

УДК 519.6

МАРКЕРЫ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ СИЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ГОДУНОВА

Н. Я. Моисеев, Т. В. Топчий, Н. Л. Фролова
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Рассмотрен подход к решению одномерных задач газовой динамики методом Годунова с выделением сильных и слабых разрывов, которые движутся по разностной сетке. Разрывы описываются маркерами, которые соответствуют разрывам типа контактных границ, ударных волн, детонационных волн.

В рамках объектно-ориентированного программирования в среде C++ создан абстрактный базовый класс "сMarker" с производными классами, которые описывают конкретные типы разрывов для расчетов практических задач.

Приведены сравнения с точными решениями результатов расчетов тестовых задач без применения и с применением маркеров.

Введение

Одной из важных проблем численного решения задач математической физики является повышение точности решений, получаемых по различным разностным схемам. Это относится особенно к течениям, в которых присутствуют сильные и слабые разрывы типа контактных границ (КГ), ударных волн (УВ), детонационных волн (ДВ) и волн разрежения (ВР). В частности, в разностных схемах Годунова [1–3], которые имеют первый порядок аппроксимации по времени и по пространству, сильные разрывы с течением времени размазываются.

Существует несколько подходов к решению этой проблемы: выделение сильных разрывов, повышение порядка аппроксимации разностных схем, применение адаптивных сеток и т. д. Каждый из подходов имеет свои достоинства и недостатки.

Так, в разностных схемах, построенных на основе метода Годунова, имеется возможность явного выделения сильных разрывов типа УВ и ДВ [2, 3]. Выделенный разрыв является границей счетной области. Разностная сетка в области движется за выделенным разрывом. Течение в области будет гладким. Поэтому точность расчетов повышается. Но поскольку разностная сетка в области строится за разрывом, создаются трудности в проведении расчетов многомерных задач с криволинейными границами.

Для выделения сильных разрывов типа КГ широко применяется метод маркеров [4–6]. Основное преимущество метода маркеров — это введение единой сетки во всей расчетной области и представление КГ между двумя различными веществами в виде маркеров, перемещающихся по сетке. Построение сетки в области в этом случае не связано с движением КГ. Подходы к расчетам задач с выделением фронтов УВ и ДВ, которые движутся по разностной сетке, успешно применяются в [7, 8].

В данной работе рассматривается обобщение понятия маркера к выделению разрывов типа УВ, ДВ, а не только к выделению КГ. Параметры для движения каждого типа маркера определяются единообразно на основе метода Годунова из решения соответствующей задачи о распаде произвольного разрыва. В ячейках между маркерами счет идет по обычным схемам.

Для решения одномерных задач газовой динамики исходные дифференциальные уравнения законов сохранения массы, импульса и полной энергии записаны в дивергентной форме в переменных Эйлера или Лагранжа. Систему уравнений дополняет уравнение состояния.

Подход к счету задач с применением маркеров типа УВ, ДВ и КГ реализован в программе [9], которая написана с использованием технологии объектно-ориентированного программирования в среде C++. Созданы абстрактный

базовый класс "сMarker" и производные от него классы для описания соответствующих сильных и слабых разрывов.

Приведены сравнения с точными решениями результатов расчетов тестовых задач без применения и с применением маркеров для выделения сильных разрывов типа УВ, ДВ, КГ.

Маркеры для выделения разрывов

Рассмотрим подход к выделению разрывов типа УВ, ДВ на основе метода маркеров при счете одномерных задач газовой динамики методом Годунова. Подход состоит в том, что эти разрывы представляются единообразно с помощью маркеров, подобно тому как описываются разрывы типа КГ.

Каждому маркеру присваивается тип разрыва, в соответствии с которым рассчитывается его движение из решения задачи о распаде произвольного разрыва по состояниям среды (сред) слева и справа от разрыва (маркера). Эти состояния сред хранятся в данных, описывающих маркер.

Маркеры устанавливаются перед счетом задач и могут располагаться как внутри, так и на границах счетной области. На границах области может быть установлено несколько маркеров типа УВ. Подключение каждого маркера к счету производится последовательно, в момент выхода очередной УВ на эту границу. После выхода маркеров типа УВ, ДВ на КГ дальнейший расчет зависит от реализовавшейся ситуации на границе. Если формируется отраженная УВ, то расчет можно по желанию продолжить с выделением этой УВ либо без выделения фронта УВ. Если маркеры не установлены, то счет идет без выделения сильных разрывов.

В программной реализации введен абстрактный базовый класс для описания маркеров. Этот класс содержит набор данных и методов, общих для всех типов маркеров:

- номер маркера;
- тип маркера (КГ, УВ, ДВ, ОТКОЛ*, ВР, ...);
- состояние среды слева от маркера: u, ρ, E, P , уравнение состояния (УРС);
- состояние среды справа от маркера: u, ρ, E, P , УРС;

*Маркеры типа ОТКОЛ — это маркеры для моделирования образования трещины при разрушении твердых тел [10].

- пространственная координата маркера;
- *большие* величины для маркера — $U^*, P^*, \rho^*, E^*, \dots$;
- ссылка на область, которой принадлежит маркер;
- номер ячейки, в которой находится маркер.

К общим функциям можно отнести расчет движения маркера по сетке, а к индивидуальным — расчет параметров каждого маркера в зависимости от его типа.

Для описания конкретного разрыва создаются производные классы: класс "КГ", класс "УВ", класс "ДВ". Такой подход позволяет легко вводить в программу новые типы маркеров. Методы решения задачи о распаде разрыва для каждого типа маркера содержатся в производных классах.

На рис. 1 представлена одна из конфигураций, возникающих при решении задачи о распаде разрыва. Она содержит контактный разрыв (КР), отмеченный штриховой линией, УВ и ВР. Большие величины для маркера назначаются, исходя из решения этой задачи. Так, для маркера типа КГ давление P^* и скорость U^* берутся с КР, а для маркера типа УВ необходимо рассчитать величины $D^*, U^*, P^*, \rho^*, E^*$. Маркер такого типа движется со скоростью УВ, равной D^* . При этом он может начинать движение от границы области или находиться внутри области.

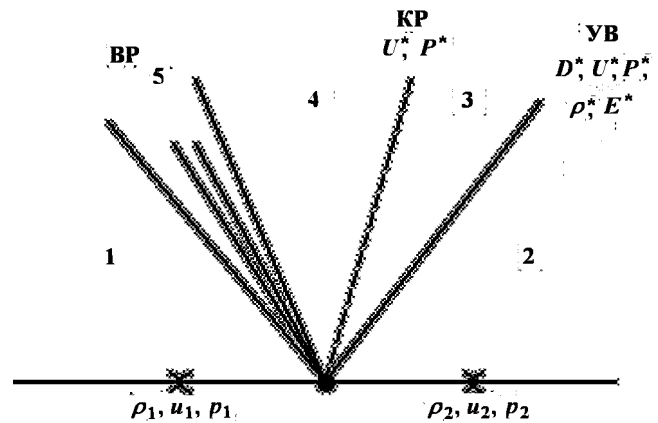


Рис. 1. Одна из конфигураций при решении задачи о распаде разрыва

Особенности расчета состояния в области с маркером

Расчет области с маркерами имеет свои особенности: в области имеются ячейки с маркером и без маркера. При расчете ячеек с маркером мо-

жет возникнуть одна из двух ситуаций при переходе на следующий временной слой:

- 1) маркер остается в ячейке (рис. 2);
- 2) маркер переходит в соседнюю ячейку (рис. 3).

