает сомнений, формально будем полагать, что $N_u = \infty$ при $j \rightarrow \infty$, $E \rightarrow 0$, $H \rightarrow 0$.

Умножим первое и последнее уравнения в (24) соответственно на $E_j (u_{j+1/2} - u_{j-1/2}) / \tilde{a}_j f_j$, $E_1 u_{3/2} / \tilde{a}_1 f_1$, $\tilde{a}_1 = 2\pi \tilde{a}_{i+1/2,1}$, и просуммируем полученные результаты по j , считая, что $u_{1/2} = 0$:

$$\begin{aligned}
 S_E &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j}{\tilde{a}_j} E_j (E_j^{n+1} - E_j^n) (u_{j+1/2} - u_{j-1/2}) = \\
 &= - \sum_{j=2}^{\infty} E_j (u_{j+1/2} H_{j+1/2} - u_{j-1/2} H_{j-1/2}) f_j - H_{3/2} E_1 f_1 u_{3/2}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Аналогично, умножая второе уравнение в (24) на $H_{j+1/2} (u_{j+1} - u_j) / d_{j+1/2} u_{j+1/2}$ и суммируя полученные результаты по j , находим

$$\begin{aligned}
 S_H &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_{j+1/2}}{d_{j+1/2}} H_{j+1/2} (H_{j+1/2}^{n+1} - H_{j+1/2}^n) (u_{j+1} - u_j) = \\
 &= - \sum_{j=2}^{\infty} H_{j+1/2} (f_{j+1} E_{j+1} - f_j E_j) u_{j+1/2}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Из (25), (26) получим

$$\begin{aligned}
 S_E + S_H &= - \sum_{j=2}^{\infty} u_{j+1/2} H_{j+1/2} E_j f_j + \sum_{j=1}^{\infty} u_{j+1/2} H_{j+1/2} E_{j+1} f_{j+1} - \\
 &= - \sum_{j=1}^{\infty} u_{j+1/2} H_{j+1/2} (E_{j+1} f_{j+1} - E_j f_j) - u_{3/2} H_{3/2} E_1 f_1 = 0.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Введем в рассмотрение следующие сеточные нормы:

$$\|E\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j}{\tilde{a}_j} E_j^2 (u_{j+1/2} - u_{j-1/2}); \quad \|H\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_{j+1/2}}{d_{j+1/2}} H_{j+1/2}^2 (u_{j+1} - u_j).$$

Для непрерывных интегрируемых с квадратом функций эти нормы имеют вид

$$\int_0^{\infty} u (u^2 + v^2) E^2 du; \quad \int_0^{\infty} u (u^2 + v^2) H^2 du.$$

Далее понадобится очевидное тождество

$$\alpha f^{n+1} + (1 - \alpha) f^n = \frac{f^{n+1} + f^n}{2} + (2\alpha - 1) \frac{f^{n+1} - f^n}{2}.$$

Используя введенные нормы, из (27) имеем

$$\frac{1}{2\Delta t} \left[\|E^{n+1}\|^2 + \|H^{n+1}\|^2 - \|E^n\|^2 - \|H^n\|^2 \right] + (2\alpha - 1) \Delta t \left[\left\| \frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} \right\|^2 + \left\| \frac{H^{n+1} - H^n}{\Delta t} \right\|^2 \right] = 0.$$

Отсюда следует, что при $\alpha \geq 1/2$ $\|E^{n+1}\|^2 + \|H^{n+1}\|^2 \leq \|E^n\|^2 + \|H^n\|^2$, поскольку выражение в квадратных скобках положительно, т. е. при таких α схема (24) будет безусловно устойчива. При $\alpha < 1/2$ устойчивости в указанной норме ожидать нельзя.

Аналогичные результаты имеют место и для третьего этапа схемы расщепления (переноса по переменной v).

Результаты расчетов тестовой задачи

Ниже приводятся результаты сравнения численного и аналитического решений представительной модельной задачи. Предположим, что при $v = v_0$, т. е. на поверхности параболоида, граничные условия для E_u и E_φ имеют вид

$$E_u|_{v=v_0} = -\frac{4\pi}{\sqrt{u^2 + v_0^2}} \frac{\partial P}{\partial u}; \quad E_\varphi|_{v=v_0} = -\frac{4\pi}{uv_0} \frac{\partial P}{\partial \varphi},$$

где функция $P(t, u, v, \varphi)$ определена следующим образом:

$$P = Q(\tau) \left(1 + \varepsilon \frac{u}{v_0} \cos \varphi \right);$$

ε — числовой параметр; *задержанное* время

$$\tau = t - \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = t - z - F. \quad (28)$$

