

УДК 532.529.6

К ВОПРОСУ ОБ ЭВОЛЮЦИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА КУПОЛЕ ВСПЛЫВАЮЩЕГО ВОЗДУШНОГО ПУЗЫРЯ

С. Ю. Седов
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Приводятся возможные интерпретации наблюдаемой эволюции осесимметричных возмущений на поверхности крупного всплывающего воздушного пузыря.

Теоретические и экспериментальные исследования эволюции возмущений границ разноплотных материалов являются одними из основных направлений в гидродинамике [1]. Тематика пузырей имеет к этому непосредственное отношение.

В РФЯЦ-ВНИИЭФ в начале 70-х годов прошлого века была разработана и использована методика получения крупных (размером более 10 см) приблизительно сферических воздушных пузырей, всплывающих в воде из состояния покоя [2]. Начиная с 2003 года эта методика получила развитие на базе учебно-исследовательской лаборатории Саровского физико-технического института (СарФТИ) под руководством Е. Е. Мешкова при непосредственном участии старшеклассников физико-математического лицея № 15 г. Сарова [3–9]. Ими проделана серия различных экспериментов по наблюдению эволюции гидродинамических возмущений поверхности пузырей, в том числе разработана методика создания двумерного возмущения с осевой симметрией на куполе всплывающего воздушного пузыря в жидкости при помощи кольца из проволоки, положенного на поверхность пузыря из тонкой резины [8].

После разрушения пузыря протыканием иглой снизу кольцо проваливалось внутрь пузыря, оставляя после себя почти двумерное осесимметричное возмущение, поведение которого наблюдалось по кадрам видеogramмы. Резиновый шарик разрушался, остатки оболочки стягивались и соскальзывали вдоль поверхности раздела *вода-воздух* за время в несколько миллисекунд. В результате образовывался приблизи-

тельно сферический пузырь воздуха, в начальный момент времени находившийся в состоянии покоя. Из этого состояния начинался подъем пузыря; возникающее при этом течение регистрировалось видеокамерой.

На рис. 1 (из [8]) показаны некоторые эксперименты по инициированию осесимметричных возмущений на поверхности воздушного пузыря в воде. Представленные кадры показывают последовательное развитие возмущений во времени. В работе [9] часть экспериментов проводилась с обычной водой (рис. 2), а другая часть — с полупроцентным мыльным раствором с пониженным примерно в 2,5 раза коэффициентом поверхностного натяжения (рис. 3).

Разумеется, в связи с проведенными опытами возникла задача интерпретации полученных экспериментальных закономерностей. Рассмотрим далее возможные варианты.

Предположим, что с купола поднимающегося воздушного пузыря "бежит" вниз по его поверхности возмущение (рис. 4). Вводя малую величину $\eta \ll R$, задающую отклонение пузыря от сферической формы, можно записать следующие определяющие соотношения для формы пузыря (в сферических координатах r, ϑ, φ — см. [1]):

— кинематическое условие на границе пузыря

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{v_0(\vartheta)}{R} \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=R+\eta};$$

