

УДК 519.6

## СХЕМА ТИПА $DS_n$ -МЕТОДА РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НА ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СЕТКАХ

А. И. Бочков, В. А. Шумилин  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Для двумерного уравнения переноса на четырехугольных пространственных сетках построена схема типа  $DS_n$ -метода, в которой сеточные значения искомой функции на сторонах и в центрах ячеек определяются как основные, а значения в вершинах ячейки (узлах сетки) используются как вспомогательные. Приведены результаты численного исследования, показывающие на существенно неортогональных пространственных сетках сходимость сеточного решения к точному практически со вторым порядком.

### Введение

На сегодняшний день имеется большое число разностных схем, аппроксимирующих двумерное уравнение переноса как на прямоугольных, так и на неортогональных пространственных сетках [1–4].

В работе [2] была предложена консервативная разностная схема для двумерного уравнения переноса в цилиндрических координатах на четырехугольных пространственных сетках. Схема построена с привлечением сеточных значений искомой функции на сторонах и в центрах ячеек консервативности. Для замыкания системы сеточных уравнений использовались дополнительные соотношения, которые в зависимости от числа освещенных сторон четырехугольника обеспечивают либо первый, либо второй порядок аппроксимации. Однако на произвольной четырехугольной сетке схема имеет первый порядок точности, что в задачах переноса часто не является удовлетворительным приближением.

В работе [3] построена аппроксимация двумерного уравнения переноса по схеме смешанного типа, в которой значения искомой функции определены одновременно и в указанных ранее точках, и в вершинах ячеек. При таком подходе сконструированы дополнительные соотношения, обеспечивающие достаточно точную аппроксимацию уравнения переноса по пространственным переменным при любом варианте освещен-

ности сторон четырехугольной ячейки. Схема с расширенным шаблоном нашла широкое применение при решении задач переноса в методике САТУРН [5].

В [4] предложена аппроксимация двумерного уравнения переноса на многоугольных пространственных сетках. Разностная схема строится в два этапа. На первом этапе промежуточные значения искомой функции в счетной ячейке находятся путем приближенного решения уравнения переноса вдоль характеристик. На втором этапе из уравнения баланса в ячейке находится корректирующий множитель и все полученные значения искомой функции умножаются на этот множитель.

В настоящей работе рассматривается комбинированная разностная схема типа  $DS_n$ -метода, в которой решение ищется на сторонах и в центрах ячеек, а значения в вершинах ячейки определяются как вспомогательные.

### Постановка задачи

Рассмотрим двумерное нестационарное кинетическое уравнение переноса частиц в одногрупповом приближении, записанное в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{N}{v} \right) + \operatorname{div} (\vec{\Omega} N) + \alpha N = F; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{\Omega}N) &= \frac{\partial}{r\partial r} \left( r\sqrt{1-\mu^2}N \cos \varphi \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}(\mu N) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\sqrt{1-\mu^2}N \sin \varphi}{r} \right); \\ F &= \frac{1}{2\pi} \left( \beta n^{(0)} + Q \right), \quad n^{(0)} = \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\pi N d\varphi. \end{aligned}$$

Здесь  $t$  — время;  $z$ ,  $r$  — цилиндрические координаты частицы в пространстве;  $v$  — скорость частиц;  $\alpha$  — коэффициент столкновения частиц;  $\beta$  — коэффициент размножения частиц;  $N = N(r, z, t, \theta, \varphi)$  — плотность потока частиц в точке  $(r, z, t)$ , летящих в направлении  $\vec{\Omega}$ ;  $\vec{\Omega}(\mu, \varphi)$  — единичный вектор в направлении полета частицы;  $\mu = \cos \theta$ ,  $\theta$  — угол между  $\vec{\Omega}$  и осью симметрии  $\vec{z}$ ;  $\varphi$  — угол между проекцией вектора  $\vec{\Omega}$  на плоскость, проходящую через точку  $(r, z)$  перпендикулярно оси  $\vec{z}$ , и вектором, соединяющим точки  $(0, z)$  и  $(r, z)$ ;  $F$  — правая часть кинетического уравнения;  $Q$  — независимый источник частиц.