Для большей наглядности приведем аналитические выражения для компонент электрических полей в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) с полярной осью, направленной вдоль оси симметрии параболоида. Компоненты вектора напряженности электрического поля внутри параболического излучателя будут иметь следующий вид:

$$E_z = Z_0(\tau) + \varepsilon \cos \varphi Z(\tau) \rho, \quad E_\rho = 2B_0(\tau) \rho + \varepsilon \cos \varphi (E_+ + E_-), \quad E_\varphi = \varepsilon \sin \varphi (E_+ - E_-). \quad (29)$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{\pi}{F} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} S_0 \right); & Z_0(\tau) &= \frac{4\pi}{F} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} S_0 \right); \\ E_+ &= B(\tau) \rho^2; & E_- &= A_0(\tau) + A_1(\tau)(z + F) + A_2(\tau) \rho^2, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$A_0 = -\frac{2\pi}{F} Q(\tau); \quad A_1 = \frac{\pi}{F^2} \frac{\partial}{\partial \tau} S(\tau); \quad A_2 = \frac{\pi}{2F^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} S(\tau); \quad B = \frac{\pi}{2F^2} \left(\frac{1}{2F} \frac{\partial}{\partial \tau} S + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} S \right);$$

$$Z(\tau) = \frac{\pi}{F^2} \left(3 \frac{\partial}{\partial \tau} S + \frac{1}{F} S \right).$$

Функцию $Q(\tau)$ положим равной

$$Q(\tau) = \begin{cases} \sin^2 \frac{\omega\tau}{2}, & \tau \in [0, 2T]; \\ 0, & \tau \notin [0, 2T], \end{cases}$$

где $\omega = \pi/T$.

Тогда в приведенных выше формулах

$$S = V(\tau) - V(\tau - 2T);$$

$$V(\tau) = \frac{\omega}{4a} \left[\frac{1}{\alpha_0^2 + \omega^2} (\alpha_0 \sin \omega\tau - \omega \cos \omega\tau + \omega e^{-\alpha_0\tau}) - \frac{1}{\beta_0^2 + \omega^2} (\beta_0 \sin \omega\tau - \omega \cos \omega\tau + \omega e^{-\beta_0\tau}) \right];$$

$$\alpha_0 = b - a; \quad \beta_0 = b + a; \quad b = \frac{1}{F}; \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2F}.$$

Функция $S_0(\tau)$ определяется аналогичной формулой, но при этом $a = b = 1/(2F)$. Отметим, что по определению $V(\tau) = 0$ при $\tau \leq 0$.

Учитывая связь переменных и компонент векторов в цилиндрической и параболической системах координат, а именно:

$$z = \frac{u^2 - v^2}{2}; \quad \rho = uv; \quad E_\rho = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} (E_u v + E_v u); \quad E_z = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} (E_u u - E_v v),$$

нетрудно получить выражения для компонент E_u, E_v .

Как видно из формул (29), (30), зависимости компонент вектора напряженности электрического поля от переменных ρ, φ имеют довольно простую форму. В то же время зависимость решения от переменных t, z является автомодельной и согласно формулам (28)–(30) имеет вид бегущей волны. Это обстоятельство следует учитывать при выборе сеток по переменным u, v .

Чтобы проиллюстрировать характерные особенности отдельных компонент, составляющих бегущую волну, на рис. 3–5 представлены графики функций $Z_0(\tau), Z(\tau), A_0(\tau), B_0(\tau), A_1(\tau), A_2(\tau)$,

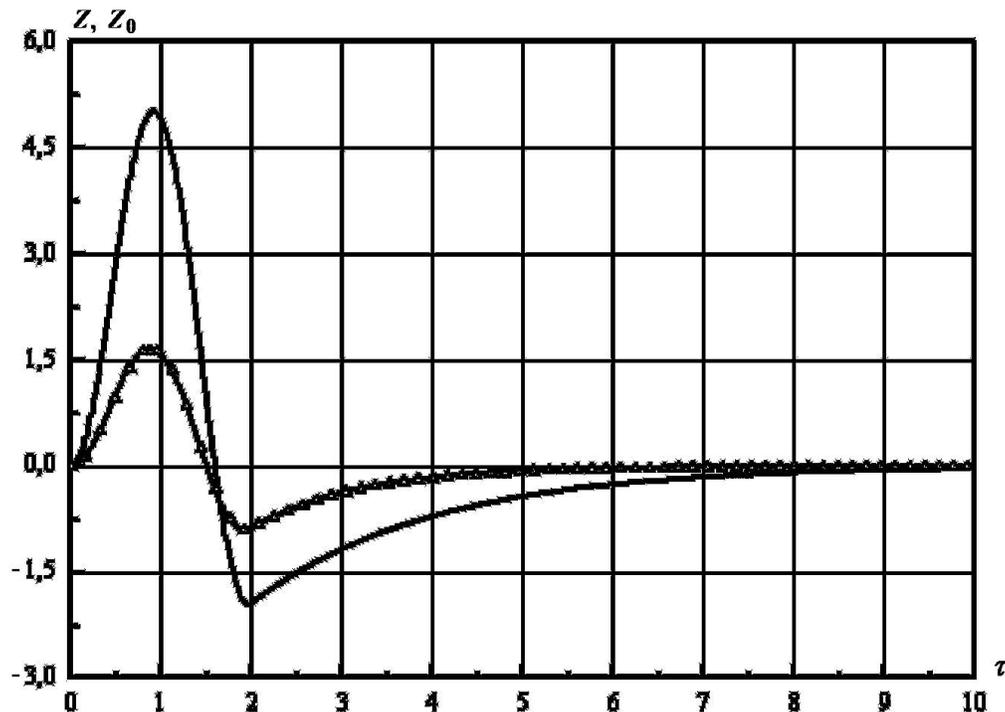


Рис. 3. Зависимость функций источника от времени: — — $Z_0(\tau)$; - - - $Z(\tau)$

