

УДК 519.63

## ПРАКТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СЧЕТА ТЕПЛОВЫХ ВОЛН В НЕЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ

Ю. А. Бондаренко, А. А. Горбунов  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Для уравнения квазилинейной диффузии рассматриваются неявные разностные схемы с явным коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры, а также схемы с однократным уточнением коэффициента теплопроводности. Получены условия устойчивости таких разностных схем. Приводятся результаты двумерных расчетов тепловых волн на нерегулярных сетках, которые показывают, что использование явного (только с однократным уточнением) коэффициента теплопроводности с автоматическим выбором шага по времени при сравнимой точности экономичнее, чем при использовании простых итераций по нелинейности неявного коэффициента теплопроводности. Счет без ограничения на величину шага по времени может приводить к значительным погрешностям.

### Введение

Рассматриваем уравнение квазилинейной диффузии

$$\frac{\partial E(U)}{\partial t} = -\operatorname{div} q, \quad q = -\varkappa(U) \operatorname{grad} U$$

с естественными ограничениями  $\frac{dE}{dU} > 0$  и  $\frac{d\varkappa}{dU} > 0$  для  $U > 0$ ,  $E(0) = 0$ ,  $\varkappa(0) = 0$ , интеграл  $\int \frac{\varkappa(U)}{E(U)} dU$  сходится в нуле, при выполнении которых возможны решения типа тепловых волн с конечной скоростью движения фронта. Способы численного решения таких задач рассматривались, например, в работах [1–5].

В большинстве известных авторам работ обсуждаются разные теоретические вопросы для неявных разностных схем с неявным коэффициентом теплопроводности:

$$\frac{E(U^{n+1}) - E(U^n)}{\Delta t} = -\operatorname{DIV} q^{n+1}, \quad q^{n+1} = -\varkappa(U^{n+1}) \operatorname{GRAD} U^{n+1}. \quad (1)$$

Большое внимание уделяется вопросам разрешимости системы неявных уравнений с учетом нелинейности и сходимости итерационных методов решения таких систем.

На практике нередко используются неявные разностные схемы с явным коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры:

$$\frac{E(U^{n+1}) - E(U^n)}{\Delta t} = -\operatorname{DIV} q^{n+1}, \quad q^{n+1} = -\varkappa(U^n) \operatorname{GRAD} U^{n+1}. \quad (2)$$

По очевидным причинам такие схемы намного экономичнее разностных схем с неявным коэффициентом теплопроводности, но при их использовании требуется ограничивать величину шага по времени, чтобы за один шаг тепловая волна проходила не больше некоторой доли ячейки сетки.

В работе излагаются результаты исследования устойчивости таких разностных схем, которые иллюстрируются результатами численных экспериментов, моделирующих распространение тепловых волн. Показано, что условие устойчивости дает ограничение на величину шага по времени, обеспечивающее разумную точность счета.

### Получение условий устойчивости с учетом явной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры

В результате линеаризации (подстановки в (2)  $U = U_0 + \delta u$ ,  $|\delta u| \ll U_0$ , с отбрасыванием квадратичных слагаемых) для малых возмущений  $\delta u$  невозмущенного разностного решения  $U_0$  получается линейное разностное уравнение

$$\frac{C^{n+1}\delta u^{n+1} - C^n\delta u^n}{\Delta t} = \text{DIV} \left( \varkappa(U_0^n) \text{GRAD} \delta u^{n+1} - \left( \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \varkappa}{\partial U} q^{n+1} \right) S \delta u^n \right), \quad C^n = \frac{\partial E(U_0^n)}{\partial U_0^n},$$

где  $S$  — линейный разностный оператор, осуществляющий усреднение на стороны ячеек возмущений температуры, определенных в центрах ячеек сетки. После "замораживания" по времени и по пространству коэффициентов этой разностной схемы в одномерном плоском случае на равномерной сетке схема принимает вид

$$\left( \delta u_{j+1/2}^{n+1} - \delta u_{j+1/2}^n \right) + \frac{\sigma}{2} K_{\alpha\beta} \left( \delta u_{j+3/2}^n - \delta u_{j-1/2}^n \right) = K_0 \left( \delta u_{j+3/2}^{n+1} - 2\delta u_{j+1/2}^{n+1} + \delta u_{j-1/2}^{n+1} \right), \quad (3)$$

где  $K_0 = \frac{\Delta t \varkappa}{\Delta x^2 C}$  — обычное число Куранта для теплопроводности;  $K_{\alpha\beta} = K_{TV} \frac{\alpha}{\beta}$ ,  $K_{TV} = \frac{\Delta t |q|}{\Delta x E}$  — число Куранта переноса тепла ( $W = q/E$  — скорость "движения" тепла),  $\alpha = \frac{U}{\varkappa} \frac{\partial \varkappa}{\partial U}$  и  $\beta = \frac{U}{E} \frac{\partial E}{\partial U}$  — положительные показатели нелинейной зависимости коэффициента теплопроводности и внутренней энергии от температуры,  $\Delta x$  — размер ячеек сетки;  $\sigma = q/|q| = \pm 1$  — знак направления потока тепла.

Ищем решение уравнения (3), как обычно делается в методе Фурье—Неймана, в виде  $\delta u_{j+1/2}^n = \delta u_0 \lambda^n e^{ij\omega}$  и получаем

$$\lambda = \frac{1 - \sigma i K_{\alpha\beta} \sin \omega}{1 + 2K_0 (1 - \cos \omega)}.$$

Отсюда условие устойчивости малых возмущений  $|\lambda| \leq 1, \forall \omega$ , легко сводится к неравенству

$$(K_{\alpha\beta})^2 \leq 2K_0. \quad (4)$$

Наиболее быстро развиваются при нарушении этого условия устойчивости длинноволновые возмущения, которые не нарушают принципа максимума и сохраняют монотонность решения, в силу чего их трудно обнаруживать по результатам расчетов, и поэтому они очень опасны. Другой опасной особенностью возмущений, возникающих в нелинейной диффузии при нарушении условия устойчивости, является то, что их амплитуда сильно осциллирует по времени.