Уравнение (1) решается в области фазового пространства  $D = \{(z, r) \in L, -1 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ , где область  $L$  — половина сечения тела вращения плоскостью, проходящей через ось  $\vec{z}$  и образующую  $\Gamma$ .

Начальное условие:

$$N(0, r, z, \mu, \varphi) = N^0(r, z, \mu, \varphi).$$

Граничное условие ставится на внешней поверхности при  $(\vec{\Omega}, \vec{n}) < 0$  в виде потока частиц, входящих в тело:

$$N(t, z, r, \mu, \varphi)_{(r,z) \in \Gamma} = \psi(t, z_\Gamma, r_\Gamma, \mu, \varphi),$$

где  $\Gamma$  — образующая тела вращения;  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к образующей  $\Gamma$ ;  $\psi(t, z_\Gamma, r_\Gamma, \mu, \varphi)$  — заданная функция (поток).

Наряду с уравнением (1) рассматриваются уравнения, полученные для  $r = 0$  и  $\varphi = \pi$ , которые используются как дополнительные (внутренние) граничные условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \varphi} \Big|_{r=0} &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{N}{v} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \sqrt{1-\mu^2}N \right) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu N) + \alpha N &= F. \end{aligned}$$

Уравнение (1) решается итерациями по интегралу столкновений.

В результате конечно-разностной аппроксимации [2] уравнение баланса в счетной ячейке примет следующий вид:

$$\frac{\left(\frac{N}{v}\right)^{n+1} - \left(\frac{N}{v}\right)^n}{\Delta t} + \operatorname{div}_h(\vec{\Omega}N) + \alpha N_0 = F,$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_h(\vec{\Omega}N) &= \frac{1}{V} \left( \sum_{l=1}^4 \chi_l N_l + \chi_6 P_6 - \chi_5 P_5 \right); \\ \chi_l &= \pi (r_{l+1} + r_l) \left[ (r_{l+1} - r_l) \mu - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi (z_{l+1} - z_l) \right], \quad l = \overline{1,4}; \\ \chi_{5,6} &= \frac{2\pi \sqrt{1-\mu^2} S \sin \varphi}{\Delta \varphi}; \end{aligned}$$

$V$  — объем ячейки;  $S$  — площадь ячейки.

Для замыкания системы разностных уравнений по угловым переменным и переменной времени используются традиционные дополнительные соотношения [2, 3]:

$$\begin{aligned} \frac{N_0}{v} &= \gamma \left( \frac{N}{v} \right)^{n+1} + (1-\gamma) \left( \frac{N}{v} \right)^n, \quad 0,5 \leq \gamma \leq 1; \\ N_0 &= \eta P_6 + (1-\eta) P_5, \quad 0,5 \leq \eta \leq 1. \end{aligned}$$

При конструировании схем на неортогональных сетках важным этапом является построение дополнительных соотношений по пространственным переменным. Число дополнительных соотношений и их вид определяется освещенностью сторон ячейки, т. е. количеством отрицательных коэффициентов  $\chi_l$ . Если все ячейки пространственной сетки представляют собой выпуклые четырехугольники, возможны три варианта освещенности сторон ячейки (рис. 1). На рис. 1 и далее по тексту  $N_l$  и  $V_l$  — значения искомой функции на сторонах и в узлах ячеек соответственно.

Схемы типа  $DS_n$ -метода, которые при счете ячейки с одной освещенной стороной используют дополнительные соотношения, связывающие значения искомой функции только на сторонах и в центре ячейки, имеют на произвольных сетках первый порядок точности [2]. Для повышения порядка точности привлекаются дополнительные соотношения, которые наряду со значениями искомой функции в серединах сторон счетной ячейки используют значения искомой функции в вершинах (узлах) ячейки.

