

УДК 519.6:533.7:536.46

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ПРИ СЧЕТЕ НОРМАЛЬНОЙ ДЕТОНАЦИИ НАВЯЗЫВАНИЕМ ЭНЕРГОВЫДЕЛЕНИЯ С ЗАДАННОЙ СКОРОСТЬЮ ФРОНТА

Ю. А. Бондаренко
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Рассматривается популярный метод счета нормальной детонации Чепмена—Жуге с помощью навязанного фронта мгновенного энерговыделения, бегущего с заданной массовой скоростью $\sigma = D_{\text{Жуге}}\rho_{\text{нач}}$. Описываются результаты расчетов на сходимость по лагранжевым разностным схемам второго порядка аппроксимации. Когда искусственная вязкость используется только на сжатии, на очень мелких сетках происходит "перескок" численного решения с решения типа Чепмена—Жуге на аномальное автомодельное решение с отошедшей вперед ударной волной сжатия и скачком разрежения в точке навязанного энерговыделения.

Ключевые слова: нормальная детонация, бегущее энерговыделение, автомодельное решение, скачок разрежения, допустимые скачки, вязкость, дисперсия.

Введение

При численном моделировании нормальной детонации твердых ВВ в газодинамических расчетах приходится использовать разностные сетки, размеры ячеек которых намного превышают ширину фронта горения. Поэтому, а также из-за сложности и неопределенности кинетики горения твердых взрывчатых веществ (ВВ) приходится применять сильно упрощенные модельные способы описания процесса детонации.

Популярным в многомерных газодинамических методиках является метод *контроля фронта* [1, 2]. Суть различных модификаций этого метода состоит в замене процесса горения ВВ на фронте детонации заданным явно источником тепловой энергии нулевой толщины, бегущим по газу с заданной массовой скоростью, соответствующей скорости детонационной волны. На практике метод контроля фронта обычно дополняется каким-нибудь упрощенным описанием реальной кинетики, например по закону Аррениуса или с помощью выжигания ВВ по достижении плотности Жуге.

В настоящей работе рассмотрим, к чему приводит метод контроля фронта детонации в его чистом виде, без использования каких-либо других механизмов горения ВВ, и дадим объяснение появлению наблюдаемых в расчетах аномальных решений.

Толчком к данной работе явился лагранжев расчет, в котором на большом числе точек сетки моделировалось распространение детонационной волны методом контроля фронта. В этом расчете использовались квадратичная и линейная искусственные вязкости, "работающие" только на сжатии. На рис. 1 и 2 приведены полученные в расчете профили плотности. Рассмотренная задача — автомодельная, с безразмерной автомодельной переменной $\xi = x/(D_{\text{Жуге}}t)$, поэтому ее результаты на разные моменты времени эквивалентны проведению расчетов на разных сетках, с числом ячеек, равным числу ячеек в возмущенной области. Из приведенных на рис. 1 и 2 результатов следует, что при измельчении сетки наблюдается сходимость к предельному численному решению, которое качественно отличается от решения типа Чепмена—Жуге. Этим объясняется особый интерес к обнаруженному явлению.

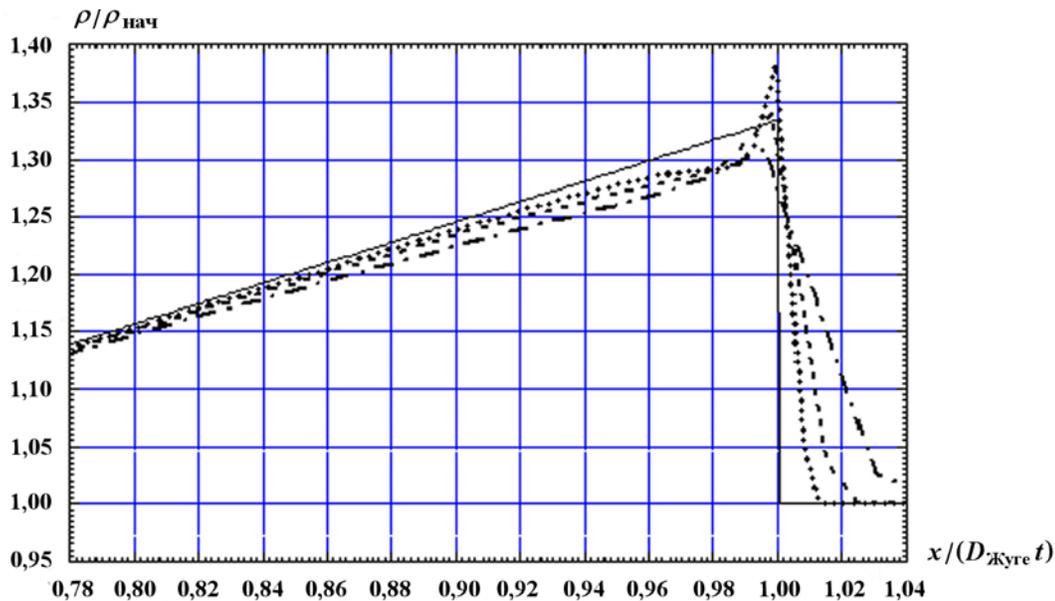


Рис. 1. Плотность в окрестности фронта детонационной волны, расчет 1 с вязкостью только на сжатии ($A_2 = 4$; $A_1 = 0,5$; $A_3 = 0$); $\rho_{Жуге}/\rho_{нач} = 4/3$; M_D — число ячеек, пройденное детонационной волной в точном решении: $-\cdot-$ — $M_D = 50$; $- - -$ — $M_D = 100$; \dots — $M_D = 200$; $—$ — точное решение

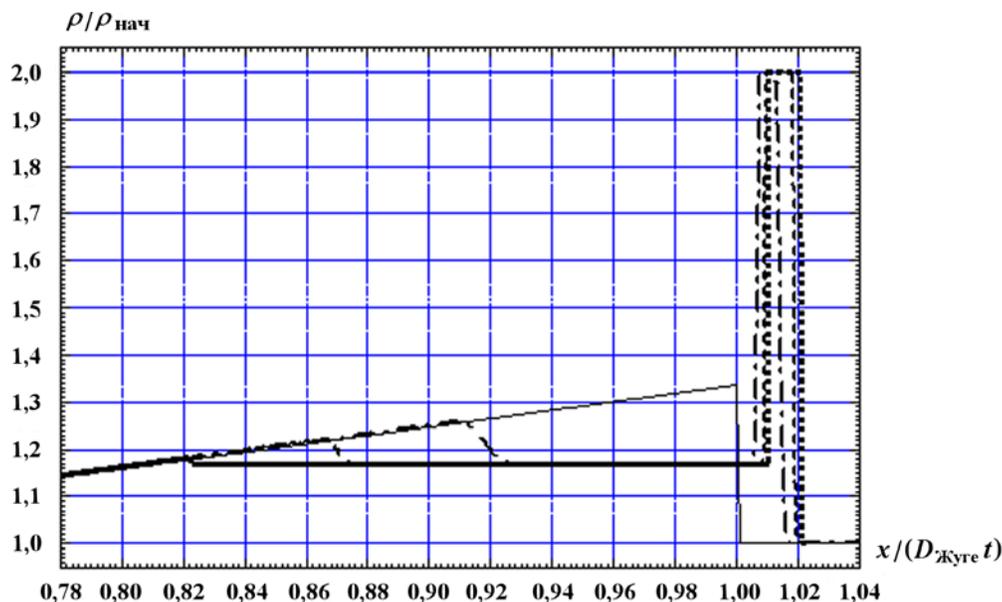


Рис. 2. Плотность в окрестности фронта детонационной волны для большого числа точек, расчет 1 с вязкостью только на сжатии ($A_2 = 4$; $A_1 = 0,5$; $A_3 = 0$); $\rho_{Жуге}/\rho_{нач} = 4/3$: $-\cdot-$ — $M_D = 1000$; $- - -$ — $M_D = 3000$; \dots — $M_D = 40000$; $—$ — точное решение

Постановка и результаты расчетов плоской детонации методом контроля фронта с разными искусственными вязкостями

ВВ в начальный момент занимает слой $0 \leq x \leq L = 10,0$, начальная плотность ВВ $\rho_0 = 1,0$, начальная удельная внутренняя энергия и начальная скорость нулевые: $E_0 = 0$; $u_0 = 0$. Уравнения состояния ВВ и продуктов взрыва (ПВ) одинаковые и определены формулой

$$p = (\gamma - 1)\rho E, \quad \gamma = 3,0. \quad (1)$$

Инициирование детонации начинается на левой границе в точке $x_{\text{лев}} = 0$, калорийность единицы массы ВВ равна $Q_0 = 6,25$. Такое значение калорийности подобрано для того, чтобы массовая скорость детонационной волны была равна $\sigma = \rho D_{\text{Жуге}} = 10,0$. На левой лагранжевой границе, в которой начинается детонация, задано нулевое граничное давление $P_{\text{гран}} = 0$.