— интеграл Бернулли для струи жидкости, обтекающей пузырь,

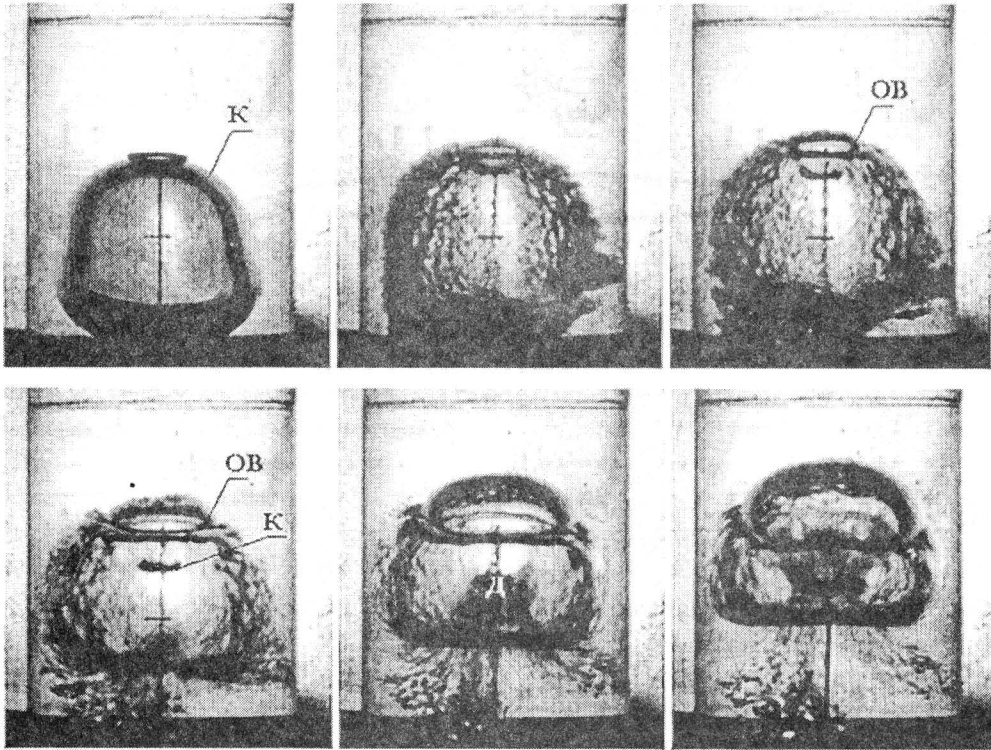


Рис. 1. Эксперимент с водой из [8]: К — кольцо из стальной проволоки; ОВ — осесимметричное возмущение на куполе пузыря; Д — донная струя

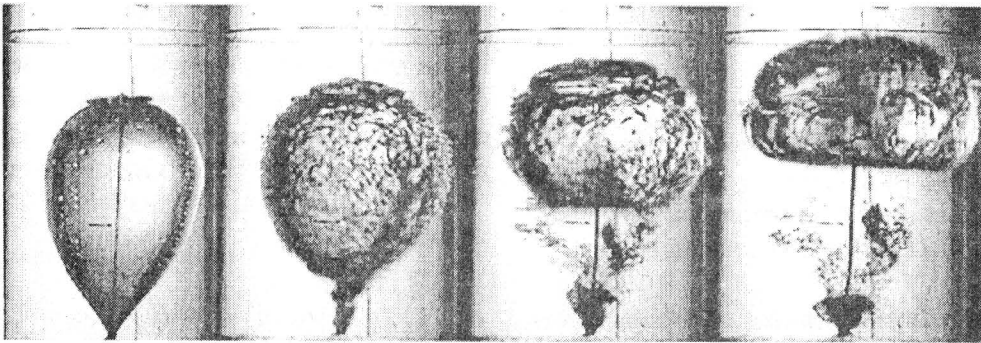


Рис. 2. Эксперимент с водой из [9]

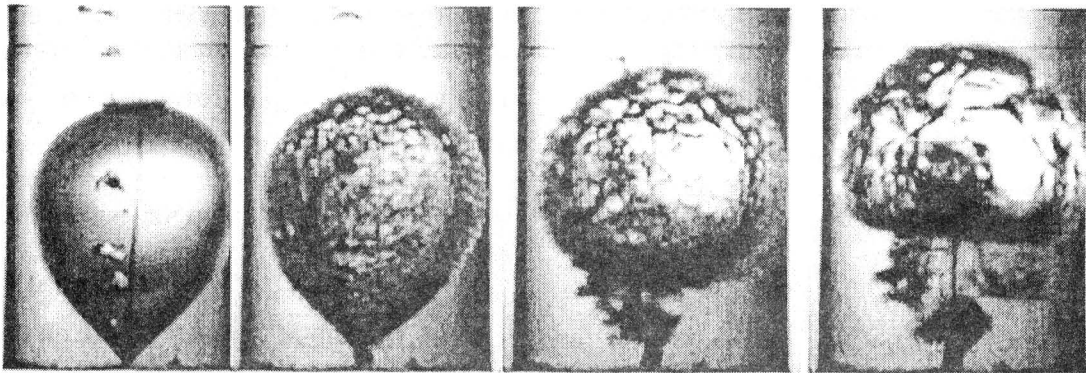


Рис. 3. Эксперимент с мыльным раствором из [9]