В первом случае ячейка j разбивается на две подячейки, границей между которыми является маркер. Состояния в этих ячейках хранятся в данных маркера. Изменение состояния в ячейках рассчитывается так же, как и в простых ячейках без маркеров.

В случае перехода маркера из ячейки j через правую границу в ячейку $j+1$ (см. рис. 3) расчет ячеек j и $j+1$ сводится к расчету двух вспомогательных ячеек, граница между которыми совпадает с положением маркера. Маркер играет роль узла сетки. Например, на нижнем временном слое левая ячейка — это часть j -й ячейки слева от маркера, правая ячейка — это ячейка, составленная из правой от маркера части ячейки j и целой ячейки $j+1$. При расчете ячейки j величины на нижнем временном слое берутся из состояния слева от маркера. Новые величины на верхнем временном слое записываются в ячейку j и в новое состояние слева от маркера. При расчете ячейки $j+1$ величины на нижнем временном слое находятся как усредненные величины справа от маркера в ячейке j и величин в ячейке $j+1$. Новые величины в правой части ячейки $j+1$ на верхнем временном слое записываются в новое состояние справа от маркера.

Здесь следует сделать замечание. Если точно отслеживать переход маркеров из одной ячейки в другую, то алгоритм расчета движения маркеров сильно усложняется. В этом случае маркеры надо выводить точно на границу двух ячеек, что ведет к существенному уменьшению шага интегрирования по времени, а вместе с тем к увеличению астрономического времени счета. Учитывая эти факторы, авторы остановились на упрощенном алгоритме движения маркеров из одной ячейки в другую. Очевидно, что в этом случае время счета области с маркером по сравнению со временем счета без маркера увеличивается незначительно.

Если в ячейке находятся два маркера, которые движутся навстречу друг другу, то для описания взаимодействия этих маркеров шаг интегрирования выбирается так, чтобы вывести маркеры в одну и ту же точку. После этого маркеры продолжают свое движение в соответствии с новыми состояниями в средах.

Результаты расчетов тестовых задач

Задача Сода. Рассмотрим расчет задачи Сода [11]. Начальные данные: в области 1 ($x = [0; 0,5]$) $\rho_1 = 1, p_1 = 1, u_1 = 0$; в области 2 ($x = [0,5; 1]$) $\rho_2 = 0,125, p_2 = 0,1, u_2 = 0$. Здесь ρ, p, u — плотность, давление и скорость соответственно. УРС — для идеального газа с $\gamma = 1,4$.

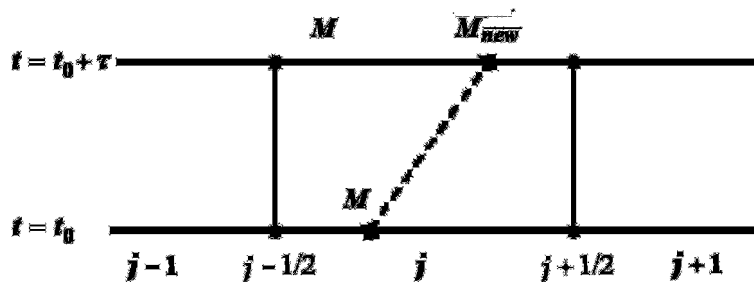


Рис. 2. Маркер остается в ячейке j при переходе на следующий временной слой

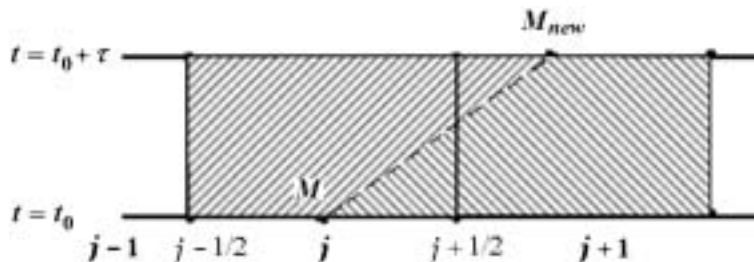


Рис. 3. Переход маркера из ячейки j в ячейку $j+1$ через правое ребро

Граничные условия: на внешних границах задана скорость $u = 0$ (*жесткая стенка*).

Маркер установлен в точке $x_m = 0,5$. Расчет проводился на неподвижной эйлеровой сетке.

На рис. 4 приведены зависимости плотности, а на рис. 5 — скорости и давления от координаты x в точном решении, в расчетах методом Годунова без маркеров и с маркерами типа КГ и УВ.

Из графиков видно, что при расчете по схеме Годунова КР и УВ с течением времени сильно размываются. В расчетах с применением марке-

ров эти разрывы не размазаны и их положение согласуется с точным решением.

Следует отметить, что маркеры типа УВ достаточно хорошо передают фронт УВ. Однако в окрестности маркера типа КГ видна погрешность в расчете плотности, которая существенно меньше, чем в расчете по схеме Годунова.

Задача с отраженной от жесткой стенки УВ. Задан плоский слой газа в области $x = [0, 8]$ с начальными плотностью $\rho_1 = 0,125$, давлением $p_1 = 0,1$, скоростью $u_1 = 0$. Граничные условия: на левой границе задано постоянное по времени давление $p = 2$, на правой — скорость $u = 0$ (*жесткая стенка*). УРС — для идеального газа с $\gamma = 1,4$.

Расчет проводился на подвижной эйлеровой сетке. Маркер типа УВ установлен в окрестности левой границы, $x_m = 0,05$. Состояния газа слева и справа от маркера совпадают с состоянием в области.

Постоянное давление, заданное на левой границе, формирует УВ, которая доходит до правой границы и отражается как УВ.

На рис. 6, 7 представлены графики зависимостей плотности и давления от координаты x в расчетах без маркера и с маркером типа УВ.

В этой задаче из графиков плотности видно, что при расчетах без маркера имеются энтропийные следы в окрестности границ. В расчетах с маркером энтропийные следы отсутствуют на левой границе и существенно меньше, чем в рас-

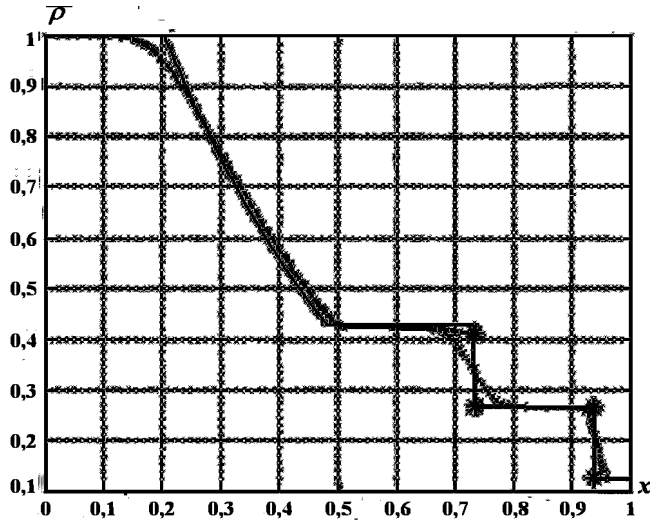


Рис. 4. Зависимости плотности от x : \dots — расчет по схеме Годунова без маркеров; $-----$ — расчет по схеме Годунова с маркерами типа КГ и УВ (* — маркеры); $—$ — точное решение