Для нормальной детонации Чепмена—Жуге параметры газа на фронте детонационной волны (точнее, сразу за фронтом детонационной волны) и точное решение описываются (в переменных Эйлера) хорошо известными формулами (будем такое решение называть *правильным*, или *точным*, или *решением Жуге*)

$$D = D_{\text{Жуге}} = \sqrt{2(\gamma^2 - 1) Q_0} = 10,0; \quad (2)$$

$$\rho_{\text{Жуге}} = \frac{\gamma + 1}{\gamma} \rho_0 = \frac{4}{3}; \quad (3)$$

$$P_{\text{Жуге}} = \frac{\rho_0 (D_{\text{Жуге}})^2}{\gamma + 1} = 2(\gamma - 1) \rho_0 Q_0 = 25,0; \quad (4)$$

$$u_{\text{Жуге}} = \frac{D_{\text{Жуге}}}{\gamma + 1} = \sqrt{2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} Q_0 = 2,5; \quad (5)$$

$$E_{\text{Жуге}} = \frac{P_{\text{Жуге}}}{(\gamma - 1) \rho_{\text{Жуге}}} = \frac{\gamma (D_{\text{Жуге}})^2}{(\gamma - 1) (\gamma + 1)^2} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} Q_0 = 9,375; \quad (6)$$

$$c_{\text{Жуге}} = \sqrt{\gamma (\gamma - 1) E_{\text{Жуге}}} = \frac{\gamma}{\gamma + 1} D_{\text{Жуге}} = D_{\text{Жуге}} - u_{\text{Жуге}} = \sqrt{2\gamma^2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} Q_0 = 7,5; \quad (7)$$

$$\rho(t, x) = \begin{cases} \rho_0, & x > D_{\text{Жуге}} t; \\ \rho_{\text{Жуге}} \left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(1 - \frac{x}{D_{\text{Жуге}} t} \right) \right]^{\frac{2}{\gamma - 1}}, & -\frac{D_{\text{Жуге}}}{\gamma - 1} t \leq x \leq D_{\text{Жуге}} t; \end{cases} \quad (8)$$

$$P(t, x) = \begin{cases} 0, & x > D_{\text{Жуге}} t; \\ P_{\text{Жуге}} \left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(1 - \frac{x}{D_{\text{Жуге}} t} \right) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}, & -\frac{D_{\text{Жуге}}}{\gamma - 1} t \leq x \leq D_{\text{Жуге}} t; \end{cases} \quad (9)$$

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x > D_{\text{Жуге}} t; \\ u_{\text{Жуге}} \left[1 - 2 \left(1 - \frac{x}{D_{\text{Жуге}} t} \right) \right], & -\frac{D_{\text{Жуге}}}{\gamma - 1} t \leq x \leq D_{\text{Жуге}} t; \end{cases} \quad (10)$$

$$E(t, x) = \begin{cases} 0, & x > D_{\text{Жуге}} t; \\ E_{\text{Жуге}} \left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(1 - \frac{x}{D_{\text{Жуге}} t} \right) \right]^2, & -\frac{D_{\text{Жуге}}}{\gamma - 1} t \leq x \leq D_{\text{Жуге}} t. \end{cases} \quad (11)$$

Все расчеты проведены в одномерной лагранжевой постановке. Для численного моделирования детонации использовался метод контроля фронта в следующей редакции, которую можно более точно назвать методом *навязанной массовой скорости фронта волны энерговыделения*.

В одномерном плоском случае на каждом шаге по времени $t^n < t < t^{n+1}$ в интервале $\sigma t^n \leq m \leq \sigma t^{n+1}$, где m — лагранжева массовая координата, выделяется энергия горения ВВ, равная $Q_0(\sigma t^{n+1} - \sigma t^n)$. Эта энергия горения ВВ добавляется каждый раз к внутренней энергии соответствующих ячеек сетки по очевидным формулам. Соответственно количеству сгоревшего ВВ меняются концентрации ВВ и ПВ (в данном случае это несущественно, так как в проведенных расчетах ВВ и ПВ имеют одинаковые уравнения состояния).

В большинстве расчетов использовалась полностью консервативная версия разностной схемы типа *крест* [3, 4], для проверки влияния разностной схемы некоторые расчеты были повторены по полностью консервативной вариационной разностной схеме с искусственной антидисперсией, которая описана в работе [5].

В таблице приведен полный список расчетов с указанием изменяемых параметров. В этой таблице использованы следующие обозначения:

- A_1 — безразмерный коэффициент линейной искусственной вязкости на сжатии (в разностной схеме *крест*);
- A_2 — безразмерный коэффициент квадратичной искусственной вязкости на сжатии (в разностной схеме *крест*);
- A_3 — безразмерный коэффициент линейной искусственной вязкости на разрежении (в разностной схеме *крест*);
- χ_0 — число Куранта, или коэффициент запаса по Куранту, определяющий величину шага по времени в условиях устойчивости [6];
- χ_D — получившееся в расчете среднее *детонационное* число Куранта, определяемое формулой $\chi_D = \sigma_{\text{Журе}}(t/N)/\Delta t$, вычислено по последнему моменту времени $t = 0,8$, где N есть число шагов по времени к этому моменту времени.

В расчетах использовалась равномерная начальная сетка с полным числом ячеек $M = 10\,000$, иногда для контроля число ячеек сетки увеличивалось до $M = 50\,000$. Как уже говорилось, в силу автомодельности задачи (с безразмерным автомодельным аргументом $\xi = x/(Dt)$) один расчет эквивалентен большой серии расчетов на сходимость. В любой выбранный момент времени в качестве характерного числа точек использовалось число ячеек сетки, которое "захвачено" возмущением: $M_D(t) = \sigma t/\Delta t = Dt/\Delta x$.

Для однозначного понимания смысла безразмерных коэффициентов искусственной вязкости A_1 , A_2 и A_3 приведем формулы, определяющие значение вязкого давления в разностной схеме типа *крест*:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{j+1/2}^{n+1} = & A_{2j+1/2}^{n+1} \rho_{j+1/2}^n \left(\rho_{j+1/2}^{n+1} \right)^2 \left(x_{j+1}^{n+1} - x_j^{n+1} \right)^2 \left(\left(\frac{\partial u}{\rho \partial x} \right)_{j+1/2}^{n+1} \right)^2 - \\ & - A_{1j+1/2}^{n+1} \rho_{j+1/2}^n \left(x_{j+1}^{n+1} - x_j^{n+1} \right) C_{j+1/2} \left(\rho_{j+1/2}^n, E_{j+1/2}^{n+1/2} \right) \left(\frac{\partial u}{\rho \partial x} \right)_{j+1/2}^{n+1}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$A_{2j+1/2}^{n+1} = \begin{cases} 0, & \left(\frac{\partial u}{\rho \partial x} \right)_{j+1/2}^{n+1} \geq 0; \\ A_2, & \left(\frac{\partial u}{\rho \partial x} \right)_{j+1/2}^{n+1} < 0; \end{cases} \quad (13)$$