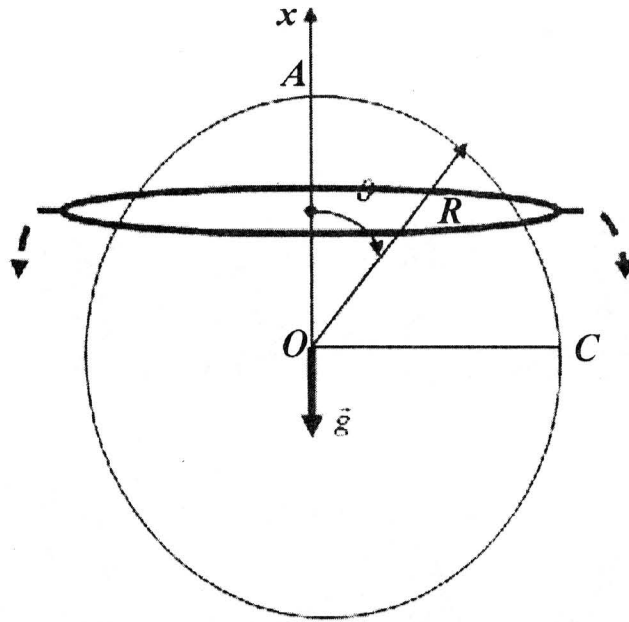


Рис. 4. Окрестность пузыря

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 \right) \Big|_{r=R+\eta} + g(R+\eta) \cos \vartheta + \frac{\sigma K}{\rho} = \text{const};$$

– уравнение Лапласа для потенциала скорости Φ

$$\Delta \Phi = 0.$$

Здесь u – скорость жидкости; σ – коэффициент поверхностного натяжения; g – ускорение свободного падения; K – кривизна поверхности; $v_0(\vartheta)$ – скорость струи, обтекающей поверхность пузыря.

Выделим класс возмущений η , у которых есть только тангенциальная скорость и отсутствует нормальная составляющая. Если время скатывания не слишком велико, то возмущение не успевает сильно изменить амплитуду при скатывании. Тогда

$$v_n|_{r=R+\eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=R+\eta} = 0$$

и эволюция возмущения $\eta(\vartheta, t)$ определяется соотношением

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{v_0(\vartheta)}{R} \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} = 0.$$

Если бы пузырь был идеальной сферой радиусом R , движущейся с постоянной скоростью U в невязкой жидкости, а течение полностью потен-

циальным, то без учета вязкости вблизи пузыря скорость жидкости имела бы значение

$$v_0(\vartheta) = \frac{3}{2} U \sin \vartheta, \quad (1)$$

находящееся из решения уравнения Лапласа (угол ϑ отсчитывается от вертикальной оси в сферических координатах r, ϑ, φ). С другой стороны, из теоремы Бернулли следует [1], что для сферического пузыря вблизи купола (в пренебрежении вязкостью)

$$\frac{1}{2} v_0^2(\vartheta) = g(R - R \cos \vartheta). \quad (2)$$

Соотношения (1), (2) несовместны для произвольных значений угла ϑ . Однако при малых углах $\vartheta \ll 1$ вблизи купола (где течение потенциально) они приближенно совместны, так как $v_0(\vartheta) \approx \sqrt{gR} \vartheta \approx \frac{3}{2} U \vartheta$, откуда $U \approx \frac{2}{3} \sqrt{gR}$. Это значение скорости пузыря хорошо соответствует экспериментальным данным при радиусе пузыря в воде $R \geq 1$ см и числе Рейнольдса порядка $10 \div 100$ [1].

Таким образом, при зависимости $v_0(\vartheta) = \sqrt{2gR(1 - \cos \vartheta)} = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \sqrt{gR}$ имеется в виду случай, когда возмущения скатываются с поверхности купола пузыря подобно материальной точке с гладкой твердой сферы за счет силы тяжести.

Теперь допустим, что недеформированный пузырь ведет себя как твердая сфера радиусом R , движущаяся с постоянной скоростью U в вязкой жидкости. В этом случае скорость обтекания струи, сносящей возмущения относительно пузыря [1],

$$v_0(\vartheta) = \frac{3}{2}U \sin \vartheta = \sin \vartheta \sqrt{gR}.$$

Разумеется, оба варианта лишь приближенно описывают реальную ситуацию (в частности, для достаточно малых углов). Точное определение поля скорости течения жидкости около поверхности крупного деформированного пузыря — сложная математическая задача.