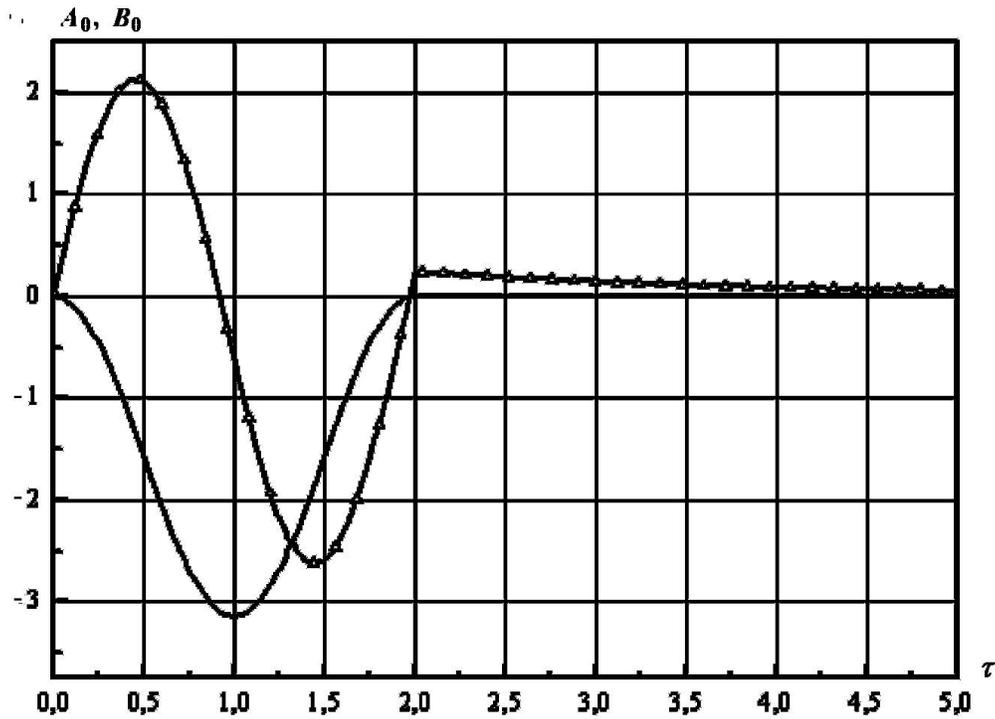


Рис. 4. Зависимость функций источника от времени: — — $A_0(\tau)$; \triangle — $B_0(\tau)$

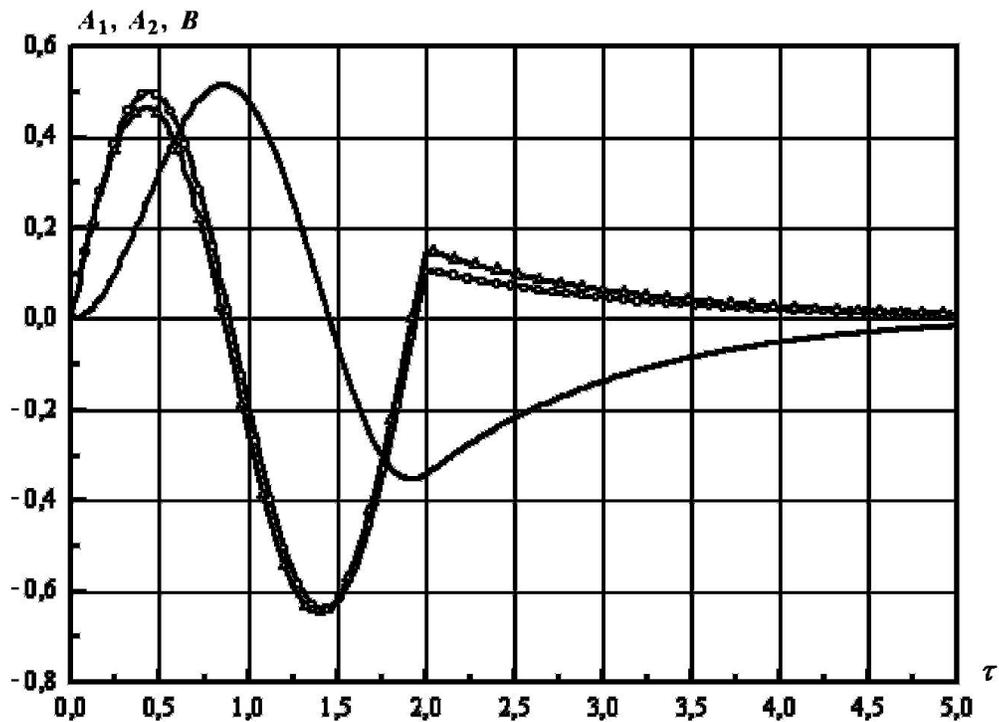


Рис. 5. Зависимость функций источника от времени: — — $A_1(\tau)$; \triangle — $A_2(\tau)$; \circ — $B(\tau)$

$B(\tau)$, входящих в формулы (29); при этом $F = 2$, $T = 1$. Видно, что зависимости $Z_0(\tau)$, $Z(\tau)$, $A_0(\tau)$, $A_1(\tau)$ гладкие, а зависимости $B_0(\tau)$, $A_2(\tau)$, $B(\tau)$ имеют излом при $\tau = 2$, где, как нетрудно убедиться, имеет разрыв третья производная функции $S(\tau)$ (или, что то же, при $\tau = 0$ не обращается в нуль третья производная функции $V(\tau)$). Такой излом сохранится, очевидно, и в зависимостях $E_\alpha(\tau)$, $\alpha = \rho, \varphi, z$.