Параметры постановки плоских расчетов

Номер расчета	A_1	A_2	A_3	χ_0	χ_D	Методические особенности
1	0,5	4,0	0	0,97	0,18	<i>Крест</i> без вязкости на разрежении
2	0,1	4,0	0	0,97	0,18	<i>Крест</i> без вязкости на разрежении
3	0	4,0	0	0,97	0,18	<i>Крест</i> без линейной вязкости
4	0,5	4,0	0	0,1	0,0024	<i>Крест</i> без вязкости на разрежении, шаг по времени сильно уменьшен
5	—	—	—	0,97	0,18	Схема с искусственной антидисперсией, искусственная вязкость Куропатенко—Христенсена работает только на сжатии
6	0,5	4,0	0,5	0,97	0,23	<i>Крест</i> с линейной вязкостью, работающей на разрежении
7	—	—	—	0,97	0,26	Схема с искусственной антидисперсией, искусственная вязкость Куропатенко—Христенсена работает одинаково на сжатии и на разрежении
8	0	0	0	0,97	0,5	<i>Крест</i> совсем без вязкости
9	—	—	—	0,97	0,5	Схема с искусственной антидисперсией, искусственная вязкость отключена совсем

$$A_{1j+1/2}^{n+1} = \begin{cases} A_3, & \left(\frac{\partial u}{\rho \partial x}\right)_{j+1/2}^{n+1} \geq 0; \\ A_1, & \left(\frac{\partial u}{\rho \partial x}\right)_{j+1/2}^{n+1} < 0; \end{cases} \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\rho \partial x}\right)_{j+1/2}^{n+1} = (a+1) \frac{\left(x_{j+1}^{n+1}\right)^a + \left(x_j^{n+1}\right)^a}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1/2} - u_j^{n+1/2}}{\Delta m_{j+1/2}}, \quad (15)$$

где $a = 0$ в плоском случае, $a = 1$ в цилиндрическом случае и $a = 2$ в сферическом случае.

В расчетах по разностной схеме с искусственной антидисперсией использовалась вязкость В. Ф. Куропатенко [7] с ограничителем вязкости Христенсена [8] (подробно такая вязкость Куропатенко—Христенсена описана также в [9]), при этом всегда наравне с антидисперсионными слагаемыми применялось сглаживание скорости третьего порядка малости, коэффициент которого согласован с искусственной антидисперсией [5].

Полученные в расчете 1 (см. таблицу) профили плотности приведены на рис. 1, 2; профили безразмерного давления приведены на рис. 3, 4. Уменьшение коэффициента линейной вязкости, работающей только на сжатии, в расчетах 2 и 3 не изменило картины: в этих расчетах аналогично расчету 1 при измельчении сетки произошел "перескок" численного решения с правильного решения (2)—(11) на аномальную предельную структуру. В расчете 4, в котором шаг по времени получился меньше по сравнению с расчетом 1 в 75 раз, также ничего не изменилось.

На рис. 5 показаны полученные в расчетах 1—5 на одинаковые моменты времени предельные профили плотности, на рис. 6 — предельные профили давления. В расчетах по разностной схеме с искусственной антидисперсией автомодельные координаты фронта головной ударной волны и фронта скачка разрежения (точки навязанного энерговыделения) заметно отличаются от полученных по разностной схеме *крест*. Кроме того, в расчете 5 с искусственной антидисперсией перескок численного решения с правильного решения (2)—(11) на аномальную предельную структуру произошел на заметно меньшем числе точек сетки, что в принципе можно объяснить как лучшей точностью этой разностной схемы по сравнению со схемой *крест*, так и уменьшением аппроксимационного увеличения энтропии при использовании ограничителя вязкости Христенсена.

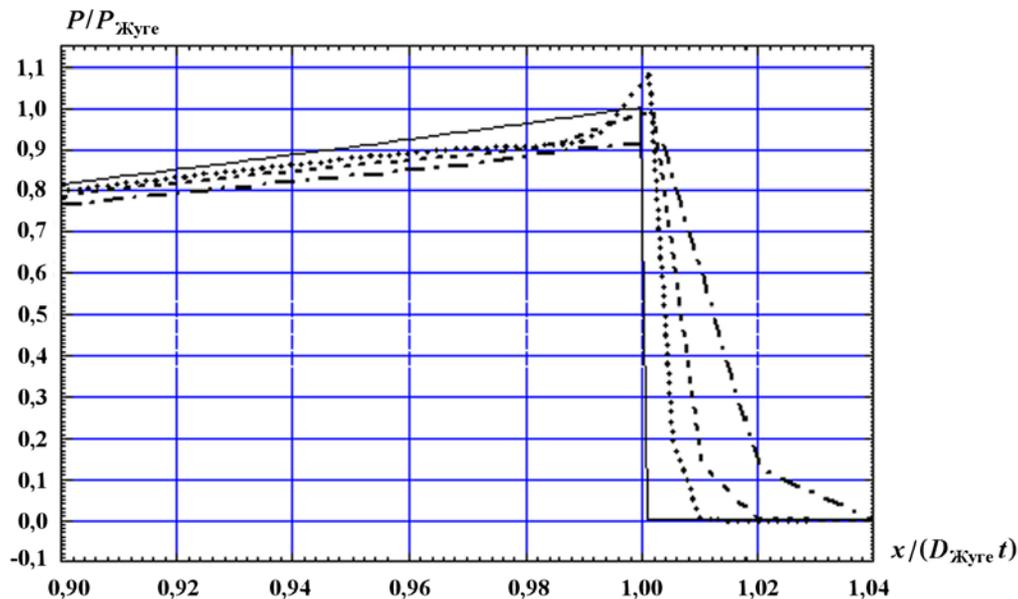


Рис. 3. Давление в окрестности фронта детонационной волны, расчет 1 с вязкостью только на сжатии ($A_2 = 4$; $A_1 = 0,5$; $A_3 = 0$): \cdots — $M_D = 50$; $---$ — $M_D = 100$; \dots — $M_D = 200$; $—$ — точное решение

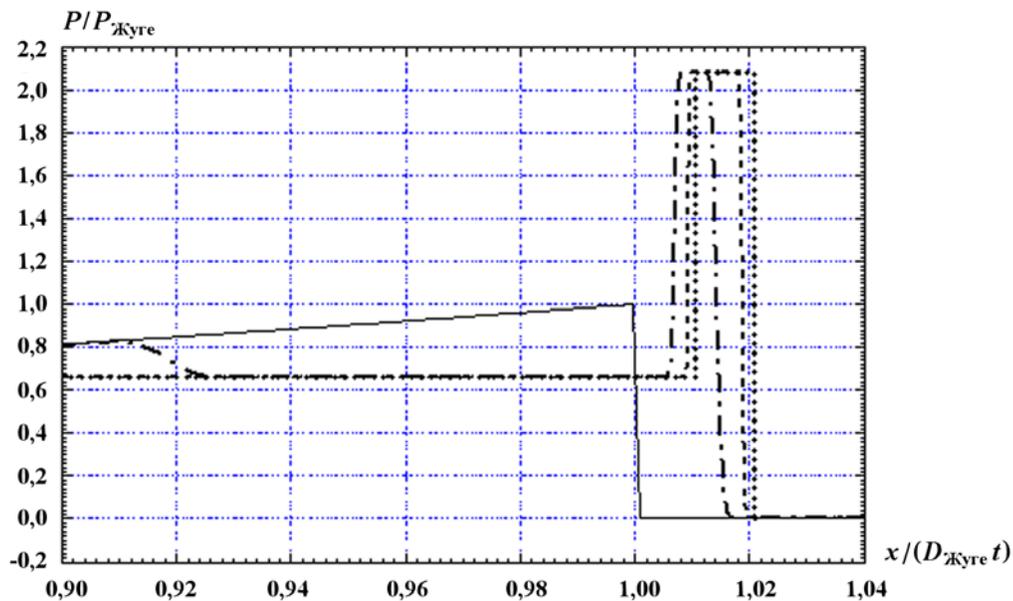


Рис. 4. Давление в окрестности фронта детонационной волны для большого числа точек, расчет 1 с вязкостью только на сжатии ($A_2 = 4$; $A_1 = 0,5$; $A_3 = 0$): — · — — $M_D = 1000$; — — — — $M_D = 3000$; · · · — $M_D = 40000$; — — — — точное решение