Е. Е. Мешковым замечено, что при непосредственном наблюдении двумерное возмущение как бы расширяется по диаметру, но практически не смещается по оси канала в лабораторной системе координат. В связи с этим рассмотрим третий вариант, а именно предположим, что возникшие от кольца возмущения практически покоятся относительно сосуда (эволюционируя преимущественно в поперечном направлении), в то время как пузырь поднимается вверх с постоянной скоростью $U = \frac{2}{3}\sqrt{gR}$. Тогда легко найти фиктивную скорость распространения возмущения по поверхности пузыря (в зависимости от угла):

$$v_0(\vartheta) = \frac{U}{\sin \vartheta} = \frac{2\sqrt{gR}}{3 \sin \vartheta}.$$

Чтобы сравнить результаты расчетов с экспериментом, нужно выбрать угол ϑ_0 максимума амплитуды возмущения в начальный момент времени. Фиксируем его с учетом диаметра кольца. После того как падающее сверху вниз кольцо полностью погрузится в пузырь, оно уже не будет оказывать существенного влияния на движение жидкости вверх пузыря. Итак, принимаем, что

$$\vartheta_0 = \arcsin \frac{D_k}{D_n},$$

где D_k — диаметр кольца; $D_n = 2R$ — начальный диаметр пузыря (предполагается $D_k \leq D_n$), R — начальный радиус пузыря. Тогда легко получить зависимости угла ϑ от безразмерного времени $\tau = t\sqrt{g/R}$ во всех трех рассмотренных случаях по формуле

$$\frac{\sqrt{gR}}{v_0(\vartheta)} d\vartheta = d\tau.$$

Таким образом, соответственно рассмотренным случаям имеем

- 1) $v_0(\vartheta) = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \sqrt{gR};$
 $\tau = \operatorname{arth} \left(\cos \frac{\vartheta_0}{2} \right) - \operatorname{arth} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} \right);$
- 2) $v_0(\vartheta) = \sin \vartheta \sqrt{gR};$
 $\tau = \ln \left(\frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \right) - \ln \left(\frac{1 - \cos \vartheta_0}{\sin \vartheta_0} \right);$
- 3) $v_0(\vartheta) = \frac{2\sqrt{gR}}{3 \sin \vartheta};$ $\tau = \frac{3}{2} \cos \vartheta_0 - \frac{3}{2} \cos \vartheta.$

На рис. 5 (см. также цветную вкладку) показаны зависимости угла максимума возмущения в градусах от безразмерного времени, полученные как в экспериментах, так и в теоретических расчетах. Заметим, что часть экспериментов проводилась с обычной водой, а часть — с мыльным раствором с пониженным коэффициентом поверхностного натяжения.

Из рис. 5 видно, что наибольшее согласие расчетов с опытами достигается в случае 2. Видно хорошее согласие расчетов с опытами. Как и следовало ожидать, зависимости времени скатывания от поверхностного натяжения нет. Отметим также, что в случае 3 наклоны экспериментальных и расчетных зависимостей похожи.

Теперь рассмотрим другие эксперименты Е. Е. Мешкова и соавторов, проведенные со всплывающими пузырями. На рис. 6 показано развитие возмущений на пузыре с начальным объемом 2,5 л в зависимости от времени. Видно, что сглаживание возмущений на верхушке пузыря происходит за безразмерное время $kt = 1,5 \div 2$. Рассмотрим далее количественные характеристики экспериментальных возмущений. На момент времени $t = 56$ мкс длина волны λ и амплитуда возмущения A составляют на куполе $\sim 1,7$ см. При $t = 104$ мкс $\lambda \sim 6 \div 7$ см, $A \sim 2 \div 3$ см. При $t = 196$ мкс амплитуда $A \approx 0$.

Для описания эволюции "стоячего" возмущения, формирующегося на куполе пузыря для угла $\vartheta \approx 0$, воспользуемся подходом Бэтчелора [10]. Считая возмущения η достаточно малыми и введя добавку Φ_1 к потенциалу, $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$, можно получить уравнения для стоячих малых возмущений (подробнее см. [10]). Дж. Бэтчелор проанализировал полученные соотношения только на куполе пузыря. В этом