Численные расчеты модельной задачи проведены для значений параметров $\varepsilon = 1$, $T = 1$, $F = 2$ (соответствующее значение $v_0 = 2$). Граница u_0 расчетной области по переменной u полагалась равной $u_0 = 6$; согласно формуле (28) при $u = u_0$, $v = v_0$ функция $P(t)$ равна нулю для всех значений $t \leq 18$, поэтому для этих значений t все компоненты полей при $u = u_0$ равны нулю. Это обстоятельство использовано при проведении численных расчетов.

Прежде чем представить результаты численных расчетов, отметим, что коэффициенты в разностных уравнениях (12)–(17) при удалении от оси симметрии параболоида с хорошей точностью равны аналогичным коэффициентам, получающимся при непосредственной замене производных по пространственным переменным в уравнениях (1)–(6) разностными соотношениями. Теоретически точность получающихся таким образом схем расщепления детально исследована, например, в книге [5]. Поэтому при обсуждении результатов расчетов ограничимся лишь иллюстрацией влияния счетных параметров на точность вычисления компонент E_u , E_v на оси симметрии параболоида, где существенно использованы интегральные соотношения (19), (20), а также проследим влияние этих параметров на характеристики сформировавшихся полей излучения.

При выборе счетных параметров (шага Δt и шагов сеток по переменным u , v) будем исходить из следующих соображений. Выделим в функциях, зависящих только от τ , характерные масштабы по этой переменной и определим минимальный из них, который обозначим через τ_0 . Нетрудно видеть, что в рассматриваемой задаче $\tau_0 = \min(1/\omega, 1/\alpha_0, 1/\beta_0)$. При выбранных значениях F , T $\tau_0 = 1/\omega = 0,32$. Очевидно, что для получения приемлемой точности в численных расчетах шаг Δt должен выбираться таким, чтобы на масштаб τ_0 приходилось достаточно большое число n_0 шагов Δt . В силу автомодельной зависимости решения от переменных t , z такому же требованию должны удовлетворять шаги сетки по переменной z , вычисляемой по сеткам для u , v . В обсуждаемых ниже расчетах узлы сеток по переменным u , v вычислялись следующим образом: по переменной z в области $-F \leq z \leq u_0^2/2$ строилась равномерная сетка с шагом Δz , выбранным с учетом масштаба τ_0 ; узлы u_i сетки по переменной u вычислялись по формуле $u_i = \sqrt{2z_i}$, $z_i \geq 0$, узлы v_i сетки по переменной v вычислялись по формуле $v_i = \sqrt{-2z_i}$, $z_i \leq 0$.

Все представленные ниже расчеты проведены с параметром невязности $\alpha = 0,5$; шаг равномерной сетки по переменной φ равен $\Delta\varphi = \pi/12$.

Рассмотрим сначала результаты расчета, выполненного с шагами $\Delta t = \Delta z = 0,02$; число шагов n_0 на масштаб τ_0 равно $n_0 = 16$.

На рис. 6, 7 представлены на разные моменты времени t полученные в расчете зависимости $E_u(u)$, $E_v(v)$ на соответствующих участках оси симметрии параболоида; аналитические зависимости в выбранном масштабе графически не отличаются от численных и на рис. 6, 7 не приведены. Отметим, что на участке оси параболоида, соответствующем значению $v = 0$, $E_u = E_z$, а на участке оси с $v = 0$ $E_v = -E_z$, причем в обоих случаях в формуле для E_z (29) следует положить $\rho = 0$. Следовательно, на рис. 6, 7 показаны различные участки зависимости $Z_0(\tau)$ (см. рис. 3), представленной согласно (28) либо в виде функции от переменной u (см. рис. 6), либо в виде функции от переменной v (см. рис. 7). Так, на рис. 7 при $t = 4$ $E_v(v) = -Z_0(2 + v^2/2)$. На рис. 6 хорошо видно "сужение" зависимости $E_u(u)$ с ростом времени t , что обусловлено нелинейностью связи переменных z и u .

На рис. 8–10 для иллюстрации точности определения поля излучения представлены аналитические и численные временные зависимости компоненты E_ρ электрического поля при значениях $u = 4$, $\varphi = 5\pi/3$ для различных значений v . Видно, что выбранные счетные параметры обеспечивают хорошую точность описания в расчете формы и амплитудных значений временной зависимости для компоненты E_ρ . Небольшие осцилляции в численном решении обусловлены обсужденной ранее негладкостью аналитического решения. Отметим, что с ростом параметра невязности α эти осцилляции сглаживаются, но при этом значительно снижается точность численного решения; так, при $\alpha = 1$ амплитудные значения в численном решении уменьшаются примерно в два раза.