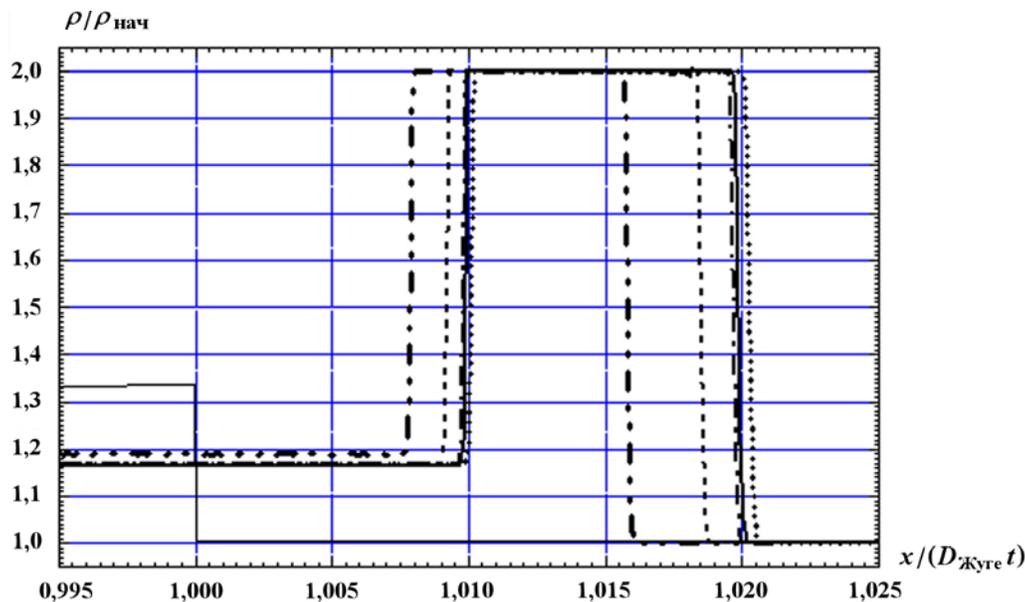


Рис. 5. Предельный профиль плотности в окрестности фронта детонационной волны в расчетах 1–5 с разными вязкостями, работающими только на сжатии, $\rho_{жуге}/\rho_{нач} = 4/3$, $M_D = 8000$: — — — — точное решение; · · · — расчет 1; — · — — расчет 2; — — — — расчет 3; — — — — расчет 4; — · · — — расчет 5

Совершенно другая картина получается в расчетах 6 и 7, в которых искусственная вязкость работала как при сжатии, так и при разрежении.

В расчете 6 по схеме типа *крест* профили газодинамических величин по мере измельчения сетки приближаются к правильному решению (2)–(11), намеков на перескок на аномальное решение не наблюдается (рис. 7). Качественно это легко объясняется — линейная искусственная вязкость, постоянно действующая на разрежении, "запрещает" скачки разрежения в автомодельном решении [10].

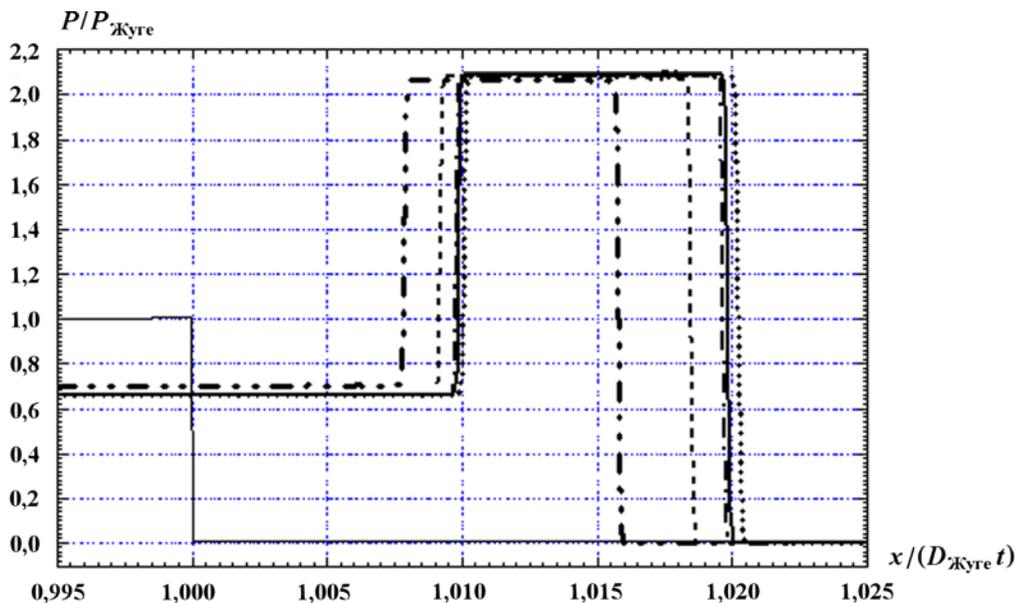


Рис. 6. Предельный профиль давления в окрестности фронта детонационной волны в расчетах 1–5 с разными вязкостями, работающими только на сжатии, $M_D = 8000$: — — точное решение; \dots — расчет 1; $-\cdot-$ — расчет 2; $- - -$ — расчет 3; $—$ — расчет 4; $-\cdot-\cdot-$ — расчет 5

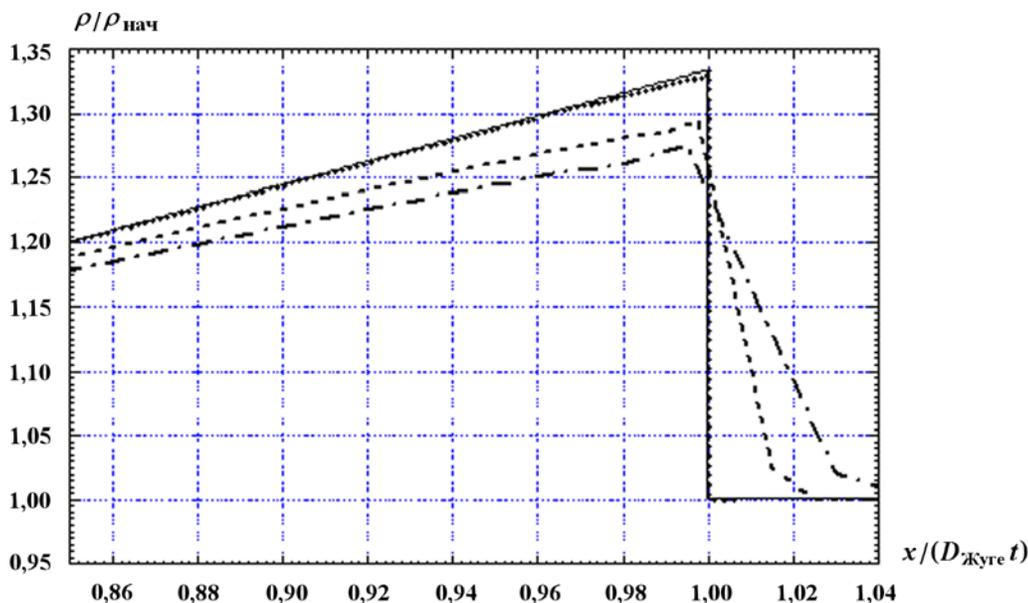


Рис. 7. Плотность в окрестности фронта детонационной волны, расчет 6 с линейной вязкостью, работающей на разрежении ($A_2 = 4$; $A_1 = A_3 = 0,5$), $\rho_{Жуге}/\rho_{нач} = 4/3$: $-\cdot-$ — $M_D = 50$; $- - -$ — $M_D = 100$; \dots — $M_D = 8000$; — — точное решение

В расчете 7 (рис. 8) по схеме с искусственной антидисперсией и с вязкостью Куропатено—Христенсена также отсутствует перескок на anomальное решение, но численное решение обладает ярко выраженной немонотонностью всех газодинамических величин на фронте волны энерговыделения. Причина заключается в использовании ограничителя вязкости Христенсена [8]. Работающая на разрежении вязкость Куропатенко запрещает появление скачка разрежения на фронте волны энерговыделения. Но на линейном профиле скорости в автомодельной волне разрежения (10) ограничитель вязкости зануляет искусственную вязкость, создавая предпосылки для возникновения скачка разрежения и перескока на anomальное предельное решение. Борьба этих двух тенденций и приводит к появлению локализованной всего в одной точке сетки немонотонности численных профилей.