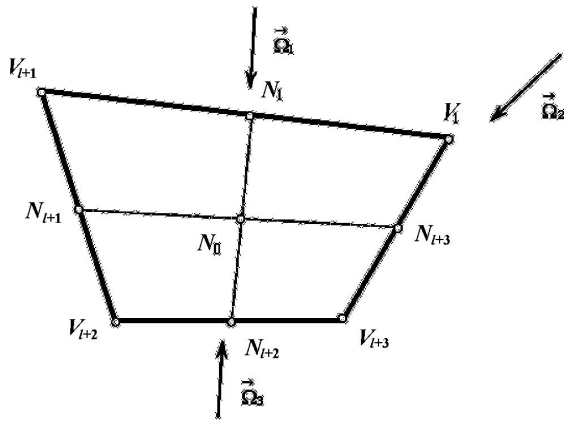


Рис. 1. Возможные варианты освещенности сторон ячейки

Такой подход позволяет строить схемы практически со вторым порядком точности по пространственным переменным [3].

Остановимся на дополнительных соотношениях, которые используются для замыкания системы сеточных уравнений по пространственным переменным при различных вариантах освещенности сторон ячейки в предлагаемой схеме. При этом отметим, что дополнительные соотношения в случае двух и трех освещенных сторон являются традиционными для схем типа  $DS_n$ -метода [2].

*Вариант 1.* Освещены три стороны ячейки — направление  $\vec{\Omega}_3$  (см. рис. 1). В этом случае известны  $N_{i+1}$ ,  $N_{i+2}$  и  $N_{i+3}$ . Неизвестны значения функции  $N$  в центре ячейки и на одной из сторон —  $N_0$  и  $N_i$ . По пространственным переменным вводится одно дополнительное соотношение:

$$N_0 = \delta N_i + (1 - \delta) N_{i+2}, \quad 0,5 \leq \delta \leq 1.$$

*Вариант 2.* Освещены две стороны ячейки — направление  $\vec{\Omega}_2$ , так что известны  $N_i$  и  $N_{i+3}$ , а также  $V_i$ ,  $V_{i+1}$  и  $V_{i+3}$ . В этом случае значения функции  $N$  неизвестны в центре ячейки —  $N_0$ , на сторонах —  $N_{i+1}$  и  $N_{i+2}$ , а также в неосвещенном узле —  $V_{i+2}$ . По пространственным переменным вводятся следующие дополнительные соотношения:

$$\begin{aligned} N_0 &= \delta N_{i+2} + (1 - \delta) N_i; \\ N_0 &= \delta N_{i+1} + (1 - \delta) N_{i+3}; \\ 0,5 &\leq \delta \leq 1. \end{aligned}$$

После того как значения  $N_0$ ,  $N_{i+1}$  и  $N_{i+2}$  определены, дополнительно рассчитывается значение искомой функции  $V_{i+2}$  в неосвещенном узле ячейки:

$$V_{i+2} = \frac{N_{i+1} + N_{i+2} - (1 - \delta)(V_{i+1} + V_{i+3})}{2\delta}.$$

*Вариант 3.* Освещена только одна сторона ячейки — направление  $\vec{\Omega}_1$  (известны  $N_i$ ,  $V_i$  и  $V_{i+1}$ ). Неизвестны значения функции  $N$  в центре ячейки —  $N_0$ , на сторонах —  $N_{i+1}$ ,  $N_{i+2}$  и  $N_{i+3}$ , в узлах —  $V_{i+2}$  и  $V_{i+3}$ . Рассмотрим эту ситуацию подробнее (рис. 2).

По пространственным переменным вводятся следующие дополнительные соотношения (подобные аппроксимационные соотношения используются на многоугольных пространственных сетках [4]):

$$\begin{aligned} N_{i+1} &= cP_1; \quad N_{i+3} = cP_2; \quad N_0 = \frac{N_{i+1} + N_{i+3}}{2}; \\ N_0 &= \delta N_{i+2} + (1 - \delta) N_i, \quad 0,5 \leq \delta \leq 1. \end{aligned}$$

$P_1$  и  $P_2$  — значения функции в точках пересечения характеристик, проходящих через середины боковых неосвещенных сторон, с освещенной стороной ячейки;  $c$  — коэффициент пропорциональности. Значения  $P_1$  и  $P_2$  находятся линейной интерполяцией входящих узловых значений  $V_i$  и  $V_{i+1}$ :

$$P_1 = \alpha_1 V_i + (1 - \alpha_1) V_{i+1}; \quad P_2 = \alpha_2 V_{i+1} + (1 - \alpha_2) V_i,$$

где коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{\overline{\chi_{i+1}}}{2\overline{\chi_i}}, \quad \alpha_2 = -\frac{\overline{\chi_{i+3}}}{2\overline{\chi_i}}, \\ \overline{\chi_i} &= (r_{i+1} - r_i) \mu - \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi (z_{i+1} - z_i). \end{aligned}$$

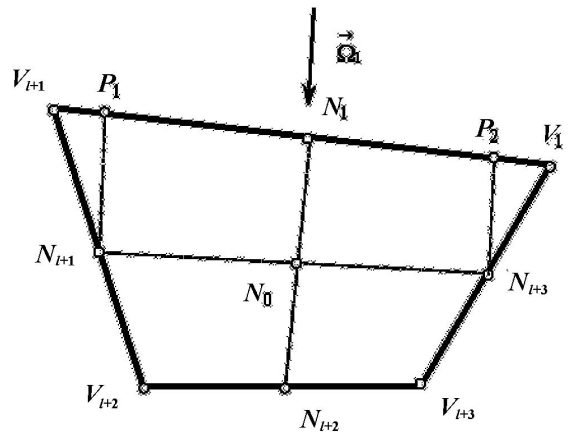


Рис. 2. Освещена одна сторона ячейки

Отметим, что эти дополнительные соотношения используются, когда хотя бы одно из значений  $V_l, V_{l+1}$  не равно нулю. В этом случае значения  $V_l$  и  $V_{l+1}$  предварительно нормируются таким образом, чтобы  $V_l + V_{l+1} = 2N_l$ .

В противном случае ( $V_l = V_{l+1} = 0$ ) используются дополнительные соотношения первого порядка точности:

$$\begin{aligned} N_{l+1} &= N_0; & N_{l+3} &= N_0; \\ N_0 &= \delta N_{l+2} + (1 - \delta) N_l, & 0,5 \leq \delta \leq 1. \end{aligned}$$

После того как значения на неосвещенных сторонах и в центре ячейки найдены, определяются значения искомой функции в неосвещенных узлах ячейки  $V_{l+2}$  и  $V_{l+3}$ . Для этого используются следующие дополнительные соотношения:

$$\begin{aligned} N_{l+1} &= \delta V_{l+2} + (1 - \delta) V_{l+1}; \\ N_{l+3} &= \delta V_{l+3} + (1 - \delta) V_l. \end{aligned}$$

Описанная разностная схема в общем случае является немонотонной. Для обеспечения положительности сеточного решения применяется метод балансного зануления [6]. Для удобства изложения далее по тексту предложенную схему будем называть новой.

### Численное исследование разностной схемы

Подробная постановка тестовой задачи представлена в работе [2]. Рассматривается цилиндр с параметрами  $0 \leq r \leq 1$ ;  $0 \leq z \leq 2$ ;  $\alpha = 1,34$ ;  $\beta = 2,25$ ;  $Q = 0$ ;  $v = 1$ . Граничное условие — нулевой входящий поток. Для аппроксимации по угловым переменным применялась  $ES_8$ -квадратура [1].

В качестве результата использовалась временная постоянная размножения частиц  $\lambda$ . При расчете параметра  $\lambda$  точность сведения итерации задавалась равной  $10^{-7}$ .

Расчеты проводились на сгущающихся прямоугольных и существенно неортогональных [2] (рис. 3) пространственных сетках. При этом число строк и столбцов последовательно полагалось равным 8, 16, 32, 64 и 128.

Рассматриваемые неортогональные сетки хороши тем, что в них существенен процент ячеек с одной освещенной стороной. В табл. 1 представлено процентное соотношение ячеек с разным числом освещенных сторон для неортогональной сетки.