Рассмотрим теперь результаты расчета, выполненного с шагами $\Delta t = \Delta z = 0,03$; число шагов n_0 на масштаб τ_0 равно $n_0 = 10$.

На рис. 11 на момент времени $t = 4$ представлены аналитическая и численная зависимости $E_v(v)$ при $u = 0$. Видно, что увеличение шагов Δt , Δz в полтора раза приводит к некоторому снижению точности описания компонент электрического поля на оси параболоида.

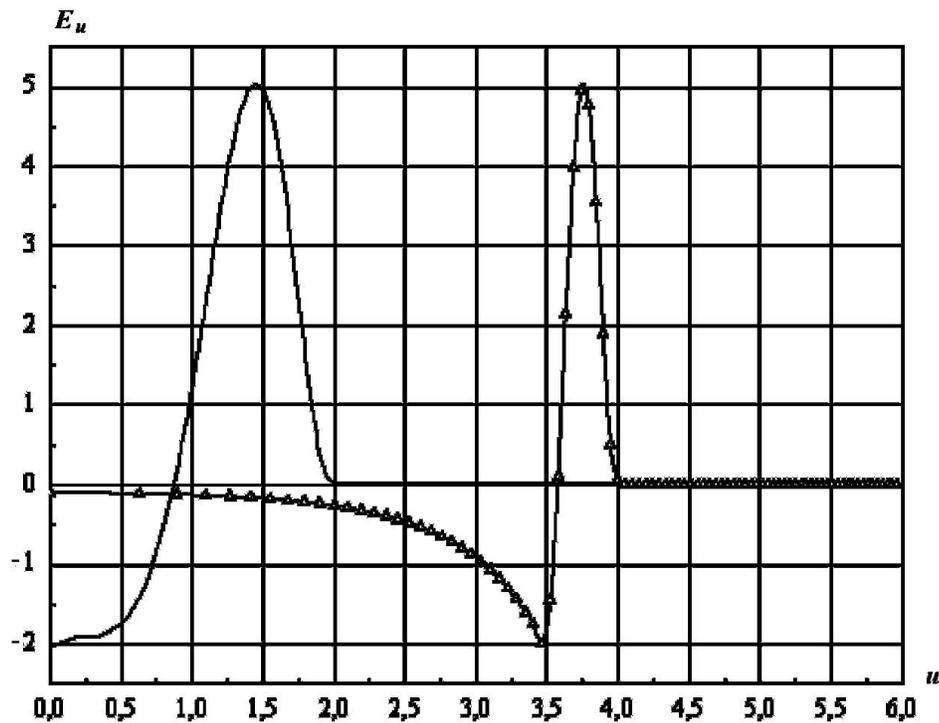


Рис. 6. Зависимость E_u от u при $v = 0$, $\varphi = 5\pi/3$ на разные моменты времени: — — $t = 4$; -△- $t = 10$

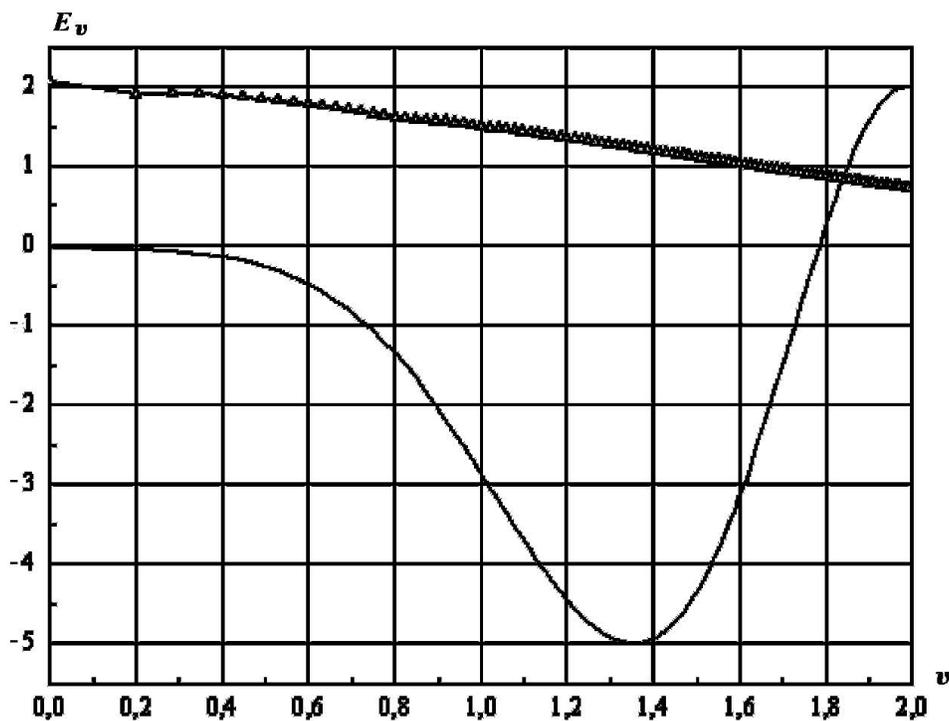


Рис. 7. Зависимость E_v от v при $u = 0$, $\varphi = 5\pi/3$ на разные моменты времени: — — $t = 2$; -△- $t = 4$

На рис. 12 представлены аналитические и численные временные зависимости компоненты E_ρ электрического поля при значениях $u = 4$, $\varphi = 5\pi/3$ для значения $v = 1$. Видно, что выбранные счетные параметры по-прежнему обеспечивают хорошую точность описания в расчете формы и амплитудных значений временной зависимости для компоненты E_ρ , но осцилляции при этом возрастают.