### Условие сходимости простых итераций в неявной разностной схеме с неявным коэффициентом теплопроводности

При использовании разностной схемы (1) с неявным коэффициентом теплопроводности часто применяется на каждом шаге по времени простейший итерационный процесс

$$\frac{E(U^{(\nu+1)}) - E(U^{(\nu)})}{\Delta t} = \text{DIV} \left( \varkappa(U^{(\nu)}) \text{GRAD} U^{(\nu+1)} \right), \quad (5)$$

где  $U^{(0)} = U^n$ ,  $\nu = 0, 1, \dots$  — номер итерации внутри шага по времени.

Подставим в (5)  $U^{(\nu+1)} = U^{n+1} + \delta u^{(\nu+1)}$ , где  $U^{n+1}$  — точное решение разностного уравнения (1),  $\delta u^{(\nu+1)}$  — малая погрешность итерационного процесса (5). Отбрасывая квадратичные по погрешности слагаемые, получаем линейные уравнения для погрешностей:

$$\frac{C^{n+1} \delta u^{(\nu+1)}}{\Delta t} = \text{DIV} \left( \varkappa(U^{n+1}) \text{GRAD} \delta u^{(\nu+1)} - \left( \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \varkappa}{\partial U} q^{n+1} \right) S \delta u^{(\nu)} \right).$$

После замораживания по пространству коэффициентов этих разностных уравнений в одномерном плоском случае на равномерной сетке итерационные уравнения принимают вид

$$\delta u_{j+1/2}^{(\nu+1)} + \frac{\sigma}{2} K_{\alpha\beta} \left( \delta u_{j+3/2}^{(\nu)} - \delta u_{j-1/2}^{(\nu)} \right) = K_o \left( \delta u_{j+3/2}^{(\nu+1)} - 2\delta u_{j+1/2}^{(\nu+1)} + \delta u_{j-1/2}^{(\nu+1)} \right).$$

Ищем погрешности в виде  $\delta u_{j+1/2}^{(\nu)} = \delta u_0 \rho^\nu e^{ij\omega}$  и получаем

$$\rho = \frac{-\sigma i K_{\alpha\beta} \sin \omega}{1 + 2K_o (1 - \cos \omega)}.$$

Отсюда условие сходимости итераций  $|\rho| < 1$  для всех гармоник ( $\forall \omega$ ) легко сводится к неравенству

$$(K_{\alpha\beta})^2 < 4K_o + 1. \quad (6)$$

При этом максимум  $|\rho|$  достигается на гармониках, для которых  $\text{tg}^2(\omega/2) = 1/(4K_o + 1)$ . Похожий результат был получен Б. П. Тихомировым в неопубликованной работе 1974 г.

Если  $K_o \gg 1$ , то из сравнения условий (6) и (4) следует, что при числе итераций больше двух использование такого итерационного метода представляется неоправданным по общим затратам машинного времени по сравнению с использованием явного коэффициента теплопроводности. Более того, обе разностные схемы (1) и (2) имеют всего лишь первый порядок аппроксимации по времени (на гладких решениях). С точки зрения погрешностей аппроксимации также не видно особого смысла в большом числе дорогостоящих итераций по коэффициенту теплопроводности.

### Условие устойчивости двухэтапной схемы с пересчетом коэффициента теплопроводности

В двумерных расчетах для ослабления ограничения (4) использована двухэтапная разностная схема

$$\begin{aligned} \frac{E(U^{n+1/2}) - E(U^n)}{\Delta t} &= \text{DIV} (\varkappa(U^n) \text{GRAD} U^{n+1/2}); \\ \frac{E(U^{n+1}) - E(U^n)}{\Delta t} &= \text{DIV} (\varkappa(U^{n+1/2}) \text{GRAD} U^{n+1}). \end{aligned} \quad (7)$$

Можно сказать, что в разностной схеме (7) применяются только две простые итерации по нелинейности коэффициента теплопроводности. Уравнения для малых возмущений после линеаризации и замораживания коэффициентов по времени и по пространству в одномерном плоском случае на равномерной сетке примут вид

$$\begin{aligned} \left( \delta u_{j+1/2}^{n+1/2} - \delta u_{j+1/2}^n \right) + \frac{\sigma}{2} K_{\alpha\beta} \left( \delta u_{j+3/2}^n - \delta u_{j-1/2}^n \right) &= K_o \left( \delta u_{j+3/2}^{n+1/2} - 2\delta u_{j+1/2}^{n+1/2} + \delta u_{j-1/2}^{n+1/2} \right); \\ \left( \delta u_{j+1/2}^{n+1} - \delta u_{j+1/2}^n \right) + \frac{\sigma}{2} K_{\alpha\beta} \left( \delta u_{j+3/2}^{n+1/2} - \delta u_{j-1/2}^{n+1/2} \right) &= K_o \left( \delta u_{j+3/2}^{n+1} - 2\delta u_{j+1/2}^{n+1} + \delta u_{j-1/2}^{n+1} \right). \end{aligned}$$

Ищем решение этой системы уравнений в виде  $\delta u_{j+1/2}^n = \delta u_0 \lambda^n e^{ij\omega}$ ,  $\delta u_{j+1/2}^{n+1/2} = \delta u_0^{n+1/2} e^{ij\omega}$  и после исключения амплитуд возмущений  $\delta u_0$  и  $\delta u_0^{n+1/2}$  получаем

$$\lambda = \frac{1 - \frac{1 - \sigma i K_{\alpha\beta} \sin \omega}{1 + 2K_o (1 - \cos \omega)} \sigma i K_{\alpha\beta} \sin \omega}{1 + 2K_o (1 - \cos \omega)}.$$

Условие устойчивости  $|\lambda|^2 \leq 1$  должно выполняться для всех гармоник  $\omega$ , что после преобразований дает неравенство

$$t^6 (1 + 2K_0) (1 + 4K_0)^2 + t^4 [(3 + 8K_0) (1 + 4K_0) + A (1 + 8K_0)] + t^2 [(3 + 10K_0) + 2A (1 + 4K_0) - 8A^2 K_0] + (1 + A) \geq 0, \quad \forall t = \text{tg} \frac{\omega}{2}, \quad (8)$$