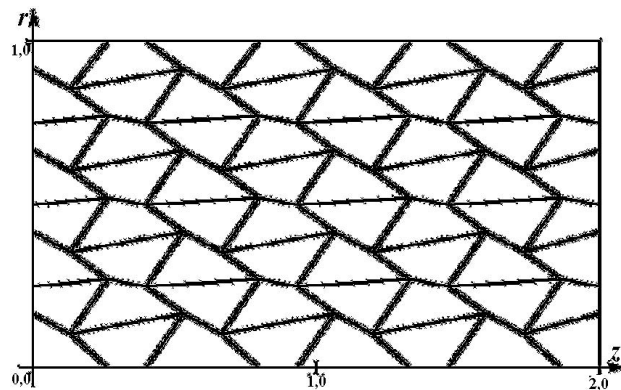


Рис. 3. Неортогональная пространственная сетка  $8 \times 8$

Таблица 1

Процентное соотношение ячеек с разным числом освещенных сторон на неортогональной сетке

Сетка	Число освещенных сторон		
	1	2	3
$8 \times 8$	28,12	43,75	28,12
$16 \times 16$	29,95	40,10	29,95
$32 \times 32$	30,86	38,28	30,86
$64 \times 64$	31,32	37,37	31,32
$128 \times 128$	31,54	36,91	31,54

Число ячеек с одной освещенной стороной составляет  $\sim 30\%$  от общего числа рассчитываемых ячеек.

При проведении расчетов за *точное* принималось решение на очень подробной прямоугольной сетке:  $\lambda_{\text{точ}} = \lambda_{1024 \times 1024} = 0,148358$ . Если  $\|\lambda_{\text{точ}} - \lambda_h\| \leq C\Delta h^k$  ( $C > 0, k > 0$  — не зависящие от  $\Delta h$  постоянные), то разностная схема имеет  $k$ -й порядок точности (имеет место сходимость порядка  $\Delta h^k$ ) [7]. Воспользуемся нормой  $\|\lambda_{\text{точ}} - \lambda_h\| = |\lambda_{\text{точ}} - \lambda_h|$ .

Теперь для оценки порядка точности рассматриваемых схем используем метод наименьших квадратов для последовательности точек, т. е. определяем, при каких значениях параметров  $C$  и  $k$  выполняется условие минимума суммы квадратов невязок  $S = \sum_{i=1}^n (|\lambda_{\text{точ}} - \lambda_i| - C\Delta h_i^k)^2$  по всем имеющимся точкам. При этом  $\Delta h$  не будем определять каким-либо образом, а лишь предположим, что при измельчении сетки вдвое по переменным  $r$  и  $z$  (увеличением вдвое числа строк и столбцов)  $\Delta h$  также уменьшается в 2 раза.

В табл. 2 приводятся результаты расчетов тестовой задачи — значения собственного параметра  $\lambda$  и скорость сходимости  $k$ . Для сравнения представлены результаты, полученные по схемам [2] и [3], а также по схеме [3] с монотонизацией искомой функции в узлах (далее эту схему будем обозначать как схема [3]-М).

На прямоугольных пространственных сетках рассмотренные схемы эквивалентны и обладают вторым порядком точности. На неортогональных сетках схема [3] и новая схема имеют порядок точности, близкий ко второму. При этом новая схема точнее, чем классическая схема [3], и обладает по сравнению с ней более высокой скоростью сходимости. Применение модифицированной схемы [3]-М и новой схемы показывает одинаковые результаты, за исключением того, что в отличие от схемы [3]-М новая схема позволяет получить решение на очень подробной неортогональной сетке. Так как в схеме [3] и новой схеме применяется одна и та же аппроксимация в случае ячейки с тремя освещенными сторонами, а в случае двух освещенных сторон обе схемы имеют второй порядок точности, то

очевидно, что лучший результат по новой схеме достигается за счет более удачной аппроксимации ячейки с одной освещенной стороной.

Сочетание новой схемы с введением в уравнение переноса диссипативных членов [8] позволяет не только улучшить ее монотонные свойства<sup>1</sup> (известно, что схемы второго порядка точности являются немонотонными), но и несколько повысить точность решения за счет уменьшения невязки. Результаты применения такого подхода представлены в табл. 3.