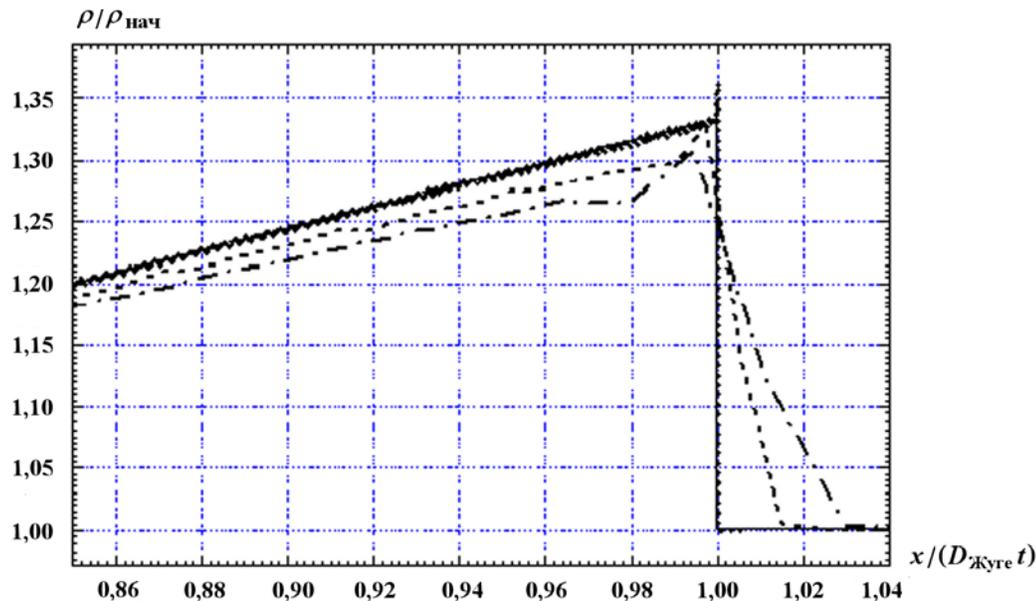


Рис. 8. Плотность в окрестности фронта детонационной волны, расчет 7 с вязкостью Куропатенко—Христенсена, одинаково работающей на сжатии и разрежении (схема с искусственной антидисперсией), $\rho_{\text{Жуге}}/\rho_{\text{нач}} = 4/3$: — · — — $M_D = 50$; — — — — $M_D = 100$; · · · — $M_D = 8000$; — — — — точное решение

В силу экстремальных свойств скорости производства энтропии в точке Жуге [11] можно ожидать, что для получения параметров Жуге на фронте детонационной волны и тем самым правильного автомодельного решения (2)—(11) с нормальной детонацией Чепмена—Жуге надо минимизировать счетные диссипативные механизмы, увеличивающие энтропию. Для проверки этой логики и "на всякий случай" были проведены расчеты 8 и 9, в которых искусственные вязкости были "отключены" совсем (они не работали даже на сжатии). Оказалось, что, действительно, без искусственной вязкости можно обойтись. Полученные в этих расчетах профили плотности приведены на рис. 9, 10.

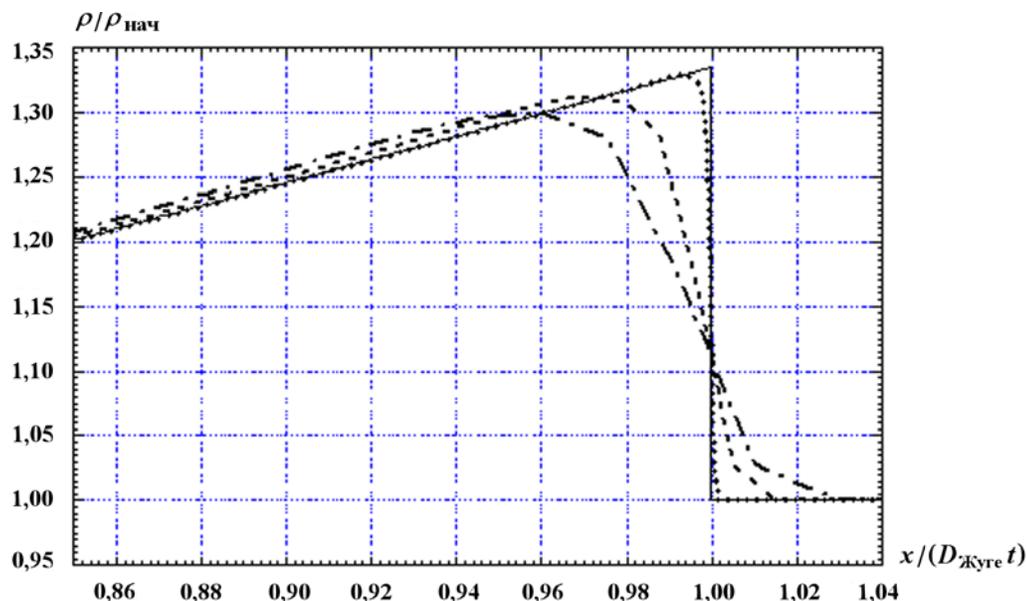


Рис. 9. Плотность в окрестности фронта детонационной волны, расчет 8 (крест без искусственных вязкостей), $\rho_{\text{Жуге}}/\rho_{\text{нач}} = 4/3$: — · — — $M_D = 50$; — — — — $M_D = 100$; · · · — $M_D = 1000$; — — — — точное решение

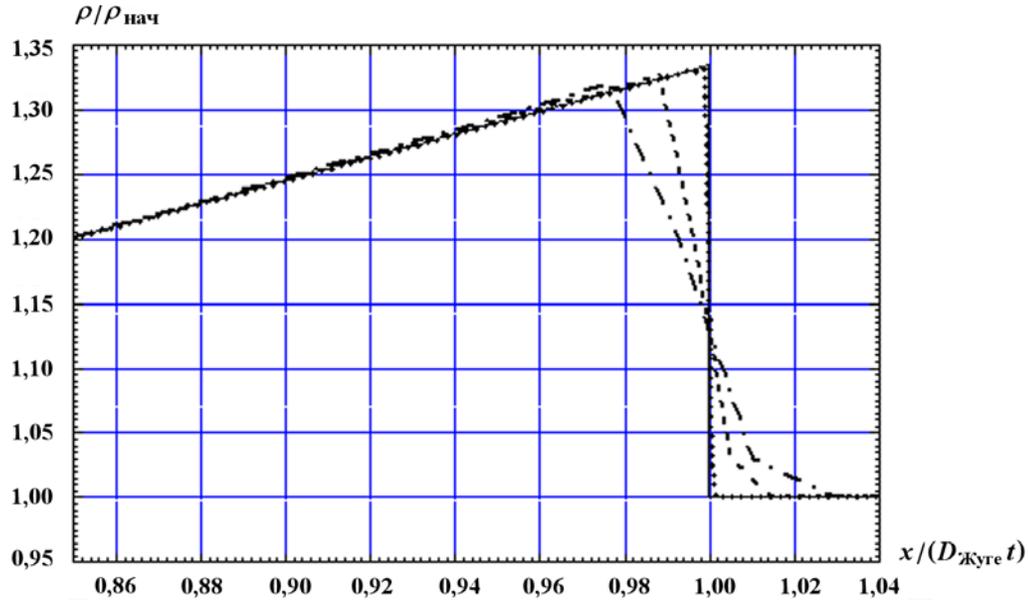


Рис. 10. Плотность в окрестности фронта детонационной волны, расчет 9 (схема с искусственной антидисперсией без искусственной вязкости), $\rho_{\text{Жуке}}/\rho_{\text{нач}} = 4/3$: — · — — $M_D = 50$; — — — — $M_D = 100$; ··· — $M_D = 1000$; — — — — точное решение

Как видно из сравнительных данных, приведенных на рис. 11, при полном отключении вязкости точность описания правильного решения (2)—(11) с нормальной детонацией получается даже выше, чем при использовании искусственной вязкости на разрежении. Отметим, что в разностной схеме *крест* в расчете 8 без искусственных вязкостей детонационная волна размазана больше, чем в расчете 6 с вязкостью, работающей одновременно на сжатии и на разрежении: на сетке с $M_D \geq 200$ в расчете 8 на размазанный фронт приходится 5–6 ячеек, а в расчете 6 — только 2.