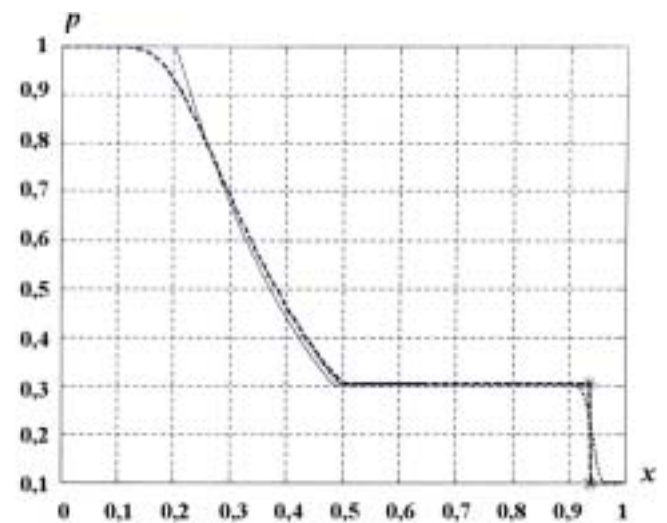
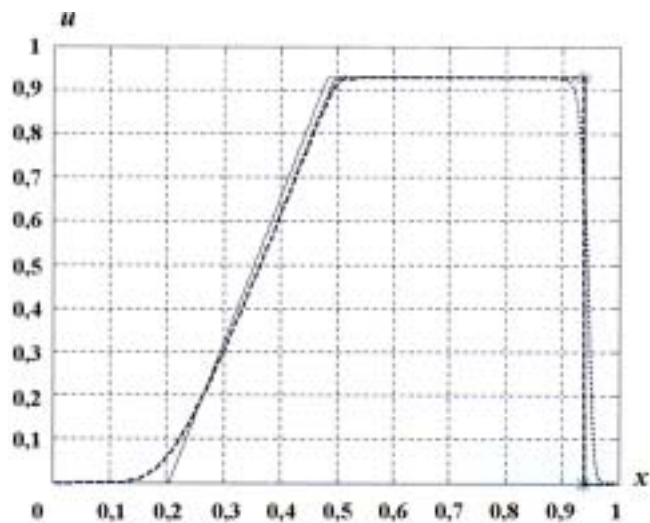


Рис. 5. Зависимости скорости (слева) и давления (справа) от x : \dots — расчет по схеме Годунова без маркеров; $-----$ — расчет по схеме Годунова с маркерами (* — маркеры); $—$ — точное решение

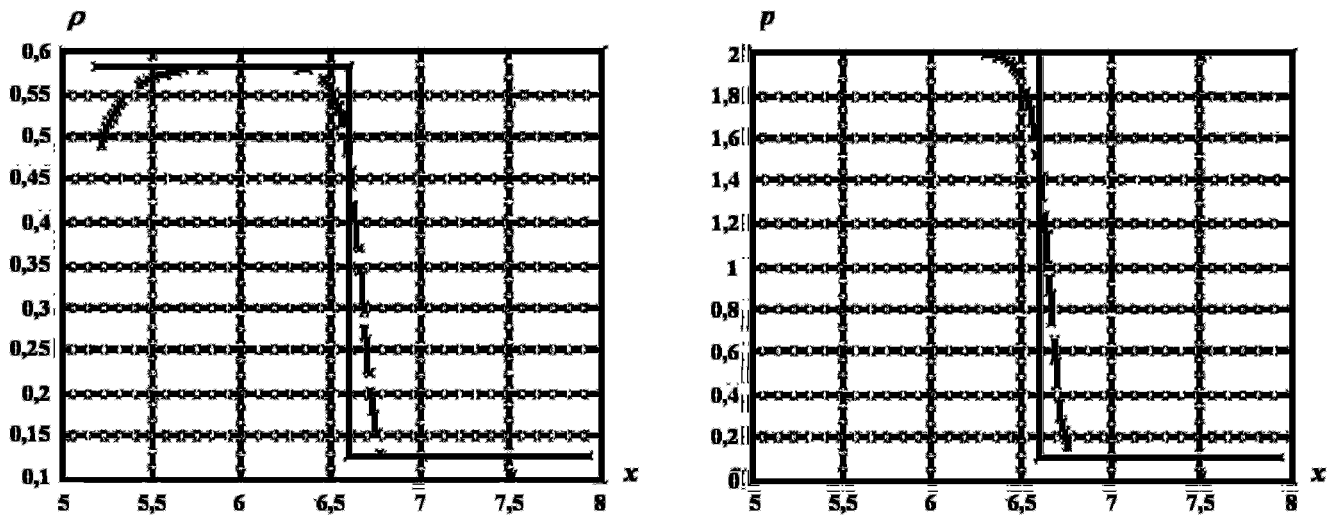


Рис. 6. Расчетные зависимости плотности (слева) и давления (справа) от x до отражения УВ: — — с маркером типа УВ; - - - без маркера

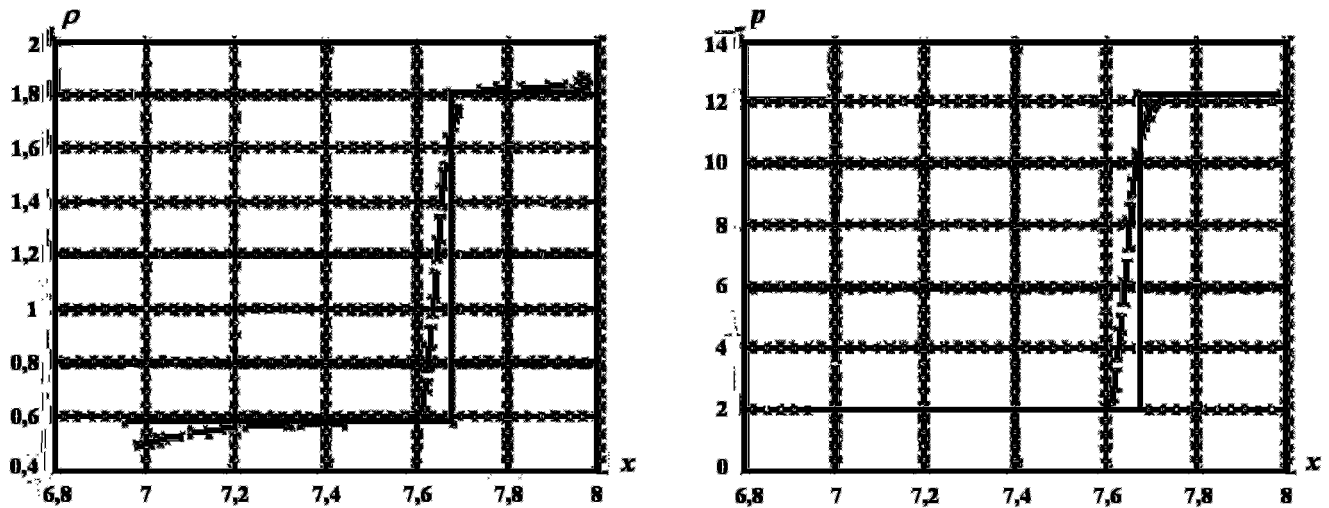


Рис. 7. Расчетные зависимости плотности (слева) и давления (справа) от x после отражения УВ: — — с маркером типа УВ; - - - без маркера

четах без маркера, на правой границе в отраженной УВ.