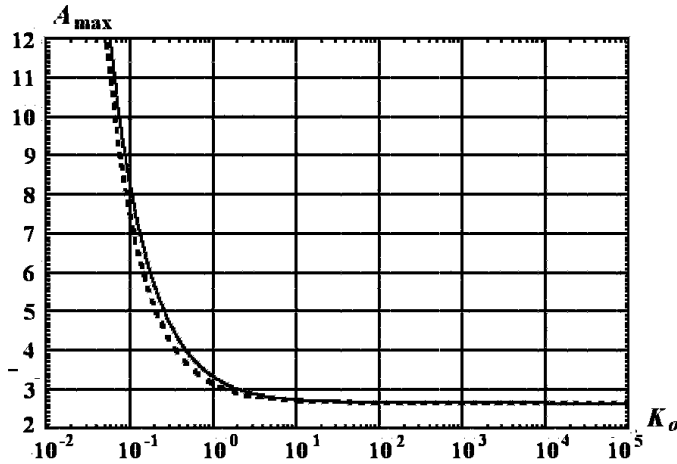


Рис. 1. Зависимость ограничения устойчивости  $A = (K_{\alpha\beta})^2 / (2K_0)$  от числа Куранта  $K_0$  в двухэтапной разностной схеме: — —  $A_{\max}(K_0)$ ; - - - -  $A_{\text{инт}}(K_0)$

где  $A = (K_{\alpha\beta})^2 / (2K_0)$  есть коэффициент улучшения условия устойчивости по сравнению с разностной схемой (2).

Численное решение условия устойчивости (8) дает зависимость  $A_{\max}(K_0)$ , показанную на рис. 1 вместе с интерполяционной зависимостью  $A_{\text{инт}}(K_0) = 2,634 + 0,5/K_0$ , которая с точностью не ниже 10 % дает оценку снизу для  $A_{\max}(K_0)$  и правильно описывает асимптотические зависимости при  $K_0 \rightarrow +0$  и при  $K_0 \rightarrow +\infty$ . Такой точности для практических целей вполне достаточно, поэтому в расчетах можно использовать приближенное условие устойчивости разностной схемы (7) в следующем виде:

$$(K_{\alpha\beta})^2 \leq 1 + 5,268K_0.$$

### Реализация ограничений на шаг по времени при счете двумерной теплопроводности

При счете двумерной теплопроводности в случае нелинейной зависимости  $E(U)$  энергии от температуры обычно используется итерационный метод Ньютона:

$$\frac{E(U^{n+1}) - E(U^n)}{\Delta t^{n+1/2}} \approx \frac{[E(U^{(\nu)}) + C(U^{(\nu)}) (U^{(\nu+1)} - U^{(\nu)})] - E(U^n)}{\Delta t^{n+1/2}} = \text{DIV} \left( \varkappa(U^{(\nu)}) \text{GRAD} U^{(\nu+1)} \right), \quad \nu = 0, 1, \dots, \quad U^{(0)} = U^n. \quad (9)$$

В методике МЕДУЗА на нерегулярных сетках [6] реализована двухэтапная разностная схема (7), для этого в итерациях по энергии (9) коэффициент теплопроводности вычисляется на одном шаге по времени всего два раза:

$$\{\nu\} = \begin{cases} 0, & \nu = 0; \\ 1, & \nu \geq 1. \end{cases} \quad \text{Система линейных разностных уравнений (9) на каждой итерации решается с помощью программ библиотеки параллельных итерационных решателей [7].}$$

Запишем пространственную часть разностной схемы для  $i$ -й ячейки сетки с  $N_s$  сторонами (рис. 2) в виде

$$\begin{aligned} \text{DIV} \left( \varkappa(U^{(\nu)}) \text{GRAD} U^{(\nu+1)} \right) &= \\ &= \frac{1}{M_i} \sum_{k=1}^{N_s} \Delta l_k \varkappa_{ik}^{(\nu)} \left( \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} \right)_{ik}^{n+1} = \\ &= \sum_{k=1}^{N_s} \sum_{l=1}^4 \alpha_{kl}^{n+1} U_{kl}^{n+1} \equiv - \sum_{k=1}^{N_s} Q_{ik}^{n+1} = - \frac{1}{M_i} \sum_{k=1}^{N_s} \Delta l_k q_{ik}^{n+1}, \end{aligned}$$

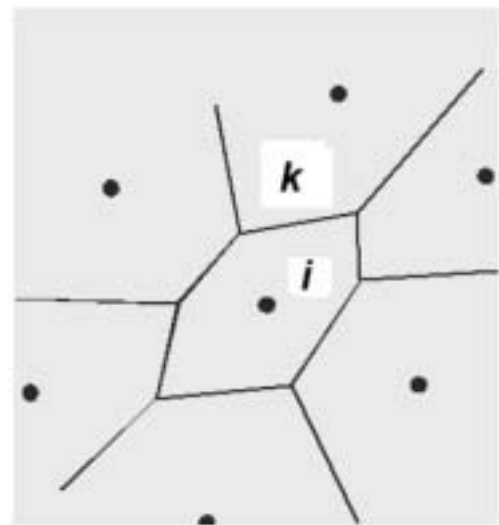


Рис. 2. Фрагмент сетки с  $i$ -й ячейкой и ее соседями  $k = 1, \dots, N_s$  первого уровня

где  $M_i$  — масса  $i$ -й ячейки;  $\Delta l_k$  — длина  $k$ -й стороны;  $\varkappa_{ik}$  — коэффициент теплопроводности на  $k$ -й стороне ячейки  $i$ ;  $U_{kl}^{n+1}$  ( $l = \overline{1, 4}$ ) — температуры четырех ячеек вокруг  $k$ -й стороны.