Описанные здесь результаты (перескок на аномальную предельную структуру, параметры этой структуры и зависимость этого перескока от способа использования искусственных вязкостей) по-

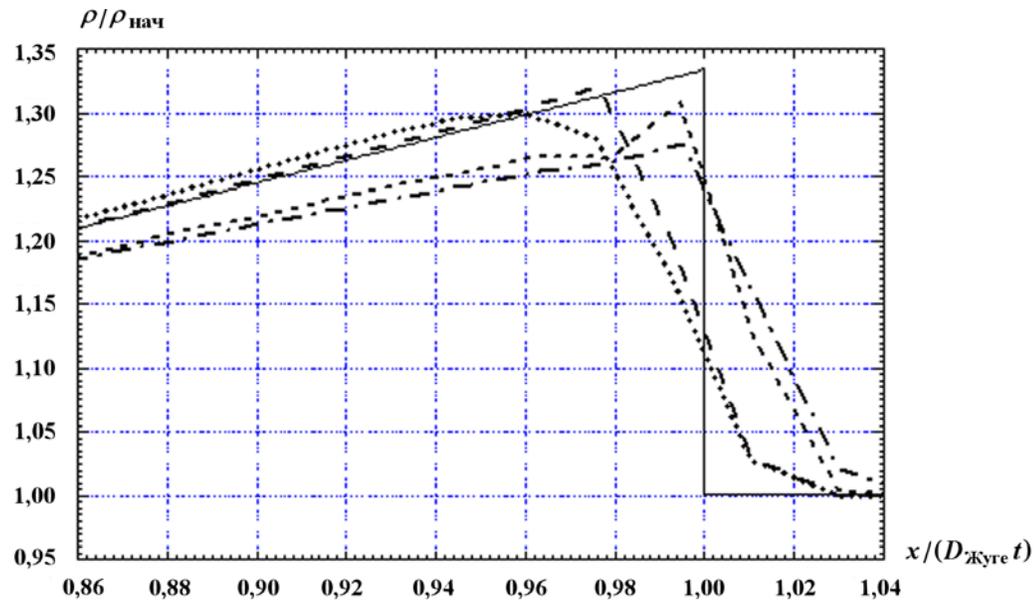


Рис. 11. Плотность в окрестности фронта детонационной волны, расчеты 6–9 на самой грубой сетке, $M_D = 50$, $\rho_{\text{Жуке}}/\rho_{\text{нач}} = 4/3$: — · — — расчет 6; — — — — расчет 7; ··· — расчет 8; — — — — расчет 9; — — — — точное решение

вторяются и в расчетах с заданным на левой лагранжевой границе ненулевым давлением $P_{\text{гран}} \leq P_{\text{Жуге}}$, только при $P_{\text{гран}} > P_2$ (см. обозначения на рис. 12) левее скачка разрежения вместо автомодельной волны разрежения появляется дополнительная ударная волна сжатия.

Главный результат описанных здесь расчетов: при использовании искусственной вязкости только на сжатии численное решение с навязанным движением фронта волны энерговыделения при измельчении сетки перескакивает с правильного решения (2)—(11) с нормальной детонацией на аномальное предельное решение, в котором вперед отрывается ударная волна с предельным сжатием, а на фронте волны энерговыделения реализуется скачок разрежения. Этот перескок на аномальное предельное решение удастся устранить, введя искусственную вязкость на разрежении или вообще отключив все виды искусственной вязкости, в том числе и на сжатии.

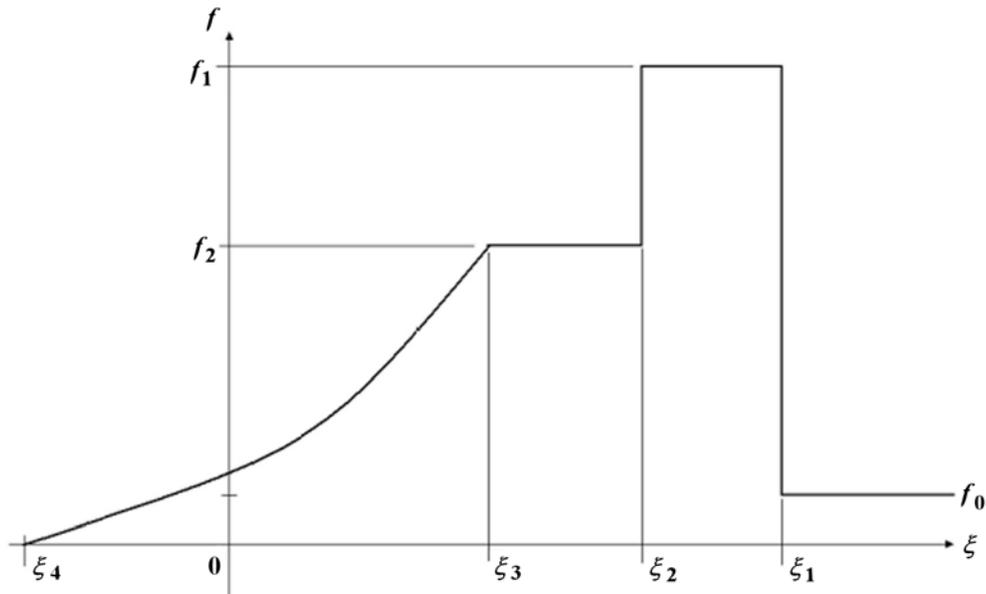


Рис. 12. Схематический вид автомодельного решения с ударной волной разрежения в точке энерговыделения и отошедшей вперед ударной волной сжатия; $\xi_1 = X_1/(D_{\text{Жуге}}t)$ — фронт отошедшей вперед ударной волны; $\xi_2 = X_2/(D_{\text{Жуге}}t)$ — фронт энерговыделения; $\xi_3 = X_3/(D_{\text{Жуге}}t)$ — передний фронт автомодельной волны разрежения, $\xi_4 = X_4/(D_{\text{Жуге}}t)$ — левая лагранжева граница с заданным на ней нулевым давлением

Аналитическое описание аномальных предельных решений с ударной волной разрежения на фронте волны навязанного энерговыделения, бегущего с заданной массовой скоростью

Полученная в расчетах аномальная предельная структура с отрывом сильной ударной волны сжатия и образованием скачка разрежения в точке навязанного энерговыделения вообще хорошо известна. Такого сорта решения изучаются в теории горения и детонации под названием двухфронтовых структур [12]. Похожие решения описывают распространение фронта пламени, в котором находится скачок разрежения [13]. Объяснения требует происхождение таких структур при моделировании детонации Чепмена—Жуге методом контроля фронта и обнаруженные в расчетах зависимости от искусственной вязкости.

Здесь построим обычным способом однопараметрическое семейство автомодельных решений с автомодельной переменной $\xi = x/(D_{\text{Жуге}}t)$, которое имеет вид, показанный схематически (без соблюдения масштабов) на рис. 12.

Энерговыделение осуществляется в точке с автомодельной координатой ξ_2 , которая движется (в обычных координатах) с заданной массовой скоростью $\sigma = \rho_0 D_{\text{Жуге}}$, однако скорость движения этой точки в эйлеровых X -координатах $D_2 = \xi_2 D_{\text{Жуге}}$ будет отличаться от заданной скорости

$D_{\text{Жуге}}$ детонационной волны, так как плотность уже отличается от начальной плотности газа. Точка с автомодельной координатой ξ_1 описывает движение сильной ударной волны сжатия со скоростью $D_1 = \xi_1 D_{\text{Жуге}}$. В интервале $\xi_4 < \xi < \xi_3$ находится обычная изэнтропическая автомодельная волна разрежения, общий вид которой хорошо известен. Точка ξ_3 , в которой происходит переход с постоянного течения на автомодельную волну разрежения, перемещается в переменных Эйлера со скоростью $u_2 + c_2$, где c_2 есть изэнтропическая скорость звука в этой точке и в интервале $\xi_3 < \xi < \xi_2$, а u_2 есть скорость газа в том же интервале.