Задача Седова о сильном взрыве. Задача Седова о сферически-симметричном сильном взрыве взята из работы [12]. Начальные данные: в области 1 ($x = [0; 0,1]$) $\rho_1 = 1$, $\varepsilon_1 = 10^7$, $u_1 = 0$; в области 2 ($x = [0,1; 20]$) $\rho_2 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$, $u_2 = 0$. УРС — для идеального газа с $\gamma = 1,4$. Граничные условия: на внешних границах задана скорость $u = 0$ (жесткая стенка).

Расчет проводился на неподвижной эйлеровой сетке с применением маркера типа УВ. Маркер был установлен в точке $r_m = 0,1$. Состояния слева и справа от маркера совпадают с состояниями в областях 1 и 2 соответственно.

На рис. 8 приведены зависимости распределения величин на момент времени $t = 3,0$ для различного числа счетных точек. Графики представлены в безразмерных величинах, полученных как отношения истинных величин к величинам на фронте УВ.

Из графиков на рис. 8 следует, что в расчетах без маркера значения величин в окрестности фронта УВ сильно занижены. При малом количестве точек наблюдается также сильное размазывание. Применение маркера устраняет размазывание фронта УВ и существенно повышает точность численного решения даже при малом количестве точек в области: на фронте УВ достигаются максимальные значения, в то время как в расчетах без маркера они не достигаются.

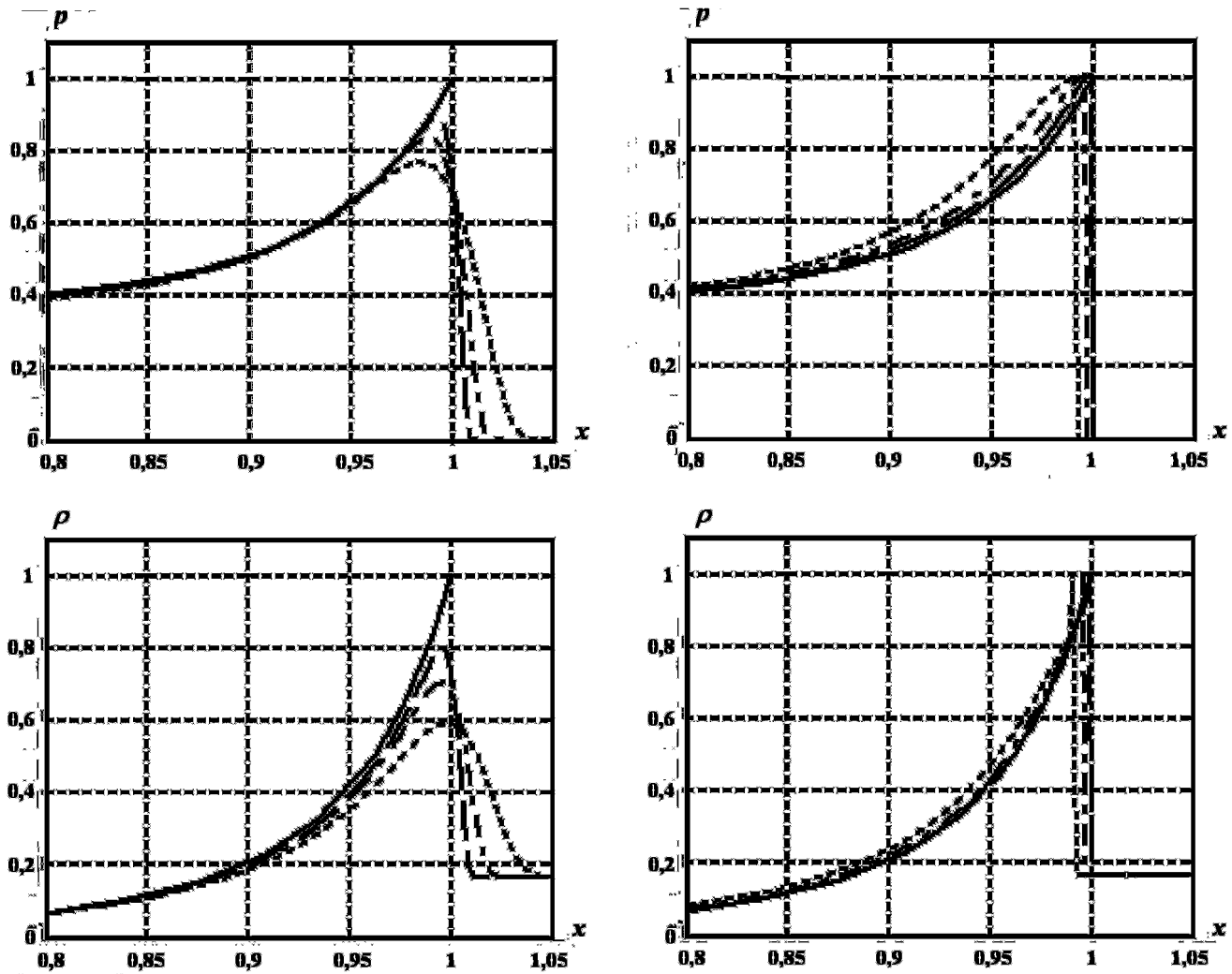


Рис. 8. Зависимости давления и плотности от x в расчетах без маркера (слева) и с маркером (справа): --- — 200 точек; - · - · — 400 точек; - - - - 800 точек; — — точное решение

Задача Вудварда—Колеллы о столкновении двух УВ. Задача Вудварда—Колеллы [13] известна также под названием "Blast Waves". Начальные данные: в области 1 ($x = [0; 0,1]$) $\rho_1 = 1$, $p_1 = 1000$, $u_1 = 0$; в области 2 ($x = [0,1; 0,9]$) $\rho_2 = 1$, $p_2 = 0,01$, $u_2 = 0$; в области 3 ($x = [0,9; 1]$) $\rho_3 = 1$, $p_3 = 100$, $u_3 = 0$. УРС — для идеального газа с $\gamma = 1,4$. Граничные условия: на внешних границах задана скорость $u = 0$ (жесткая стенка).

Задача считалась на эйлеровой сетке с применением маркеров для выделения КГ и фронтов УВ. После столкновения УВ маркеры оставались в счете и продолжали двигаться, как отраженные УВ. За точное принято решение, полученное по программе ВОЛНА [7] с выделением сильных и слабых разрывов на лагранжевой сетке с 16 000 точек.

Задача также считалась на лагранжевой сетке с применением маркеров для выделения фронтов УВ. Маркеры перемещались по сетке со скоростью движения фронтов УВ.

На рис. 9 представлены результаты расчета задачи с числом счетных точек 1000.

Из представленных графиков следует, что результаты расчетов на лагранжевой сетке хорошо согласуются с точным решением как в расчетах без маркеров, так и в расчетах с применением маркеров. Наибольшая точность достигается в расчетах по схеме с применением маркеров и антидиффузии для метода Годунова [14]. На эйлеровой сетке результаты расчетов с применением маркеров лучше согласуются с точным решением, чем результаты расчетов без маркеров.