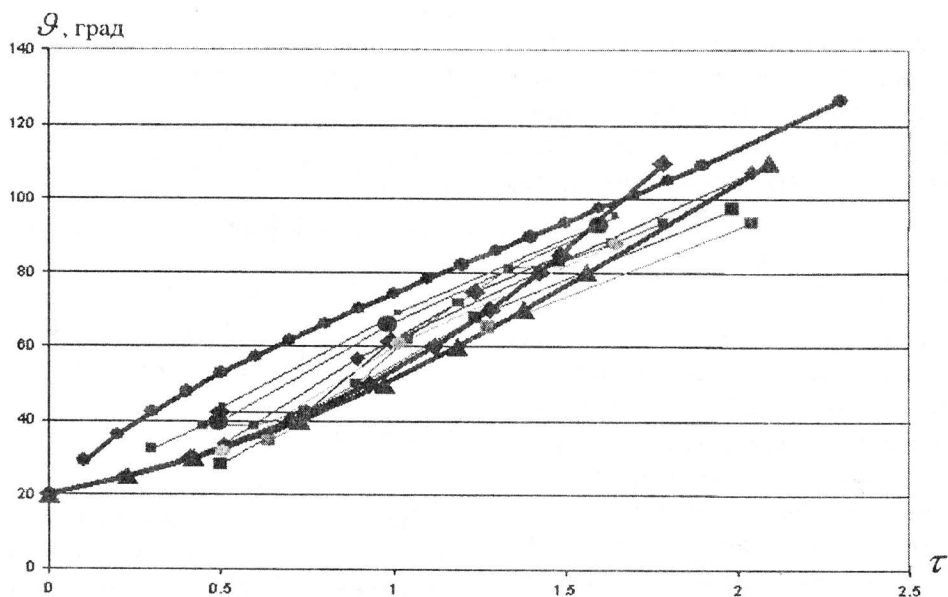


Рис. 5. Зависимости угла максимума возмущения ϑ от безразмерного времени τ , начальный угол $\vartheta_0 \approx 20^\circ$: тонкие линии — эксперименты; жирные линии — теоретические расчеты

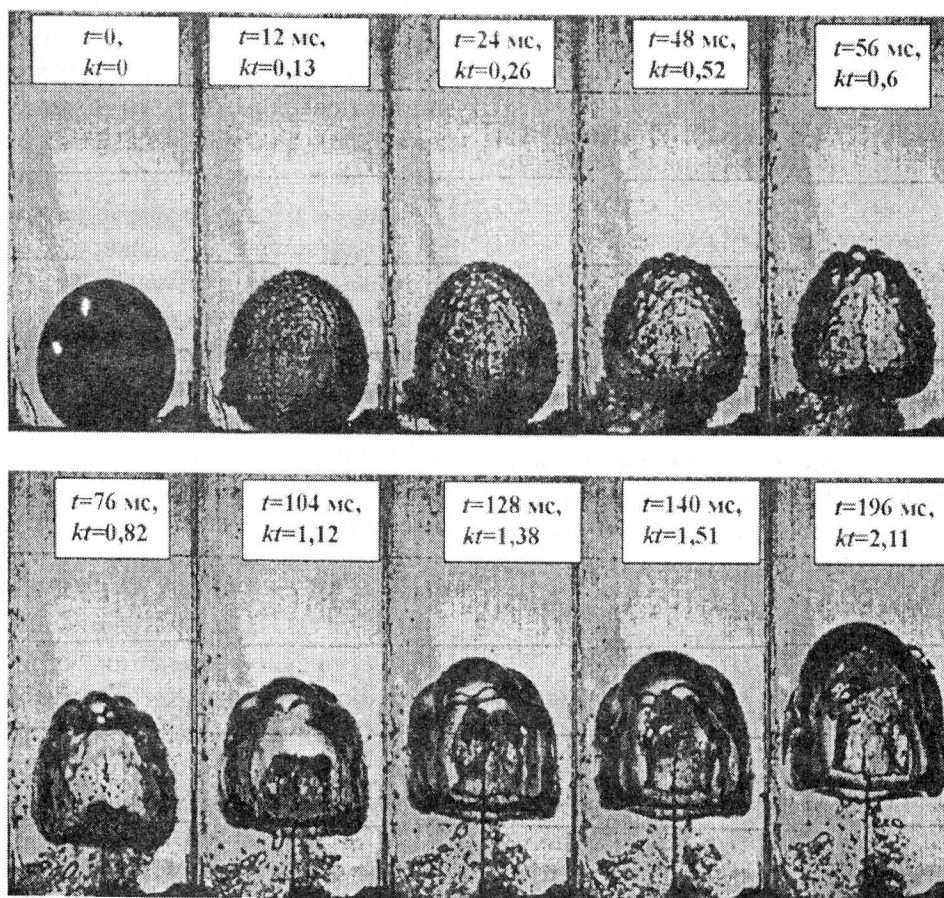


Рис. 6. Развитие возмущений на поверхности пузыря, всплывающего в канале квадратного сечения. Расстояние между горизонтальными линиями 10 см, объем пузыря 2,5 л, $k = \sqrt{g/R} \sim 10,79 \text{ с}^{-1}$