Прогнозируемый допустимый шаг по времени вычисляется в программе по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \Delta t^{n+3/2} &= \min_{i:K_i^i > K_o^{\min}} \frac{\Delta t^{n+1/2} P_1 K_o^i}{\left( K_{TV}^i \frac{\alpha_i E_i}{U_i^{n+1} C_i} \right)^2}, \quad K_o^{\min} = 0,12; \quad P_1 = 4,0; \\ K_o^i &= \frac{1}{C_i^n} \Delta t^{n+1/2} \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} \max_l |\alpha_{kl}^{n+1}|, \quad C = \frac{\partial E}{\partial U}; \\ K_{TV}^i &= \frac{\Delta t^{n+1/2} \max_k |Q_{ik}^{n+1}|}{\max \left\{ E_i^{n+1}, \varepsilon^2 \max_k \{ E_k^{n+1} \} \right\}}, \quad \varepsilon = 10^{-2}; \\ \alpha_i &= \max \left\{ \alpha_{\min}, \max_k \frac{\ln \frac{\varkappa_i (U_i^{n+1})}{\varkappa_i (U_{ik}^0)}}{\ln \frac{U_i^{n+1}}{U_{ik}^0}} \right\}, \quad \alpha_{\min} = 1,0, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $U_i^{n+1}$  — температура в центре ячейки  $i$ ;  $U_{ik}^0$  — температуры на  $k$ -й стороне той же ячейки.

### Результаты двумерных расчетов

Для сравнения тестовые задачи считались в трех режимах:

- 1) итерации по нелинейности уравнения состояния и по коэффициенту теплопроводности проводятся до сходимости, шаг по времени навязывается;
- 2) на двух итерациях пересчитывается коэффициент теплопроводности, итерации по уравнению состояния проводятся до сходимости, шаг по времени навязывается;
- 3) "автоматический" режим, отличается от режима 2 только тем, что шаг по времени определяется формулами (10).

Для каждой задачи в режимах 1 и 2 проведено несколько расчетов, с изменением величины шага по времени как минимум на порядок.

Для оценки качества численных решений на контрольные моменты времени использовалась норма относительной погрешности, вычисляемая по формуле

$$DE_1 = \frac{\sum_i M_i |T_i^c - T_i^e|}{\sum_i M_i T_i^e} \cdot 100 \%,$$

где  $M_i$  — масса  $i$ -й ячейки;  $T_i^c$  — численное значение температуры в  $i$ -й ячейке;  $T_i^e$  — значение температуры в центре  $i$ -й ячейки из точного решения.

**Тестовая задача о бегущей тепловой волне.** Первая тестовая задача — о бегущей с постоянной скоростью тепловой волне [1]. Необходимо рассчитать поле температур внутри бруса (сечение — единичный квадрат) с уравнением состояния  $E = T$ ,  $\rho = 1$  и с коэффициентом теплопроводности  $\varkappa = \varkappa_0 T^\beta$ ,  $\varkappa_0 = 6$ ,  $\beta = 3$ . Начальная температура равна нулю, на границе  $y = 0$  задана температура  $T(t, x, y)|_{y=0} = (\beta c^2 t / \varkappa_0)^{1/\beta}$ ,  $c = 4$ , на остальных границах задан нулевой поток. Точное решение уравнения теплопроводности  $\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \text{div}(\varkappa(T) \text{grad } T)$ ,  $t > 0$ , описывается следующими формулами:  $T(t, x, y) = 0$  при  $y \geq ct$ ,  $T(t, x, y) = [\beta c(ct - y) / \varkappa_0]^{1/\beta}$  при  $y < ct$ . Конечный момент времени  $t_{\text{кон}} = 0,2$ .

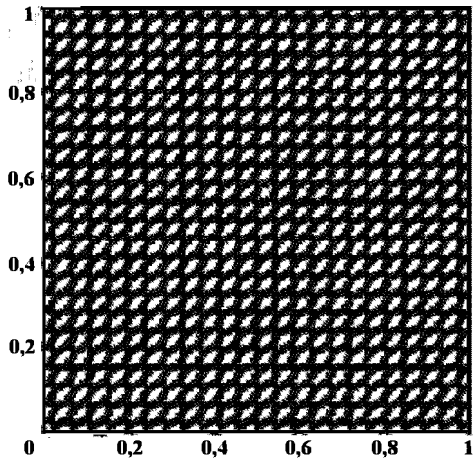


Рис. 3. Вид расчетной сетки в задаче о бегущей тепловой волне

На рис. 3 показан общий вид расчетной сетки для этой задачи. Расчеты проведены на двух сетках — с полным числом ячеек  $N_1 = 10816$  и  $N_2 = 29585$ . Для режимов 1 и 2 на каждой сетке расчеты проведены с тремя значениями шагов по времени:  $\Delta t = 0,001$ ,  $\Delta t = 0,005$  и  $\Delta t = 0,01$ . В случае режима 3 шаг по времени был переменным, на нижеприведенных рисунках для этого режима приведена одна точка, соответствующая среднему шагу по времени.

На рис. 4, 5 показаны полученные в расчетах зависимости полного времени счета от шага по времени, на рис. 6, 7 — зависимости относительной погрешности от шага по времени, на рис. 8, 9 — зависимости относительной погрешности от полного времени счета.

Как видно из рис. 6, 7, счет без контроля шага по времени является опасным, поскольку может привести к существенному росту погрешности. Автоматический выбор шага по вре-

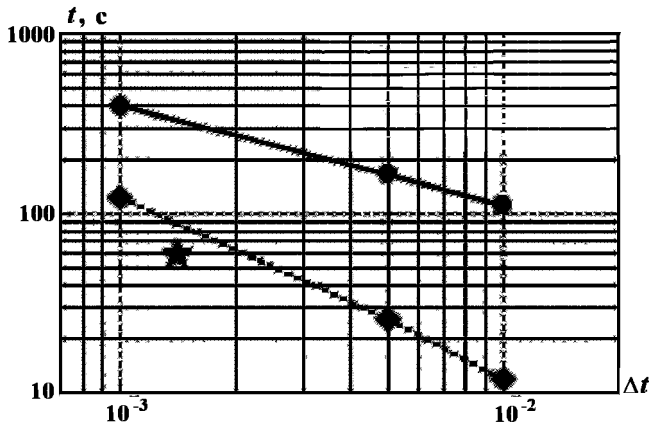


Рис. 4. Зависимость полного времени счета от шага по времени в задаче о бегущей тепловой волне,  $N_1 = 10816$ : —●— режим 1; - - ◆ - - режим 2; ★ — режим 3