Считая невозмущенный газ перед фронтом ударной волны холодным ($E_0 = 0$, $P_0 = 0$) и покоящимся ($u_0 = 0$), запишем уравнения Ренкина—Гюгонио на фронте ударной волны и на скачке разрежения в точке навязанного энерговыделения (с заданной массовой скоростью $\sigma = \rho_0 D_{\text{Жуге}}$) в виде

$$\rho_1 u_1 = D_1 (\rho_1 - \rho_0); \quad (16)$$

$$D_1 \rho_1 u_1 = \rho_1 (u_1)^2 + P_1; \quad (17)$$

$$-E_1 + \frac{P_1}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} \right) = 0; \quad (18)$$

$$D_1 = \xi_1 D_{\text{Жуге}}; \quad (19)$$

$$\rho_1 (D_2 - u_1) = \rho_2 (D_2 - u_2) = \sigma; \quad (20)$$

$$(P_1 - P_2) + \sigma^2 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) = 0; \quad (21)$$

$$(E_1 - E_2) + \frac{P_1 + P_2}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + Q_0 = 0; \quad (22)$$

$$D_2 = \xi_2 D_{\text{Жуге}}. \quad (23)$$

Для произвольного параметра $\xi_1 > 1$ из уравнений (16)–(23) в случае уравнения состояния (1) получаем параметры газа в интервалах $\xi_2 < \xi < \xi_1$ и $\xi_3 < \xi < \xi_2$:

$$\rho_1 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0; \quad (24)$$

$$u_1 = \frac{2\xi_1}{\gamma + 1} D_{\text{Жуге}}; \quad (25)$$

$$P_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 (D_{\text{Жуге}})^2 (\xi_1)^2; \quad (26)$$

$$\xi_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \xi_1; \quad (27)$$

$$u_2 = \left(\xi_2 - \frac{\rho_0}{\rho_2} \right) D_{\text{Жуге}}; \quad (28)$$

$$P_2 = \sigma^2 \left(\frac{\gamma - 1 + 2(\xi_1)^2}{\gamma + 1} \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_2} \right). \quad (29)$$

При этом для плотности ρ_2 получается квадратное уравнение, имеющее два вещественных корня

$$\frac{\rho_0}{\rho_2} = 2\gamma \frac{\frac{\gamma + 1}{2} + \left((\xi_1)^2 - 1 \right) \pm \sqrt{\left((\xi_1)^2 - 1 \right) \left((\xi_1)^2 + 1/\gamma \right)}}{(\gamma + 1)^2}. \quad (30)$$

Автомодельная волна разрежения в области $\xi_4 \leq \xi \leq \xi_3$, $\xi_4 D_{\text{Жуге}} t \leq x \leq \xi_3 D_{\text{Жуге}} t$ определяется формулами

$$u(t, x) = u_2 - \frac{2}{\gamma + 1} \left(\xi_3 - \frac{x}{D_{\text{Жуге}} t} \right) D_{\text{Жуге}}, \quad \xi_4 D_{\text{Жуге}} t \leq x \leq \xi_3 D_{\text{Жуге}} t; \quad (31)$$

$$\rho(t, x) = \rho_2 \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(\frac{x}{D_{\text{Жуге}} t} - \xi_4 \right) \frac{D_{\text{Жуге}}}{c_2} \right]^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad \xi_4 D_{\text{Жуге}} t \leq x \leq \xi_3 D_{\text{Жуге}} t; \quad (32)$$

$$P(t, x) = P_2 \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(\frac{x}{D_{\text{Жуге}} t} - \xi_4 \right) \frac{D_{\text{Жуге}}}{c_2} \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad \xi_4 D_{\text{Жуге}} t \leq x \leq \xi_3 D_{\text{Жуге}} t; \quad (33)$$

$$\xi_3 = \frac{u_2 + c_2}{D_{\text{Жуге}}}; \quad (34)$$

$$\xi_4 = \frac{u_2 - \frac{2}{\gamma-1} c_2}{D_{\text{Жуге}}}; \quad (35)$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{\gamma P_2}{\rho_2}}. \quad (36)$$

Из двух решений (30) решение с нижним знаком (с большим значением ρ_2) нарушает условие $\xi_3 < \xi_2$ (в данном случае оно является условием существования автомодельного решения с заданным на левой лагранжевой границе нулевым или другим относительно маленьким давлением). То есть решение (30) с нижним знаком не годится. В то же время решение с верхним знаком удовлетворяет этому условию. В результате из формул (28), (29) получаем следующие значения газодинамических параметров в области $\xi_3 \leq \xi < \xi_2$, $\xi_3 D_{\text{Жуге}} t \leq x < \xi_2 D_{\text{Жуге}} t$ между скачком разрежения и автомодельной волной разрежения:

$$\frac{\rho_0}{\rho_2} = \frac{V_2}{V_0} = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{(\gamma + 1) + 2 \left((\xi_1)^2 - 1 \right) - 2 \sqrt{\left((\xi_1)^2 - 1 \right) \left((\xi_1)^2 + 1/\gamma \right)}}{\gamma + 1}; \quad (37)$$

$$P_2 = \frac{\rho_0 (D_{\text{Жуге}})^2}{\gamma + 1} \frac{(\gamma + 1) + 2 \left((\xi_1)^2 - 1 \right) - 2\gamma \sqrt{\left((\xi_1)^2 - 1 \right) \left((\xi_1)^2 + 1/\gamma \right)}}{\gamma + 1}; \quad (38)$$

$$u_2 = \frac{D_{\text{Жуге}}}{\gamma + 1} \frac{(\gamma + 1) + 2(\gamma + 1)(\xi_1 - 1) - 2\gamma \left((\xi_1)^2 - 1 \right) + 2\gamma \sqrt{\left((\xi_1)^2 - 1 \right) \left((\xi_1)^2 + 1/\gamma \right)}}{\gamma + 1}. \quad (39)$$

Семейство автомодельных решений, описываемое формулами (24)–(27) и (31)–(39), зависит от произвольного постоянного параметра ξ_1 из интервала $1 < \xi_1 < \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \right)}$, где ограничение сверху возникает из естественного требования положительности давления P_2 слева от скачка разрежения.

Легко проверить, что при $\xi_1 \rightarrow 1 + 0$ значения плотности (37), давления (38) и скорости (39) стремятся к плотности Жуге (3), давлению Жуге (4) и скорости Жуге (5) соответственно. Поэтому при $\xi_1 \rightarrow 1 + 0$ построенные автомодельные решения (24)–(27), (31)–(39) стремятся к правильному автомодельному решению Чепмена–Жуге (2)–(11) как в слабом смысле, так и в нормах типа L_1 . Но эта сходимости не поточечная, потому что в предельном при $\xi_1 \rightarrow 1 + 0$ решении (24)–(27), (31)–(39) на фронте волны детонации Чепмена–Жуге находится бесконечно узкий выброс плотности, давления и скорости, состоящий из ударной волны сжатия и следующим за ней скачком разрежения, левее которого расположено уже обычное решение Чепмена–Жуге (2)–(11).

Полученные в расчетах 1–5 параметры аномального решения при $M_D = 8000$ с относительной точностью не хуже 2% описываются соотношениями (24)–(27), (37)–(39) (погрешности в расчетах возникают, скорее всего, из-за недостаточной близости численных решений к автомодельным — см., например, различие положения фронтов на рис. 2 для $M_D = 3000$ и $M_D = 40000$).

Расчеты с динамической скоростью навязанного энерговыделения

В методе *контроля скорости фронта* волны энерговыделения фиксируются (или, точнее, навязываются) два параметра, описывающие детонационную волну. Это калорийность Q_0 единицы массы ВВ и массовая скорость $\sigma_{\text{Жуге}} = \rho_0 D_{\text{Жуге}}$ фронта волны энерговыделения. Но для описания процесса детонации требуется только один параметр — это калорийность ВВ. Массовая скорость детонационной волны для известного уравнения состояния ВВ и ПВ и известного состояния вещества перед детонационной волной является известной функцией калорийности (2). То есть в методе контроля скорости фронта задается избыточная информация. Но и это не все.