случае угол $\vartheta \ll 1$, поэтому можно записать $v_0 \approx kR\vartheta$, $k = \sqrt{g/R}$, $\sin \vartheta \approx \vartheta$, $\cos \vartheta \approx 1 - \vartheta^2/2$. Введя переменную $s = R\vartheta$ и направив ось z вертикально вверх, запишем уравнения [10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + ks \frac{\partial \eta}{\partial s} + 2k\eta &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0}; \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \Big|_{z=0} + ks \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} \Big|_{z=0} + g\eta + \frac{\sigma}{\rho} \Delta \eta &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $k = \sqrt{g/R}$. Введя возмущения вида

$$\begin{aligned} \eta(t, s, \varphi) &= AJ_p(ns) \cos p\varphi; \\ \Phi_1(t, s, \varphi, z) &= -BJ_p(ns) \cos p\varphi \exp(-nz) \end{aligned}$$

в цилиндрической системе координат z, s, φ , где J_p — функции Бесселя, $p = 0, 1, 2, \dots$, получим соотношения Бэтчелора для функций A, B, n [10]:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -2kA + nB; \\ \frac{dB}{dt} &= \left(g - \frac{\sigma n^2}{\rho}\right) A; \\ \frac{dn}{dt} &= -kn. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что эта система уравнений описывает возмущения только вблизи $\vartheta = 0$ и при длинах волн $\lambda < 2\pi R$. Кроме того, заметим, что система получена с учетом первого порядка величины угла ϑ .

Попробуем провести оценку эволюции стоячих возмущений на куполе пузыря по формулам Бэтчелора.

Сравнение результата представленного выше эксперимента с зависимостью, полученной Бэтчелором (рис. 7), позволяет сделать следующие выводы. Качественное согласие приближения Бэтчелора и эксперимента есть, хотя количественного нет. Мелкие возмущения в эксперименте исчезают быстрее, длина волны крупных возмущений растет медленнее, чем в расчетах.

Вследствие этого автор предпринял попытку ввести эмпирическую поправку в приведенные уравнения Бэтчелора. Кроме того, соотношения Бэтчелора были обобщены на произвольные (но не слишком большие) углы. Это было сделано посредством разложения $\vartheta + \Delta\vartheta$ (аналогично подходу Бэтчелора). Модификация соотношений Бэтчелора также показана на рис. 7. Видно, что соответствие с экспериментом улучшилось.

Приведем обобщенные и модифицированные автором соотношения для амплитуды возмущений A :

$$A = \tilde{A}(\vartheta, t) \exp\left(-ik_1 \int_0^t n dt'\right);$$

$$\frac{d\tilde{A}}{dt} = n\tilde{B} - k_3\tilde{A};$$

$$\frac{d\tilde{B}}{dt} = k_4\tilde{A} - g\frac{n^2}{n_c^2}\tilde{A} - l\frac{g}{nR}\tilde{A};$$

$$\frac{dn}{dt} + k_2n = 0;$$

$$k_1 = \sqrt{2gR(1 - \cos \vartheta)}; \quad k_2 = \sqrt{\frac{g}{2R} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{1 - \cos \vartheta}}};$$

$$k_3 = \sqrt{\frac{g}{2R} \frac{1 + 3 \cos \vartheta}{\sqrt{1 + \cos \vartheta}}}; \quad k_4 = g(3 \cos \vartheta - 2);$$

$$n_c = \sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}}.$$

Здесь l — эмпирическая константа, $l \approx 10$.

Полукачественная картина сглаживания возмущений, по мнению автора, передается этими соотношениями верно (в эксперименте характерное безразмерное время сглаживания возмущений составляет $kt = \sqrt{\frac{g}{R}}t = 1,5 \div 2$).

Рассмотрим полученную систему уравнений при $t \rightarrow \infty$. Легко показать, что она сводится к однородному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 \tilde{A}}{dt^2} + (k_2 + k_3) \frac{d\tilde{A}}{dt} + (k_2 k_3 + lk^2) \tilde{A} = 0,$$

которое имеет собственные числа (корни соответствующего характеристического многочлена)

$$\lambda_{1,2} = -0,5 \left(k_2 + k_3 \mp \sqrt{k_2^2 - 2k_2 k_3 + k_3^2 - 4lk^2} \right).$$

В приближении Бэтчелора (при $\vartheta = 0$ и $l = 0$) получаются значения

$$\lambda_{1,2} = -k; -2k.$$

Для больших времен амплитуда возмущения A ведет себя приблизительно как $\exp(\lambda_1 t)$, т. е. малые возмущения на куполе пузыря всегда убывают, что подтверждается экспериментом.