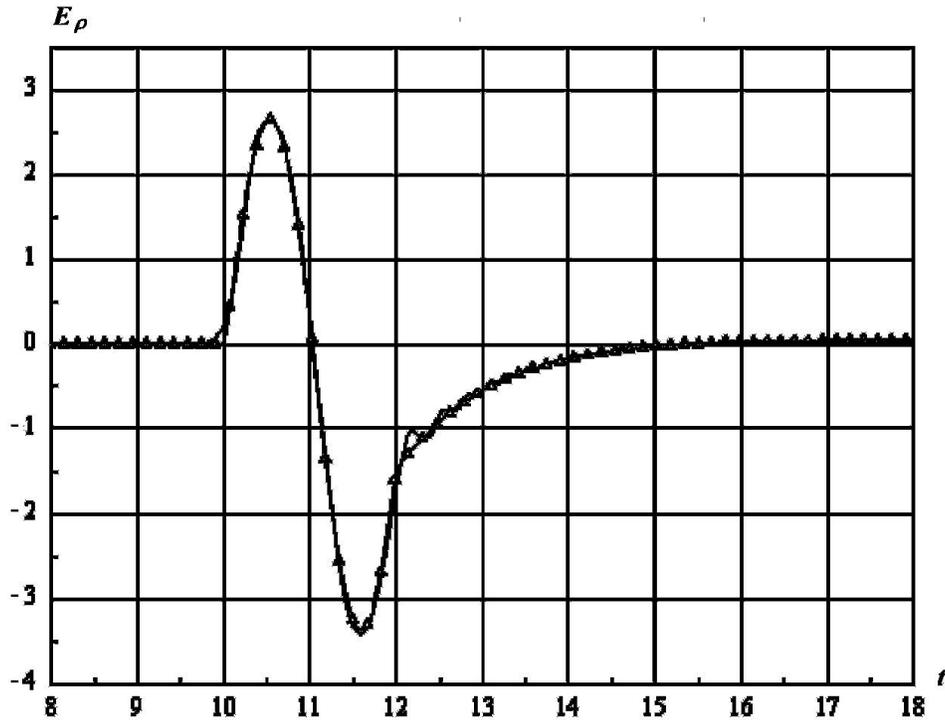


Рис. 8. Зависимость E_ρ от времени в точке $u = 4, v = 0,1$ ($\rho = 0,4; z = 7,995$), $\varphi = 5\pi/3$: — — расчет; \triangle — аналитическое решение

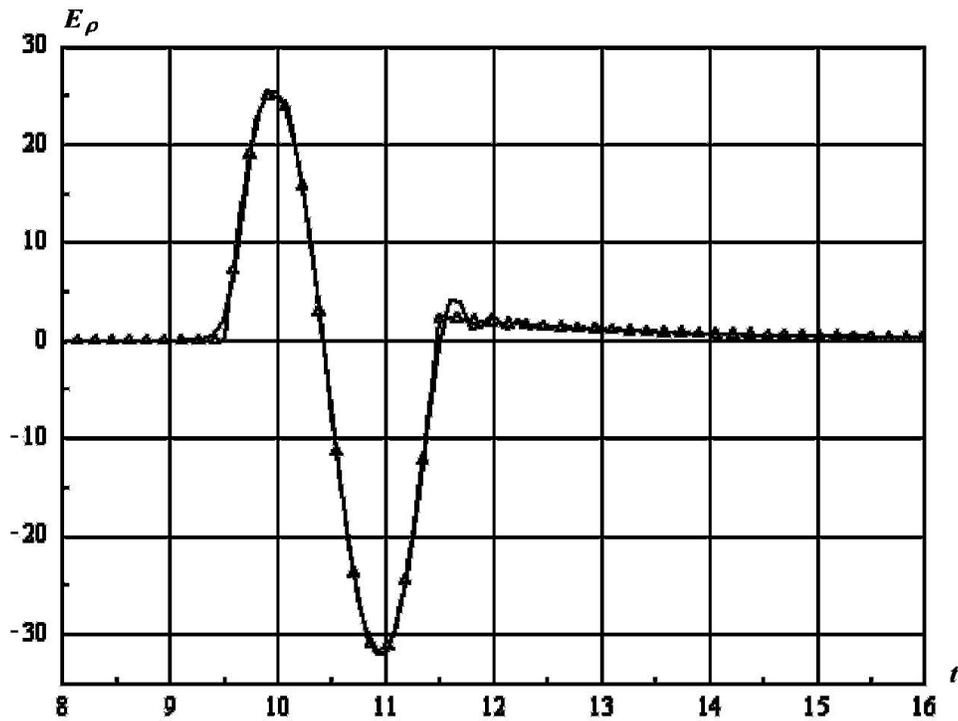


Рис. 9. Зависимость E_ρ от времени в точке $u = 4, v = 1$ ($\rho = 4; z = 7,5$), $\varphi = 5\pi/3$: — — расчет; \triangle — аналитическое решение