На рис. 10, 11 приведены графики зависимости ошибки плотности от шага сетки. Результа-

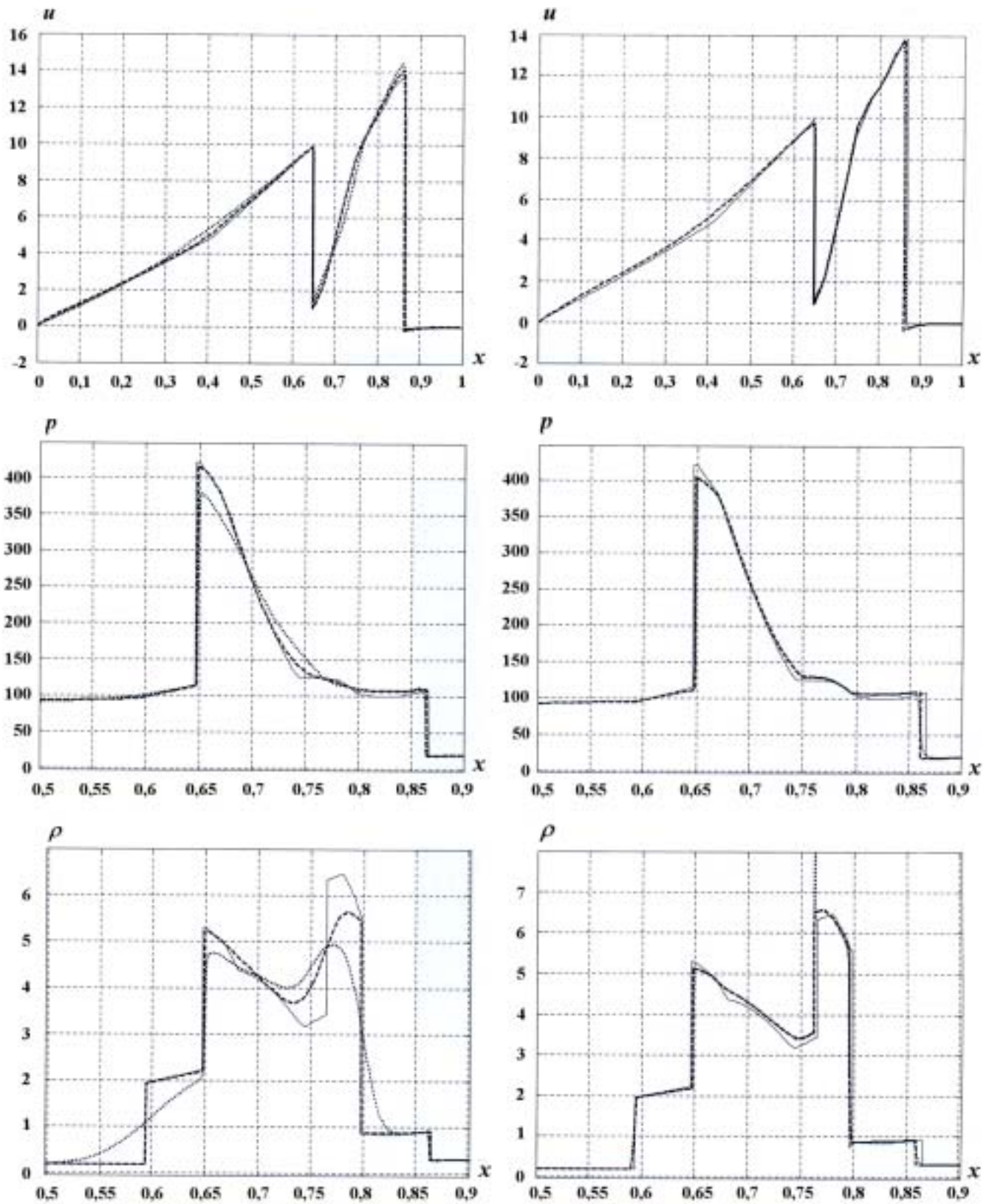


Рис. 9. Зависимости скорости, давления и плотности от x в расчетах на эйлеровой (слева) и лагранжевой (справа) сетках: \cdots — расчет по схеме Годунова; $---$ — расчет по схеме Годунова с маркерами; $—$ — точное решение

ты по схемам Мак-Кормака, MUSCL и PPMLR взяты из [13].

Ошибка вычислялась по стандартной формуле

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |\bar{\rho}_j - \rho_j|.$$

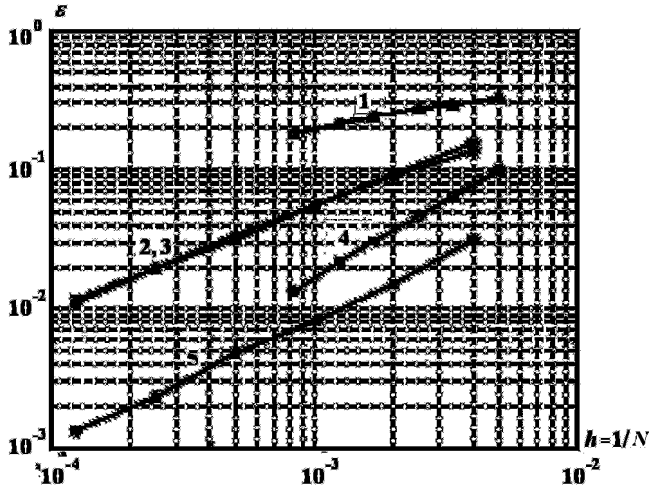


Рис. 10. Зависимости относительной ошибки плотности в расчетах задачи "Blast Waves": 1 — схема Годунова, эйлерова сетка; 2, 3 — схема Годунова без маркеров и с маркерами УВ, лагранжева сетка; 4 — схема PPMLR, лагранжева сетка; 5 — схема Годунова с маркерами УВ и антидиффузией, лагранжева сетка

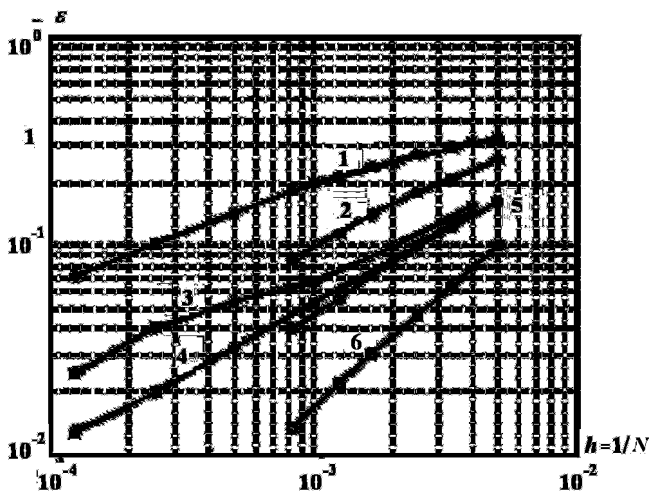


Рис. 11. Зависимости относительной ошибки плотности в расчетах задачи "Blast Waves" на эйлеровой сетке: 1 — схема Годунова; 2 — схема Мак-Кормака; 3 — схема Годунова с маркерами КГ и УВ; 4 — схема Годунова с маркерами КГ, УВ и антидиффузией; 5 — схема MUSCL; 6 — схема PPMLR, лагранжева сетка

Здесь $\bar{\rho}_j$, ρ_j — точные и численные значения плотности соответственно.