Таким образом, проведенные численные исследования показывают, что в рассмотренной тестовой задаче на неортогональных сетках, состоящих из выпуклых четырехугольников, предложенная схема обеспечивает сходимость сеточного решения к точному практически со вторым порядком по пространственным переменным.

Новая схема не уступает по точности схеме [3]. При этом, как показали численные исследования, по сравнению со схемой [3] новая схема позволяет сократить время решения уравнения переноса в 1,2—1,6 раза.

Таблица 2

**Параметр  $\lambda$  и скорость сходимости  $k$**

Размер сетки	Ортогональная сетка	Неортогональная сетка			
		Схема [2]	Схема [3]	Схема [3]-М	Новая схема
$8 \times 8$	0,145265	0,124064	0,140076	0,142326	0,142380
$16 \times 16$	0,147587	0,131382	0,145972	0,146952	0,146832
$32 \times 32$	0,148165	0,137613	0,147159	0,147900	0,147919
$64 \times 64$	0,148310	0,142139	нет данных	0,148163	0,148222
$128 \times 128$	0,148346	0,144956	нет данных	нет данных	0,148313
$k$	2,01	0,63	1,65	2,03	1,95

Таблица 3

**Параметр  $\lambda$  и скорость сходимости  $k$ , полученные по новой схеме и по новой схеме с искусственной диссипацией [8]**

Размер сетки	Ортогональная сетка		Неортогональная сетка	
	Новая схема	Новая схема $AD$	Новая схема	Новая схема $AD$
$8 \times 8$	0,145265	0,1458790	0,142380	0,143082
$16 \times 16$	0,147587	0,1478680	0,146832	0,147120
$32 \times 32$	0,148165	0,1482730	0,147919	0,148024
$64 \times 64$	0,148310	0,1483450	0,148222	0,148256
$128 \times 128$	0,148346	0,1483560	0,148313	0,148323
$k$	2,01	2,36	1,95	2,07

<sup>1</sup>Среди способов построения на основе  $DS_n$ -метода разностных схем с улучшенным свойством монотонности следует отметить также подход характеристических трубок [9, 10].

Список литературы

1. *Басс Л. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А.* Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. М.: ИПМ АН СССР, 1986.
2. *Трощев В. Е., Шумилин В. А.* Разностная схема решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных четырехугольных сетках // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1986. Т. 26, № 2. С. 230—241.
3. *Шагалиев Р. М., Плетенева Н. П.* Аппроксимация двумерного уравнения переноса на четырехугольных и многоугольных пространственных сетках по разностной схеме с расширенным шаблоном // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3. С. 34—41.
4. *Москвин А. Н., Шумилин В. А.* Методика решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных многоугольных сетках // Там же. 2005. Вып. 1. С. 31—40.
5. *Шагалиев Р. М., Шумилин В. А. и др.* Математические модели и методики решения многомерных задач переноса частиц и энергии, реализованные в комплексе САТУРН-3 // Там же. 1999. Вып. 4. С. 20—26.
6. *Елесин В. А., Трощев В. А., Федянин В. И., Юдинцев В. Ф.* Численная методика и организация программы для решения многогруппового нестационарного кинетического уравнения // Комплексы программ математической физики. Новосибирск, 1972.
7. *Годунов С. К., Рябенский В. С.* Разностные схемы (введение в теорию). М.: Наука, 1973. С. 82.
8. *Гаджиев А. Д., Кондаков И. А., Писарев В. Н., Стародумов О. И., Шестаков А. А.* Метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (DDAD-схема) для численного решения уравнения переноса нейтронов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 4. С. 13—24.
9. *Трощев В. Е., Нифанова А. В., Трощев Ю. В.* Характеристический подход к аппроксимации законов сохранения в кинетических уравнениях переноса излучений // Докл. РАН. 2004. Т. 394, № 4. С. 454—458.
10. *Трощев В. Е., Нифанова А. В.* Подход характеристических трубок к анализу  $DS_n$ -метода и построение новых разностных схем на  $S_n$ -сетках // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 7. С. 24—42.

Статья поступила в редакцию 02.06.08.