Отметим, что уменьшение шага Δt (при неизменном шаге $\Delta z = 0,03$) мало меняет результаты по сравнению с представленными на рис. 9, 10, в то время как увеличение шага Δt приводит к дальнейшему росту амплитуды численных осцилляций (см. на рис. 12 результаты для $\Delta t = 0,045$).

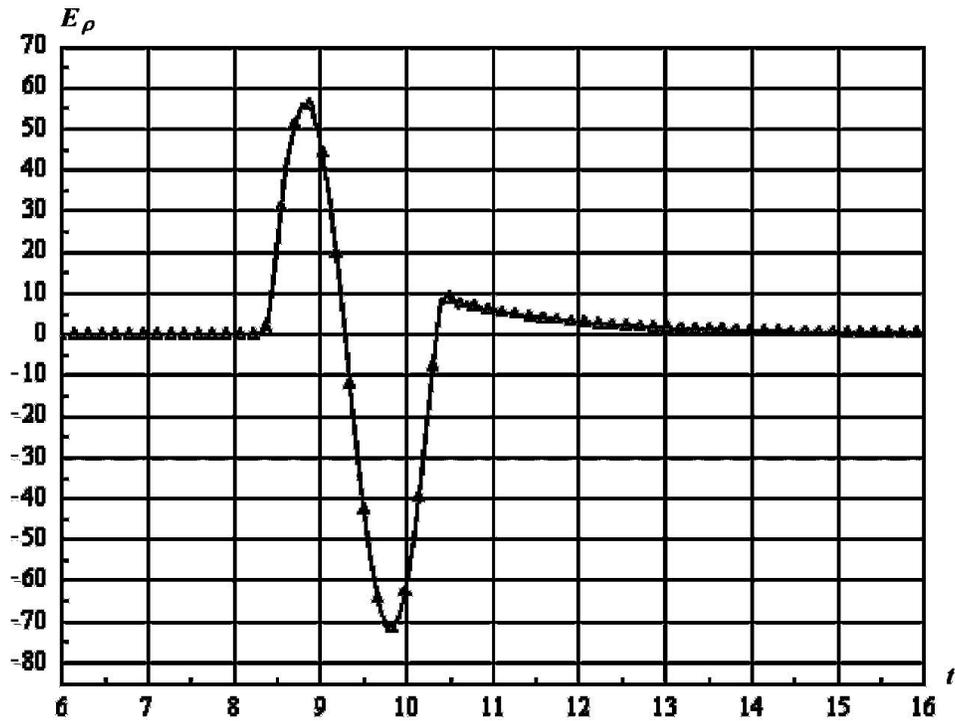


Рис. 10. Зависимость E_ρ от времени в точке $u = 4, v = 1,8$ ($\rho = 7,2; z = 6,38$), $\varphi = 5\pi/3$: — — расчет; \triangle — аналитическое решение

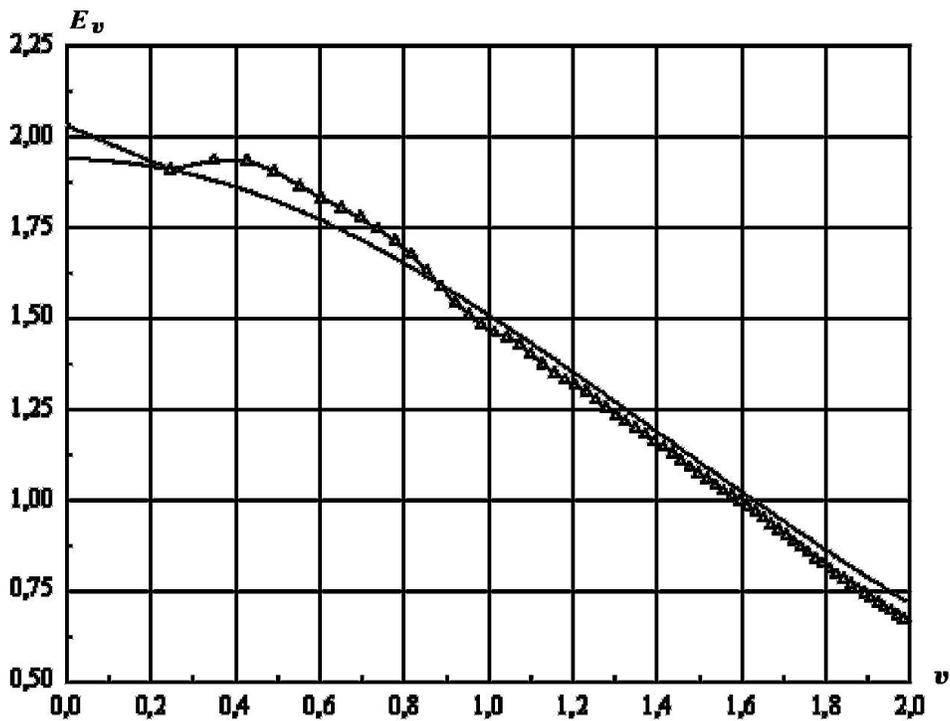


Рис. 11. Зависимость E_v от v при $u = 0, \varphi = 5\pi/3$ на момент времени $t = 4$: — — аналитическое решение; \triangle — расчет с $\Delta t = \Delta z = 0,03$