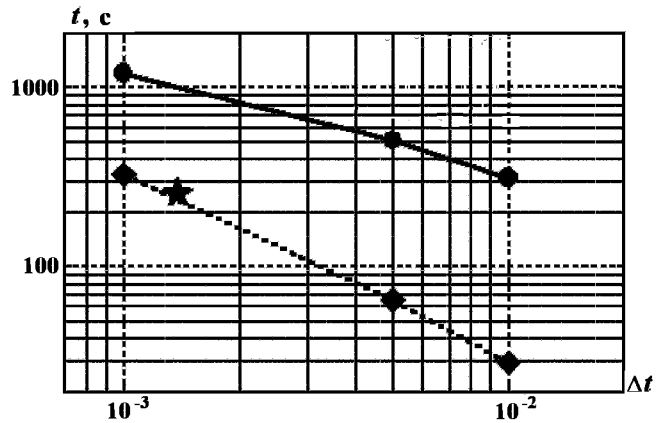


Рис. 5. Зависимость полного времени счета от шага по времени в задаче о бегущей тепловой волне,  $N_2 = 29585$ : —●— режим 1; - - ◆ - - режим 2; ★ — режим 3

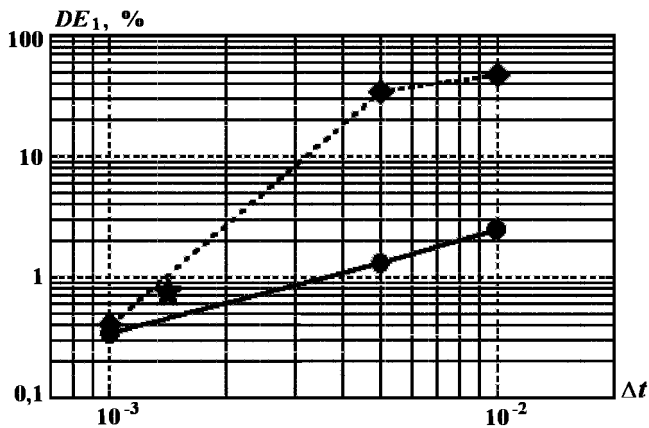


Рис. 6. Зависимость относительной погрешности от шага по времени в задаче о бегущей тепловой волне,  $N_1 = 10816$ : —●— режим 1; - - ◆ - - режим 2; ★ — режим 3

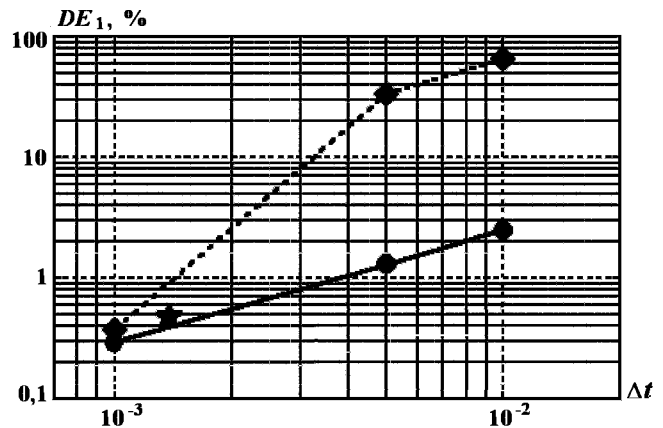


Рис. 7. Зависимость относительной погрешности от шага по времени в задаче о бегущей тепловой волне,  $N_2 = 29585$ : —●— режим 1; - - ◆ - - режим 2; ★ — режим 3

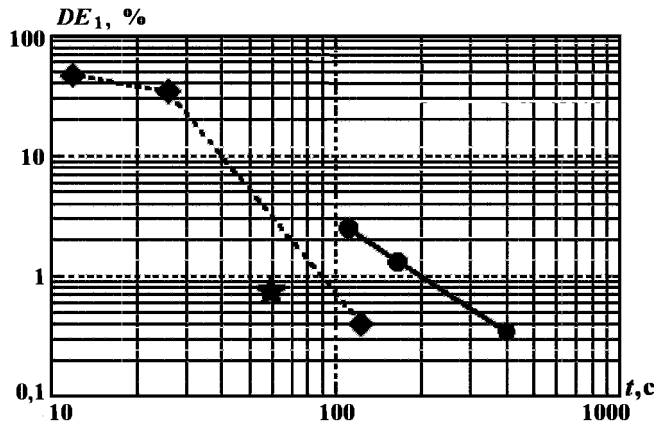


Рис. 8. Зависимость относительной погрешности от полного времени счета в задаче о бегущей тепловой волне,  $N_1 = 10816$ : —●— режим 1; - - ◆ - - режим 2; ★ — режим 3

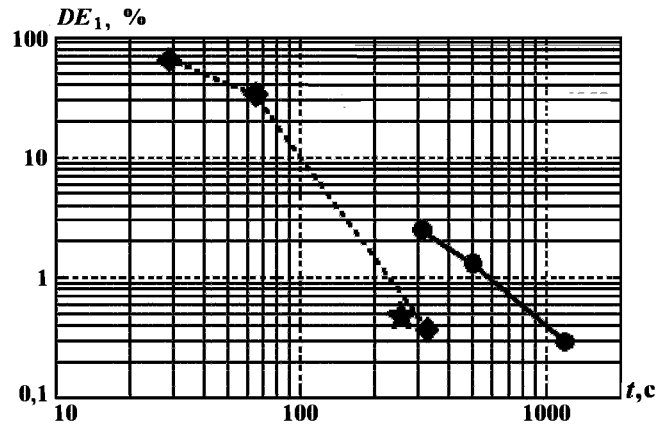


Рис. 9. Зависимость относительной погрешности от полного времени счета в задаче о бегущей тепловой волне,  $N_2 = 29585$ : —●— режим 1; - - ◆ - - режим 2; ★ — режим 3

мени при счете в режиме 3 обеспечивает достаточно высокую точность. Одновременно такой режим счета намного экономичнее счета с итерациями до сходимости по коэффициенту теплопроводности.