При угле $\vartheta = 0$ и радиусе $R \rightarrow \infty$ приведенные в данной статье соотношения для амплитуды A

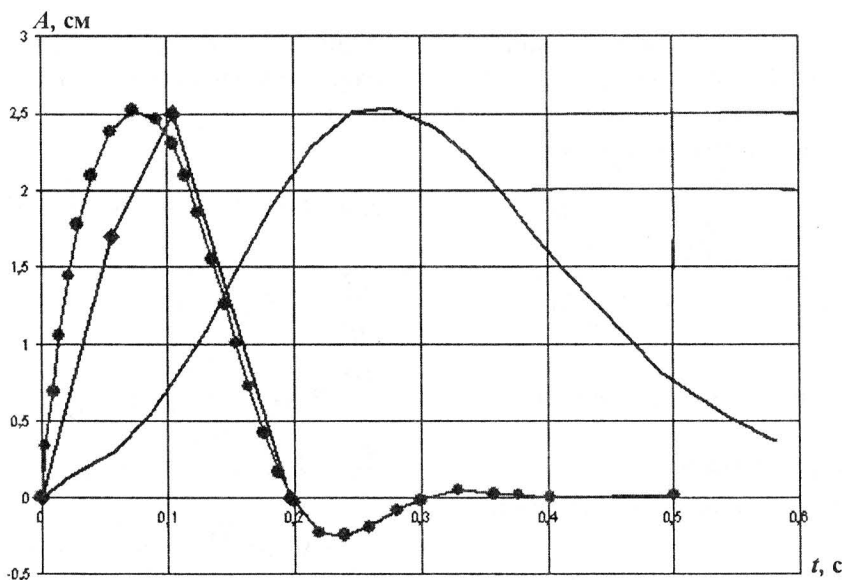


Рис. 7. Сравнение временных зависимостей амплитуд возмущений: $-\blacklozenge-$ — эксперимент; $- \bullet -$ — модификация соотношений Бэтчелора; $—$ — соотношения Бэтчелора

переходят в традиционные для плоского случая рэлей-тейлоровской неустойчивости [1]:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= n_0 B; \\ \frac{dB}{dt} &= \left(g - \frac{\sigma n_0^2}{\rho} \right) A, \end{aligned}$$

которые дают стандартный экспоненциальный рост амплитуды $A \sim \exp\left(\sqrt{n_0 g - \frac{n_0^3 \sigma}{\rho}} t\right)$ при $g > \sigma n_0^2 / \rho$ ($n_0 = 2\pi / \lambda_0 = \text{const}$, λ_0 — длина волны).

Подводя итоги, отметим следующее.

Как показали оценочные соотношения, приведенные в настоящей работе, можно качественно и даже полуколичественно объяснить некоторые эффекты эволюции возмущений вблизи купола крупного воздушного пузыря, поднимающегося в воде, зафиксированные в экспериментах [3–9].

Эволюцию малого стоячего возмущения на куполе крупного пузыря можно приближенно описать обыкновенными дифференциальными уравнениями, являющимися обобщением соотношений Дж. Бэтчелора [10] на случай не слишком больших углов. Полукачественная картина сглаживания возмущений, по мнению автора, передается этими соотношениями верно (в эксперименте характерное безразмерное время сглаживания возмущений составляет $kt = 1,5 \div 2$). На куполе пузыря коротковолно-

вые возмущения (с длиной волны $\lambda < \lambda_c = 1,71$ см) убывают вследствие действия поверхностного натяжения, расти могут только длинноволновые (при размере пузыря в несколько сантиметров). Такие возмущения эволюционируют со временем в сторону больших длин волн. Но и эти возмущения в конце концов при $t \rightarrow \infty$ убывают по амплитуде примерно пропорционально $\exp(\lambda_1 t)$, где $\lambda_1 \sim -k = -\sqrt{g/R}$ (g — ускорение свободного падения, R — радиус кривизны пузыря). Это связано с тем, что тангенциальный характер течения вблизи поверхности пузыря в совокупности с кривизной поверхности эффективно подавляет возмущения достаточно малой амплитуды. Поверхностное натяжение усиливает эффект подавления, особенно это касается коротковолновых возмущений.