Таким образом, расчеты представительной модельной задачи показывают, что рассмотренная в данной работе разностная схема численного решения трехмерных уравнений Максвелла в параболической полости обеспечивает приемлемую точность вычисления амплитудно-временных характе-

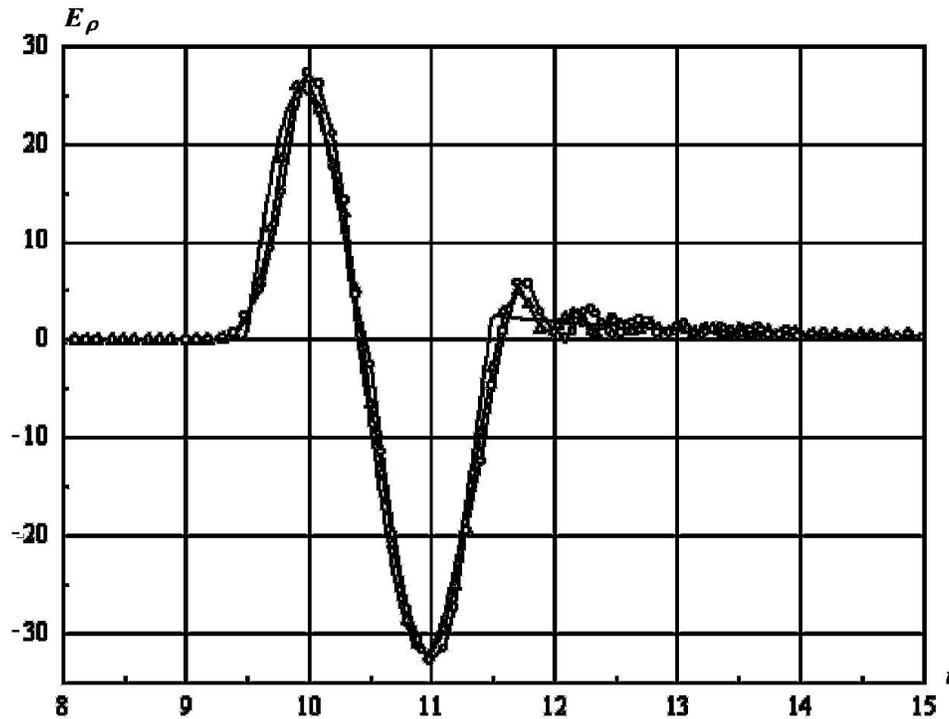


Рис. 12. Зависимость E_ρ от времени в точке $u = 4$, $v = 1$ ($\rho = 4$; $z = 7,5$), $\varphi = 5\pi/3$: — — аналитическое решение; $-\triangle-$ — расчет с $\Delta t = \Delta z = 0,03$; $-\circ-$ — расчет с $\Delta t = 0,045$, $\Delta z = 0,03$

ристик полей излучения при сравнительно небольшом ($\sim 10-15$) числе шагов сетки на характерных для этого поля пространственно-временных масштабах.

Заключение

Опыт решения прикладных задач показывает, что представленный в работе метод расчета электродинамики параболической полости позволяет вычислять амплитудно-временные характеристики полей излучения с приемлемой для приложений точностью.

Отметим, что разностная схема решения трехмерных уравнений Максвелла в параболической системе координат, рассмотренная в данной работе, в целом основана на традиционных подходах, используемых при построении разностных схем для этих уравнений. Новыми элементами метода являются неявная аппроксимация интегрального граничного условия на оси симметрии и привлечение для разрешения этого граничного условия разностных уравнений для проинтегрированных по азимутальному углу компонент полей.

Такой же подход может быть использован и при решении уравнений Максвелла в цилиндрических и сферических координатах.

Список литературы

1. Бессараб А. В., Гаранин С. Г., Мартыненко С. П., Солдатов А. В., Соловьев А. А., Терехин В. А., Трутнев Ю. А. Методы расчета генератора сверхширокополосного электромагнитного излучения, инициированного пикосекундным лазером // Докл. РАН. 2006. Т. 411, № 6. С. 758—761.
2. Солдатов А. В. Эффективные граничные условия для задач электродинамики с приповерхностными источниками // Там же. 2007. Т. 413, № 5. С. 620—623.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973.

4. *Holland R.* THREDS: A finite-difference time-domain EMP code in 3D-spherical coordinates // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1983. Vol. NS-30, No. 6. P. 4592—4595.
5. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.
6. *Рунтмайер Р., Мортон Р.* Разностные схемы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.

Статья поступила в редакцию 01.02.08.