**Тестовая задача о распространении тепловой волны в трехслойной системе под углом к границам веществ.** Вторая тестовая задача взята из работы [8]. В начальный момент времени  $t = 0$  плоская трехслойная система, показанная на рис. 10, заполнена холодными веществами с различными теплофизическими свойствами в областях 1, 2 и 3. В момент времени  $t = 0$  начинается подвод тепла через отрезки границы  $AB$  и  $BC$ , в результате чего возникает тепловая

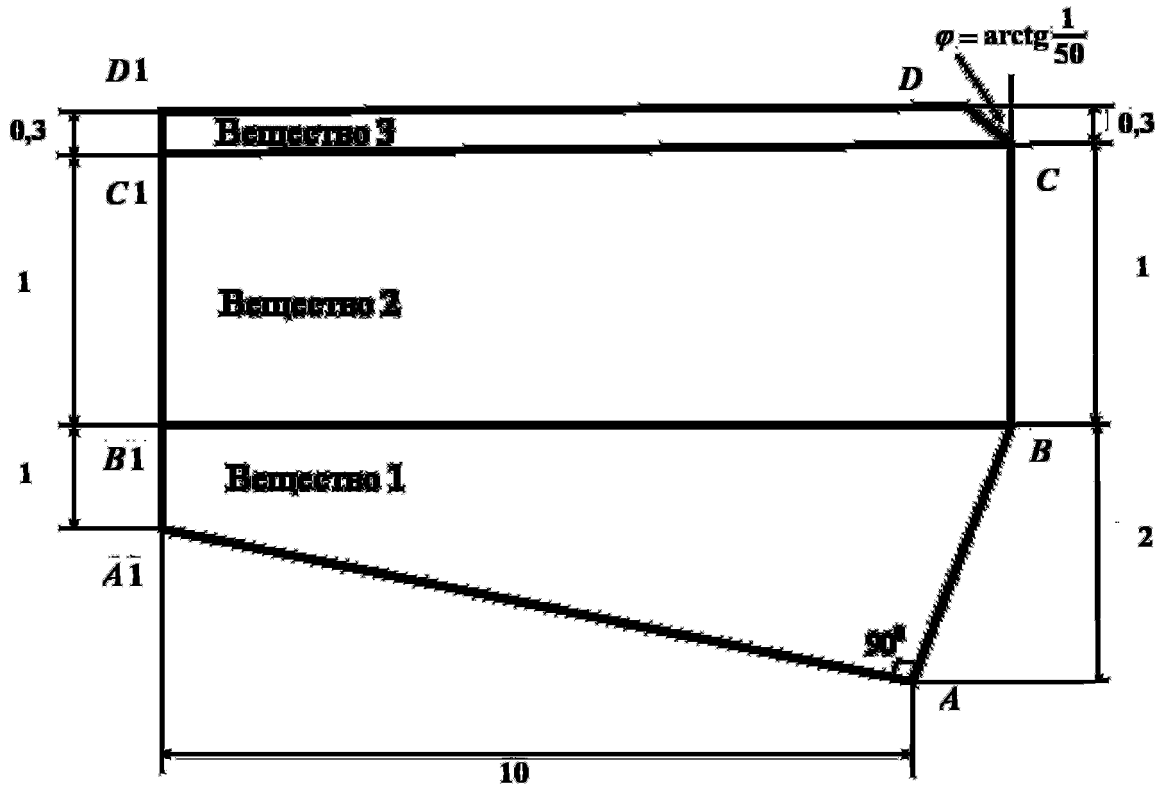


Рис. 10. Геометрия задачи о тепловой волне в трехслойной системе

волна, распространяющаяся влево и вверх по системе. На остальных участках внешней границы задан нулевой поток тепла. Распространение тепла описывается уравнением теплопроводности  $\rho_i \frac{\partial E_i(T)}{\partial t} = \text{div} (\kappa_i(T) \text{grad} T^4)$  ( $i = 1, 2, 3$  — номер вещества), которое дополняется условием равенства температур и нормальных компонент потока на границах веществ. Здесь  $\kappa_i(T) = \kappa_{0i} T^3$ ,  $E_i(T) = C_i T + V_i T^4$ , значения параметров веществ приведены в табл. 1. На отрезке  $AB$  задана температура  $T_1(t) = 2,15444\Theta(t/14,1367)$  в предположении, что точка  $B$  имеет координаты  $(10,100)$ ; заданная на отрезке  $BC$  температура имеет вид  $T_2(t, y) = 2,15444\Theta(0,0707378t - 0,00351934y + 0,351934)$ , где  $\Theta(\sigma) = 0$  при  $\sigma \leq 0$ , а при  $\sigma > 0$  функция  $\Theta(\sigma)$  определена уравнением  $\Theta^3 - \ln(1 + \Theta^3) = 3\sigma$ .

Точное решение тестовой задачи имеет вид  $T(t, x, y) = \tau_0 \Theta(A_i(t, x, y))$ ,  $A_i(t, x, y) = [U_i(t - t_i) - a_i x - b_i y] / \xi_{0i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , где  $\tau_0 = 10^{1/3}$ ; остальные параметры точного решения приведены в табл. 2. Конечный момент времени в расчетах  $t_{\text{кон}} = 0,5$ .

Общий вид расчетной сетки показан на рис. 11. Расчеты этой задачи проведены на двух сетках — с полным числом ячеек  $N_1 = 1065$  и  $N_2 = 4371$ . В случае режима 3 шаг по времени был переменным, на нижеследующих рисунках для этого режима приведена одна точка, соответствующая среднему шагу по времени.

На рис. 12, 13 показаны полученные зависимости полного времени счета от шага по времени, на рис. 14, 15 — зависимости относительной погрешности от шага по времени, на рис. 16, 17 — зависимости относительной погрешности от полного времени счета.

Из результатов расчетов тестовой задачи о распространении тепловой волны в трехслойной системе видно, что режим 3 с автоматическим вычислением шага по времени с двумя пересчетами коэффициента теплопроводности на шаге по точности не уступает расчетам в режиме 1 с итерациями по коэффициенту теплопроводности, но заметно экономичнее.