Возмущения для ненулевых начальных углов ϑ_0 могут также просто сноситься потоком жидкости вниз со скоростью, определяемой скоростью этого потока (бегущие возмущения, рассмотренные в первой части статьи). Естественно, что время изменения их амплитуды ограничено временем сноса потоком жидкости, которое, как показано, неплохо описывается соотношением

$$\tau(\vartheta) = \ln\left(\frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta}\right) - \ln\left(\frac{1 - \cos \vartheta_0}{\sin \vartheta_0}\right),$$

где $\tau = kt$ — безразмерное время; ϑ — угол, отсчитываемый от верхушки пузыря (предполагается, что $\vartheta_0 > 0$).

Если же возмущение вблизи купола имеет достаточно большую начальную амплитуду, то, конечно, оно может успеть вырасти так, чтобы разрушить пузырь.

Очевидно, что эволюция возмущений на куполе пузыря весьма отлична от традиционной картины эволюции рэлей-тейлоровских возмущений в плоском случае в линейном приближении. Тем не менее при угле $\vartheta = 0$ и радиусе $R \rightarrow \infty$ приведенные в данной статье соотношения для амплитуды A переходят в традиционные, которые дают стандартный экспоненциальный рост амплитуды со временем.

Можно надеяться, что дальнейшие исследования в совокупности с развитием экспериментальной методики изучения возмущений дадут более подробное представление о различных способах эволюции формы поверхности крупного пузыря.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Е. Е. Мешкову (ВНИИЭФ, СарФТИ) за полезные критические замечания и разъяснения экспериментальной методики, Д. Е. Мешкову, В. С. Сиволгину, С. Рязанцеву и А. Кабаку за предоставленные фотографии, Г. Б. Красовскому (СарФТИ), А. А. Половникову и Е. А. Половникову (ВНИИЭФ) за предоставление необходимой экспериментальной информации, а также О. В. Ольхову (ВНИИЭФ) за интерес к работе и полезные замечания, учтенные при написании данной статьи.

Список литературы

1. *Batchelor G. K.* An introduction to fluid dynamics. Cambridge: the University Press, 1970.
2. *Жидов И. Г., Мешков Е. Е., Попов В. В., Рогачев В. Г., Толшмяков А. И.* Образование вихревого кольца при всплывании большого пузыря в воде // ПМТФ. 1977. № 3. С. 75–78.
3. *Сиволгин В. С., Мешков Д. Е.* Разработка методики проведения крупномасштабного подводного эксперимента на малой лабораторной модели // Вестник Саровского физтеха. 2004. № 7. С. 46–50.
4. *Мармышев В. В., Мешков Д. Е., Мешков Е. Е., Огнев Е. Л., Сиволгин В. С., Шаповалов Я. С.* Прохождение воздушного пузыря через границу двух взаимно нерастворимых жидкостей // Там же. 2005. № 9. С. 21–24.
5. *Мешков Е. Е., Мешков Д. Е., Сиволгин В. С.* Исследование влияния объема всплывающего пузыря на характер течения // Там же. № 8. С. 68–73.
6. *Базаров Ю. Б., Мешков Д. Е., Мешков Е. Е., Седов С. Ю., Сиволгин В. С.* Образование вихревого кольца при всплывании пузыря в сосуде квадратного течения // Там же. 2006. № 10. С. 33–40.
7. *Базаров Ю. Б., Долотов А. С., Игнатьев В. Ю., Мешков Е. Е., Сладков А. Д.* Разработка методики визуализации течения около всплывающего в воде воздушного пузыря // Там же. С. 41–46.
8. *Мешков Д., Сиволгин В.* Разработка методики исследования развития неустойчивости Рэля—Тейлора на поверхности всплывающего воздушного пузыря (науч. руководитель Мешков Е. Е.) // VI школьные Харитоновские чтения: тез. докл. Саров, 23–26 февраля 2006 г. С. 54–55.
9. *Рязанцев С., Кабак А.* Исследование влияния поверхностного натяжения жидкости на характер развития неустойчивости Рэля—Тейлора на куполе воздушного пузыря, всплывающего в воде (науч. руководитель Мешков Е. Е.) // VII школьные Харитоновские чтения: тез. докл. Саров, 1–4 марта 2007 г. С. 79.
10. *Batchelor G. K.* The stability of a large gas bubble rising through liquid // J. Fluid Mechanics. 1987. Vol. 184. P. 399–422.

Статья поступила в редакцию 29.05.08.