Маркеры для выделения фронтов ДВ

Рассмотрим применение маркеров к выделению фронтов ДВ. Пусть в области $[0, 1]$ задано взрывчатое вещество (ВВ) и детонация ВВ идет от левой границы.

Развитие детонации можно рассчитать по технологии из работ [2, 3]. На интервале $[0; 0,2]$ строится счетная область, у которой правая граница объявляется выделенным фронтом ДВ. Считается, что в области находятся продукты взрыва (ПВ) с начальным состоянием $\rho = \rho_0$, $E = E_0$, $u = 0$. Выделенный фронт ДВ движется по постоянному фону. Сетка в области "тянется" за фронтом ДВ. В процессе движения ВВ поступает в область ПВ через фронт ДВ. Расчет детонации по такой технологии будем называть расчетом с явным выделением фронта ДВ.

Технология расчета детонации с применением маркера ДВ состоит в следующем. Строим основную счетную область, которая соответствует геометрии ВВ. В этой области строим разностную сетку. Выделяем часть ячеек, расположенных левее точки $x = 0,2$. Считаем, что в этих ячейках находятся ПВ с начальным состоянием $\rho = \rho_0$, $E = E_0$, $u = 0$. Устанавливаем маркер ДВ в точке $x = 0,2$ и задаем начальные данные для маркера слева и справа: состояние слева — это ПВ, справа — фон. В такой технологии выделенный фронт ДВ движется по разностной сетке.

Результаты расчетов детонации по обеим технологиям приведены на рис. 12. Видно, что результаты расчетов согласуются между собой. Однако в окрестности фронта ДВ имеются различия. Эти различия связаны с тем, что маркер движется по неподвижной сетке, ячейки которой по размерам существенно больше, чем ячейки в расчетах с явным выделением фронта ДВ. В окрестности фронта ДВ профили величин крутые, и для адекватного описания таких профилей нужна подробная разностная сетка. Это условие выполняется в расчетах с явным выделением фронта: все точки заданы в части области между левой границей и выделенным фронтом. В расчетах с маркером левая ячейка за маркером постоянно изменяется, что ведет к нарушению гладкости сетки и может служить дополнительным источником ошибок аппроксимации.

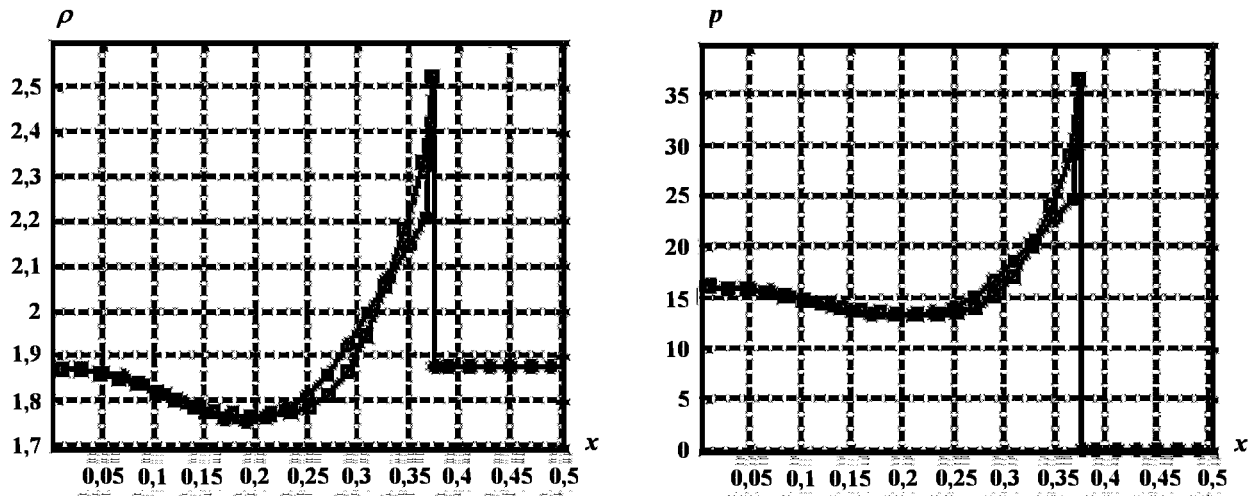


Рис. 12. Расчетные зависимости плотности и давления от x : $-\square-$ — с явным выделением фронта ДВ; $-o-$ — с маркером типа ДВ

Маркерная зона для повышения точности расчетов

Маркерная зона. Для повышения точности расчетов в окрестности фронта ДВ в области больших градиентов и устранения отмеченной выше погрешности вводится дополнительная счетная область (зона), условно называемая маркерной, с более мелкой сеткой, которая движется по сетке основной области. На рис. 13 представлена схема описания маркерной зоны в области.

Положение зоны в рассчитываемой области задается с помощью двух ограничивающих ее маркеров. Для реализации расчета области с маркерной зоной начальные данные необходимо задать следующим образом:

1. Описывается основная газодинамическая область с детонацией. Сетка и другие данные для области задаются стандартным образом. Дополнительно в области необходимо задать два маркера (ДВ и эйлерова ти-

па). В их описании необходимо указать, что они являются границами маркерной зоны.

2. Маркерная зона описывается как отдельная область со своей сеткой, границы которой в процессе счета всегда совпадают с положением соответствующих маркеров, которые движутся по сетке в основной области.

Особенности расчета областей. Перед расчетом состояния областей на каждом шаге счета задачи производится расчет движения маркеров и границ. Большие величины для границ маркерной зоны берутся из рассчитанных больших величин для левого и правого маркера. Дальнейший расчет маркерной зоны производится так же, как расчет обычной области.

Расчет основной области имеет следующие особенности:

- для маркера, который является левой границей маркерной зоны, рассчитывается только левое состояние;

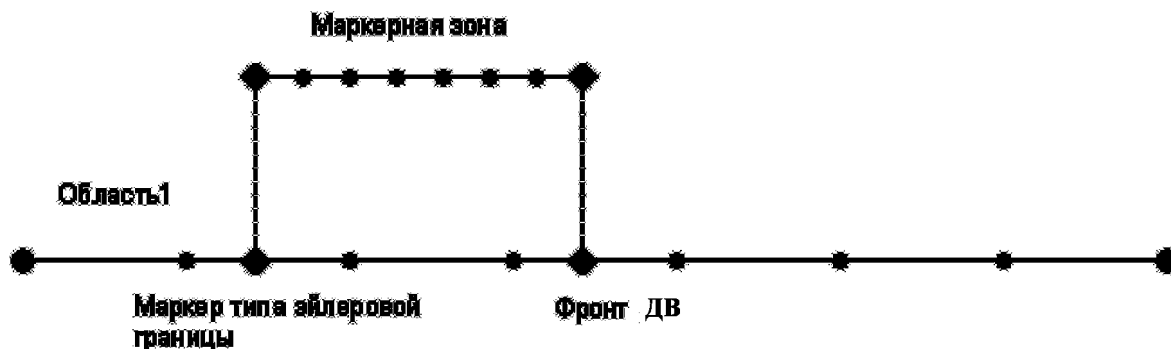


Рис. 13. Схема описания маркерной зоны в области

- для маркера, который является правой границей маркерной зоны, рассчитывается только правое состояние;
- ячейки в основной области между этими двумя маркерами не рассчитываются.