Таблица 1

Параметры веществ в задаче о тепловой волне в трехслойной системе

Вещество	$\rho_i$	$\kappa_{0i}$	$C_i$	$V_i$
1	1	35,3418	10	1
2	2	7,06836	1,23762	0,123762
3	10	0,0706836	4,95248	0,495248

Таблица 2

Параметры для точного решения в задаче о тепловой волне в трехслойной системе

Вещество	$U_i$	$a_i$	$b_i$	$\xi_{0i}$	$t_i$
1	10	-0,995037	0,0995037	141,367	0
2	8,98888	-0,894427	0,447214	127,073	-3,98015
3	0,200957	-0,0199960	0,999800	2,84087	-501,449

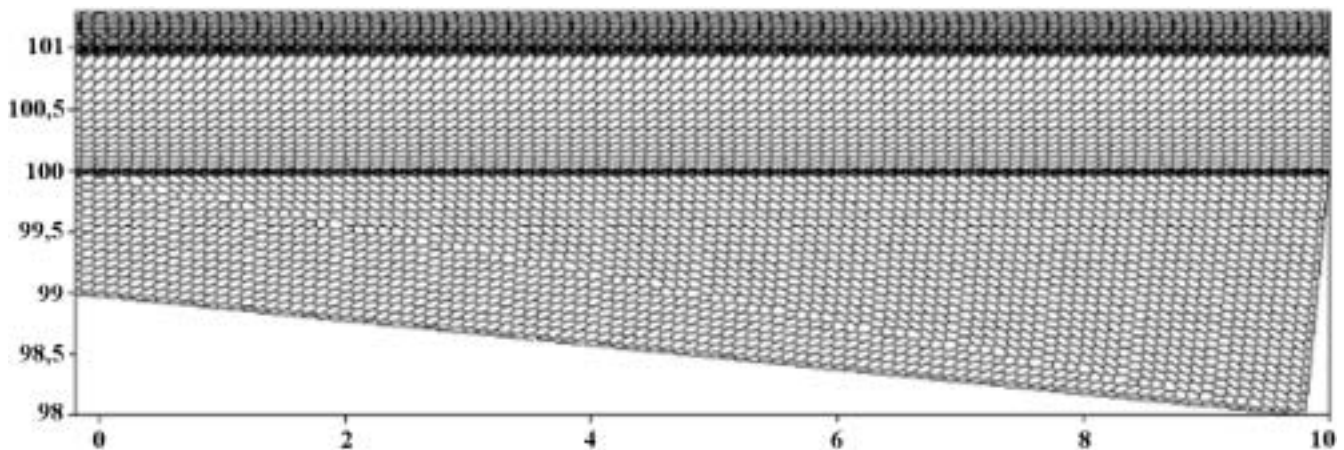


Рис. 11. Общий вид расчетной сетки в задаче о тепловой волне в трехслойной системе



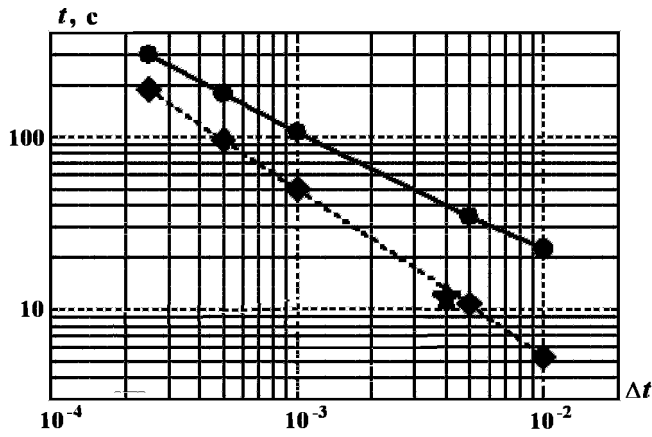


Рис. 12. Зависимость полного времени счета от шага по времени в задаче о тепловой волне в трехслойной системе,  $N_1 = 1065$ : —●— режим 1; - - ◆ - - режим 2; ★ — режим 3

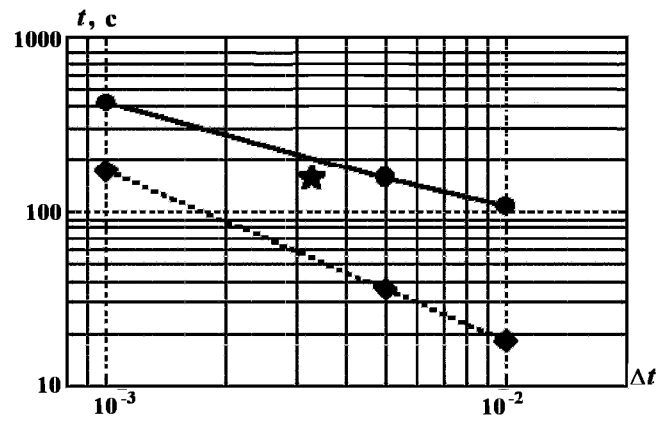


Рис. 13. Зависимость полного времени счета от шага по времени в задаче о тепловой волне в трехслойной системе,  $N_2 = 4371$ : —●— режим 1; - - ◆ - - режим 2; ★ — режим 3

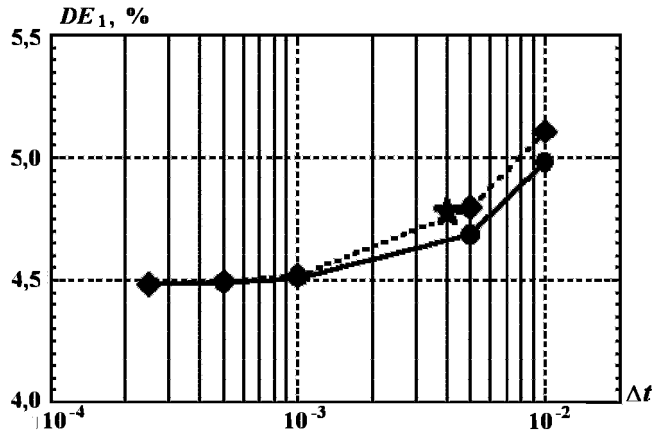


Рис. 14. Зависимость относительной погрешности от шага по времени в задаче о тепловой волне в трехслойной системе,  $N_1 = 1065$ : —●— режим 1; - - ◆ - - режим 2; ★ — режим 3