После расчета областей правое состояние левого маркера необходимо взять из первой ячейки маркерной зоны, а левое состояние правого маркера — из последней ячейки.

Подвижная эйлерова граница движется с заданной скоростью фронта ДВ, при этом ширина маркерной зоны остается постоянной. ПВ перетекают из маркерной зоны в ячейки основной области через левую эйлерову границу.

На рис. 14 приведены результаты расчетов с маркером ДВ и с маркерной зоной.

На рис. 15 приведено сравнение результатов расчетов с явным выделением фронта ДВ и с использованием маркерной зоны.

На рис. 16 приведены зависимости давления и плотности для различного числа точек в расчетах с маркером ДВ и с маркерной зоной.

Из графиков видно, что результаты, полученные в расчетах по различным технологиям, согласуются между собой. Применение маркера ДВ позволяет рассчитывать положение фронта ДВ без размазывания, но в окрестности фронта точность решения зависит от количества точек в области. Применение маркерной зоны позволяет значительно повысить точность численного решения в окрестности фронта ДВ при незначительном увеличении количества точек и существенно упростить технологию счета. В расчетах

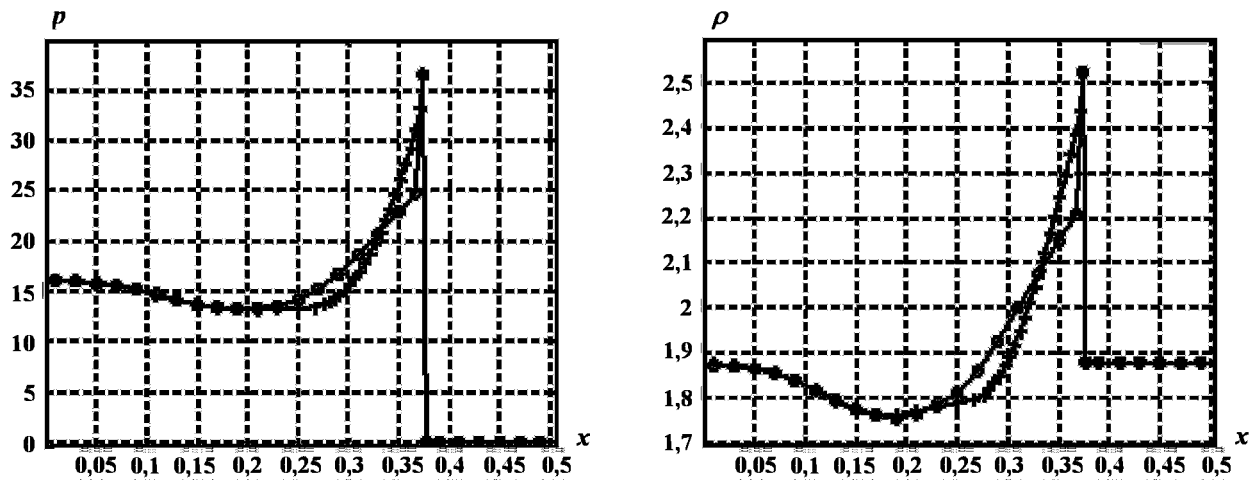


Рис. 14. Расчетные зависимости давления и плотности от координаты x : $-o-$ — с маркером, 50 точек; $+--$ — с маркерной зоной, 50 точек, зона — 20 точек

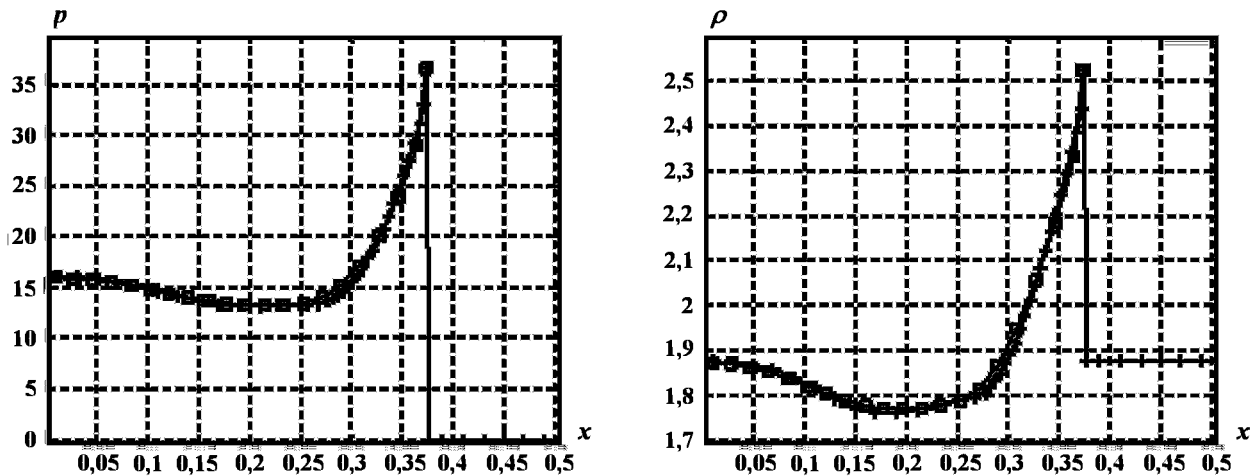


Рис. 15. Расчетные зависимости давления и плотности от координаты r : $-□-$ — с явным выделением фронта ДВ; $+--$ — с маркерной зоной

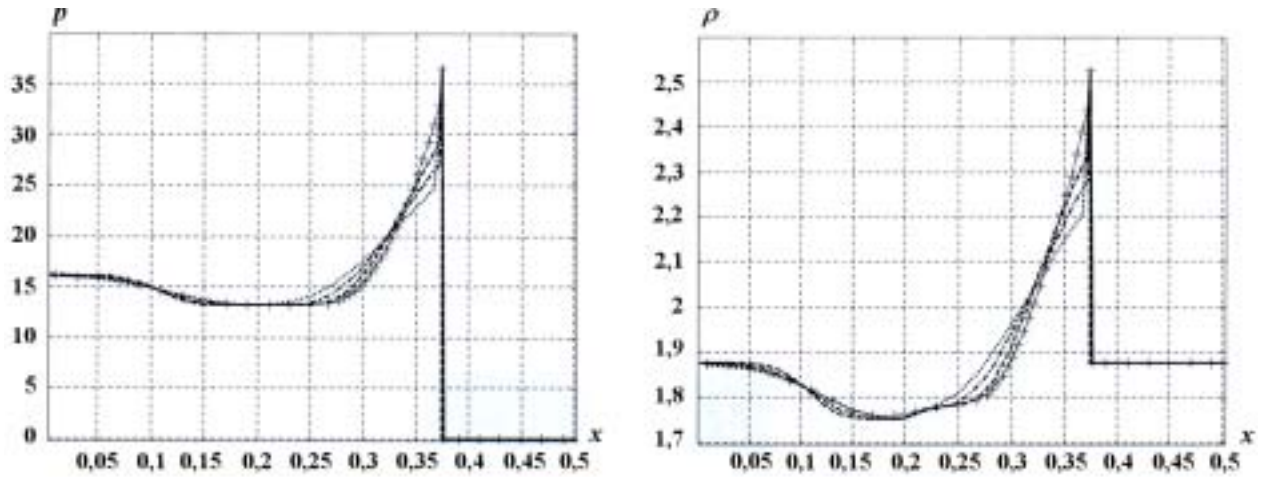


Рис. 16. Расчетные зависимости давления и плотности от координаты x : $-\cdot-\cdot-$ с маркером, 100 точек; $---$ с маркером, 200 точек; \cdots — с маркером, 50 точек; $+-$ — с маркерной зоной, 50 точек, зона — 20 точек

с явным выделением фронта ДВ в ограниченной части области необходимо сразу задавать большое количество точек в зависимости от размеров основной области. Точность расчетов с применением маркерной зоны согласуется с точностью расчетов с явным выделением фронта ДВ. Однако общее число точек в основной и маркерной областях может быть существенно меньшим, чем в расчетах без применения маркерной зоны. В маркерной зоне можно задавать произвольное число точек.