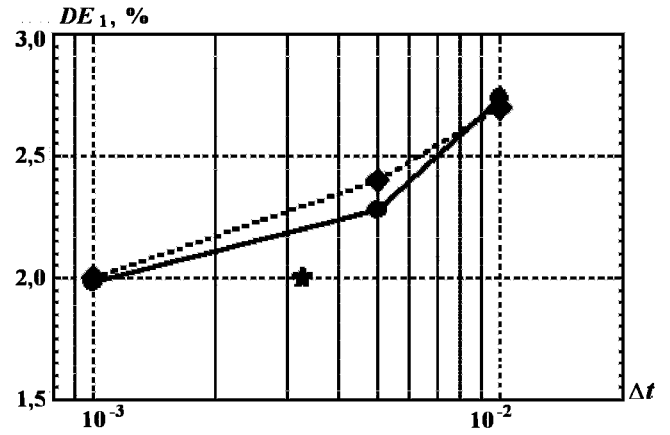


Рис. 15. Зависимость относительной погрешности от шага по времени в задаче о тепловой волне в трехслойной системе,  $N_2 = 4371$ : —●— режим 1; - - ◆ - - режим 2; ★ — режим 3

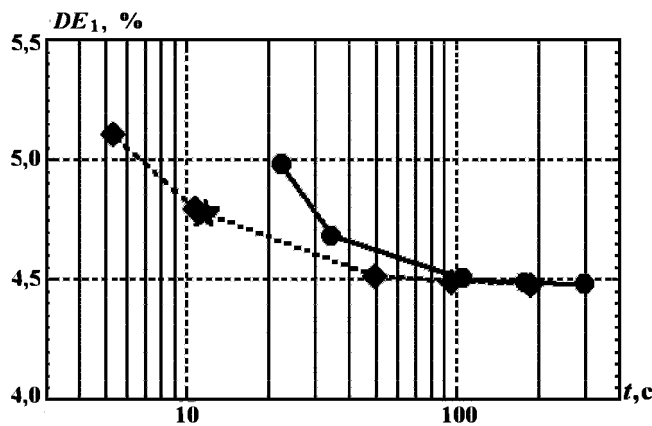


Рис. 16. Зависимость относительной погрешности от полного времени счета в задаче о тепловой волне в трехслойной системе,  $N_1 = 1065$ : —●— режим 1; - - ◆ - - режим 2; ★ — режим 3

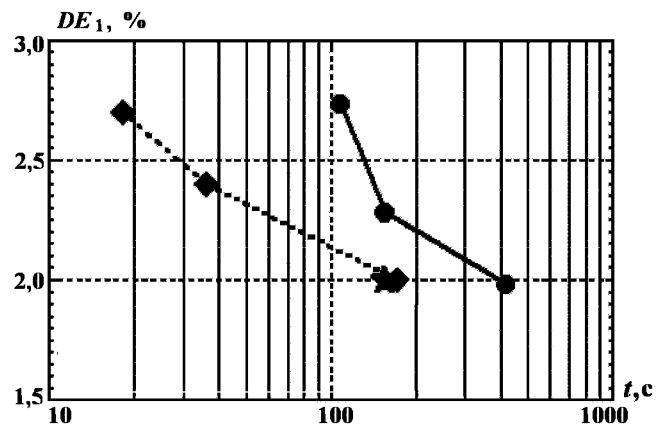


Рис. 17. Зависимость относительной погрешности от полного времени счета в задаче о тепловой волне в трехслойной системе,  $N_2 = 4371$ : —●— режим 1; - - ◆ - - режим 2; ★ — режим 3

### Заключение

Проведено исследование устойчивости малых возмущений температуры при учете зависимости коэффициента теплопроводности от температуры в неявных разностных схемах с явным коэффициентом теплопроводности и с однократным уточнением коэффициента теплопроводности. Получены ограничения на величину шага по времени, зависящие от числа Куранта и от характера нелинейности задачи, смысл которых в том, чтобы за один шаг тепловая волна проходила не больше некоторой доли ячейки сетки, которая зависит от локальных параметров нелинейности.

Приведены результаты двумерных расчетов тепловых волн на нерегулярных сетках. Результаты расчетов показали следующее. Во-первых, при одинаковой погрешности счета (и на одинаковых пространственных сетках) использование явного (только с однократным уточнением) коэффициента теплопроводности с автоматическим выбором шага по времени (в соответствии с условиями устойчивости) экономичнее, чем использование итераций по нелинейности неявного коэффициента теплопроводности. Во-вторых, счет только с однократным уточнением коэффициента теплопроводности без ограничения на величину шага по времени может приводить к значительным погрешностям.

### Список литературы

1. Самарский А. А., Соболев И. М. Примеры численного расчета температурных волн // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1963. Т. 3, № 4. С. 702—719.
2. Абрашин В. Н. О некоторых разностных схемах для задач лучистой теплопроводности // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230, № 4. С. 753—756.
3. Прозорова Э. В. К вопросу о решении нелинейного уравнения теплопроводности // Вестник Ленинградского университета. 1977. № 19. С. 110—113.
4. Шульце М. О разностных схемах для квазилинейного уравнения теплопроводности // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 9. С. 1698—1709.
5. Арделян Н. В. Метод исследования сходимости нелинейных разностных схем // Там же. 1987. Т. 23, № 7. С. 1116—1127.
6. Горбунов А. А., Бутнев О. И., Жогов Б. М., Барабанов Р. А. Алгоритмы расчета процесса теплопроводности с использованием механизма выделения контактной линии в смешанных ячейках // Сб. докл. IV науч.-тех. конф. "Молодежь в науке". Саров, 2006. С. 43—47.
7. Артемьев А. Ю., Бартенев Ю. Г., Басалов В. Г., Бондаренко Ю. А., Варгин А. М., Голубев А. А., Ерзунов В. А., Ломтев А. В., Максимов А. С., Панов А. И., Прокофьев А. И., Романова М. Д., Фролова Н. В., Щаникова Е. Б. Библиотека решателей разреженных линейных систем // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2004. Вып. 7. С. 80—95.
8. Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Горев В. В., Делов В. И., Зубов Е. Н., Матвеев Ю. М., Моренко А. И., Соколов С. С., Шемарулин В. Е. Описание набора тестов для методик и программ, предназначенных для решения двумерных задач теплопроводности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1992. Вып. 2. С. 14—20.

Статья поступила в редакцию 17.07.08.

---