Моделирование зоны горения в областях с кинетикой детонации

Анализ полученных результатов показал возможность применения маркеров к расчетам детонации с кинетикой горения. Для примене-

ния маркеров к расчету таких областей, помимо основных газодинамических величин u , p , ρ , E , определяющих состояние среды слева и справа от маркера, необходимы дополнительные переменные, такие как концентрация ВВ, время начала горения в ячейке и др. Создан новый тип маркера для выделения фронта горения в областях с кинетикой детонации.

Возможность применения маркеров к расчетам детонации с кинетикой горения проверялась на следующей модельной задаче: задана область с ВВ, на левой границе области задано постоянное давление.

На рис. 17 представлены результаты расчетов области с кинетикой горения без маркера и с маркером для выделения фронта горения. Модель горения взята из [15].

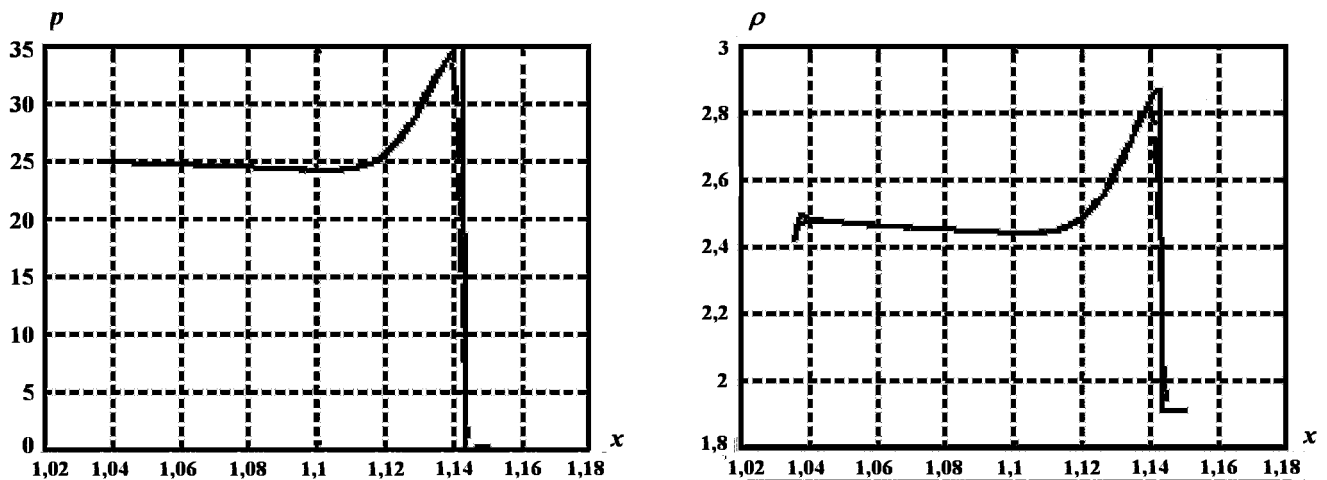


Рис. 17. Расчетные зависимости давления и плотности от координаты x : $---$ без маркера; $---$ с выделенным фронтом горения

Из графиков видно, что применение маркера позволяет проводить расчеты без размазывания пика на фронте горения.

Заключение

Рассмотрен подход к расчету задач с выделением сильных разрывов маркерами, которые движутся по разностной сетке. Подход естественно вписывается в схему Годунова и позволяет повысить точность численного решения при наличии сильных разрывов в течениях без существенного увеличения машинного времени счета: оно сравнимо со временем счета по схеме Годунова.

Список литературы

1. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. Т. 47, № 3. С. 271—306.
2. Алалыкин Г. Б., Годунов С. К., Киреева И. Л. и др. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М.: Наука, 1970.
3. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение задач многомерной газовой динамики. М.: Наука, 1976.
4. Welch J. E., Harlow F. H., Daly B. J. The MAC Method // Los Alamos Scientific Laboratory Report, LA-3425, 1965.
5. Николс Б. Дальнейшее развитие метода маркеров и ячеек для течений несжимаемой жидкости // Численные методы в механике жидкостей. М.: Мир, 1973. С. 165—173.
6. Меньшов И. С. Метод свободной контактной границы для расчета двумерных нестационарных течений неоднородных сред: Препринт № 144. М.: ИПМ АН СССР, 1986.
7. Куропатенко В. Ф., Коваленко Г. В., Кузнецов В. И., Михайлова Г. И., Потапкин В. К., Сапожникова Г. Н. Комплекс программ "Волна" и неоднородный разностный метод для расчета неустановившихся движений сжимаемых сплошных сред. Часть 1. Неоднородный разностный метод // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 2. С. 9—18.
8. Бахрах С. М., Воронина Е. Б., Устинова Е. В., Шавердов С. А. Алгоритм расчета распространения фронта послыонного горения, основанный на принципе Гюйгенса // Там же. 1998. Вып. 1. С. 59—65.
9. Березина Н. А., Кутепова С. Г., Пчелинцева С. В., Кольчугин С. В., Моисеев Н. Я., Силантьева И. Ю. Объектно-ориентированный пакет ГНОМ для решения задач газовой динамики в пространствах 1D, 2D, 3D модифицированным методом Годунова // Вычислительная механика и современные прикладные программные системы. X Юбилейная междунар. конф. Переславль-Залесский, 7—12 июня 1999 г. Тез. докл.
10. Колмогоров В. Л., Макотра О. А., Моисеев Н. Я. Математическая модель для численного решения нестационарных задач механики твердого тела модифицированным методом Годунова // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 1 (263). С. 66—72.
11. Sod G. A. A survey of several finite difference methods for systems of non-linear hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. 1978. Vol. 27. P. 1—31.
12. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972.
13. Colella Ph., Woodward P. R. The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations // J. Comp. Phys. 1984. Vol. 54. No. 1. P. 174—201.
14. Моисеев Н. Я., Силантьева И. Ю. Разностные схемы произвольного порядка аппроксимации для решения линейных уравнений переноса с постоянными коэффициентами методом Годунова с антидиффузией // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2008. Т. 48, № 6. С. 1—9.
15. Аминов Ю. А., Вершинин Ф. В., Еськов Н. С. и др. Исследование ударно-волновой чувствительности пластифицированного ВВ на основе ТАТБ // ФГВ. 1995. Т. 31, № 1. С. 103—108.

Статья поступила в редакцию 10.06.08.