Для уравнения состояния ВВ и ПВ вида (1) из уравнений Ренкина—Гюгонио в предположении, что газ перед детонационной волной покоится и имеет нулевое давление, а на фронте волны горения давление равно P_Φ , легко получается формула [14]

$$\sigma = \sqrt{\frac{\frac{\gamma+1}{2} (P_\Phi)^2}{P_\Phi V_{\text{нач}} - (\gamma-1) Q_0}} = \sigma_{\text{Жуге}} \frac{\frac{P_\Phi}{P_{\text{Жуге}}}}{\sqrt{2 \frac{P_\Phi}{P_{\text{Жуге}}} - 1}}, \quad (40)$$

по которой массовая скорость детонационной волны на самом деле является известной функцией давления P_Φ на фронте детонационной волны (и, разумеется, зависит от калорийности). Этим обеспечивается наличие обратной связи, регулирующей как давление на фронте детонационной волны, так и скорость детонационной волны (как обычную, так и массовую). В методе контроля скорости фронта эта обратная связь уничтожена.

Обратимся для примера к рис. 12, отображающему строение аномального автомоделного решения. Ясно, что при появлении в области энерговыделения большого давления, превышающего давление $P_{\text{Жуге}}$, массовая скорость волны энерговыделения при использовании зависимости типа (40) возрастет и это не позволит оторваться ударной волне сжатия от фронта волны энерговыделения. Тем самым, на первый взгляд, окажется невозможным аномальное автомоделное решение.

Для проверки этой логики использована следующая модификация формулы (40):

$$\sigma = \begin{cases} \rho_0 D_{\text{Жуге}}, & P_\Phi < P_{\text{Жуге}}; \\ \rho_0 D_{\text{Жуге}} \frac{\frac{P_\Phi}{P_{\text{Жуге}}}}{\sqrt{2 \frac{P_\Phi}{P_{\text{Жуге}}} - 1}}, & P_\Phi \geq P_{\text{Жуге}}, \end{cases} \quad (41)$$

где $P_\Phi = \max_{j_0-1 \leq j \leq j_0+\Delta J} \{P_{j+1/2}\}$, $\Delta J = 10$. Метод счета с такой скоростью фронта навязанного энерговыделения называем *динамическим методом контроля скорости фронта*.

Профили давления, полученные с помощью разностной схемы *крест* в расчете 10, в котором искусственная вязкость работала только на сжатии аналогично расчету 1, приведены на рис. 13, 14. К сожалению, здесь также происходит срыв численного решения с решения типа Чепмена—Жуге на некоторое совсем иное решение. В предельном численном решении на фронте волны энерговыделения давление заметно превышает давление Чепмена—Жуге, $P_{\text{max}}/P_{\text{Жуге}} \approx 1,06 \div 1,08$. Но сразу за фронтом давление быстро (на двух-трех ячейках) уменьшается до значения $P_2/P_{\text{Жуге}} \approx 0,94$, после чего идет небольшая область постоянного давления, за которой следует автомоделная волна разрежения (аналогично ведут себя и другие газодинамические величины). То есть, несмотря на динамическую регулировку массовой скорости фронта волны энерговыделения, численное решение при отсутствии вязкости на разрежении опять же "соскакивает" с решения типа Чепмена—Жуге. Средняя скорость фронта волны энерговыделения получается примерно на 0,4% больше, чем скорость детонационной волны Чепмена—Жуге.

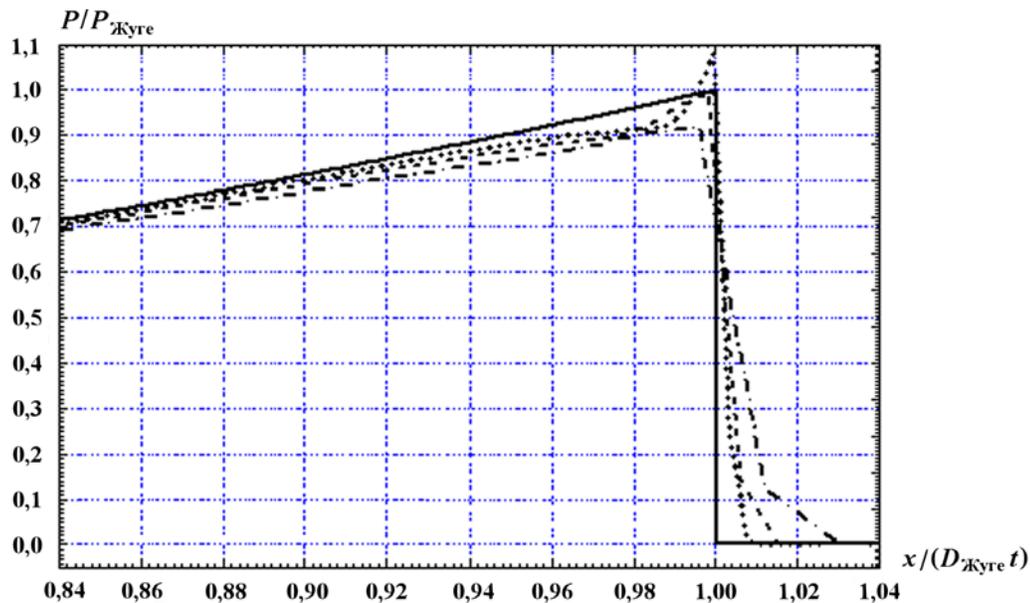


Рис. 13. Давление в окрестности фронта детонационной волны для динамического метода контроля (41), расчет 10 с вязкостью только на сжатии ($A_2 = 4$; $A_1 = 0,5$; $A_3 = 0$): \dashdot — $M_D = 50$; \dashdash — $M_D = 100$; \cdots — $M_D = 200$; — — точное решение

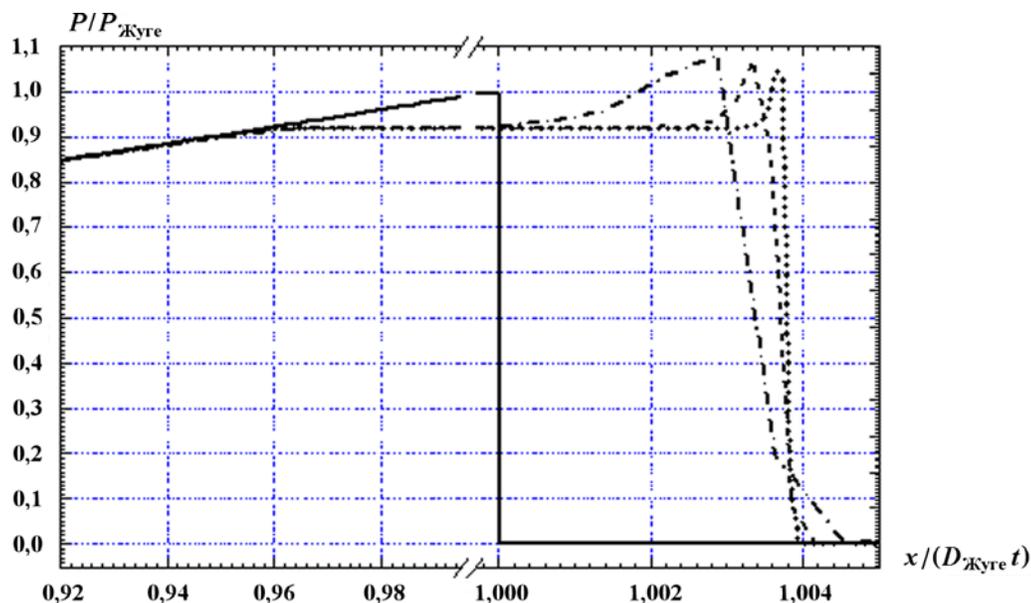


Рис. 14. Давление в окрестности фронта детонационной волны для динамического метода контроля (41) для большого числа точек, расчет 10 с вязкостью только на сжатии ($A_2 = 4$, $A_1 = 0,5$, $A_3 = 0$): \dashdot — $M_D = 1000$; \dashdash — $M_D = 3000$; \cdots — $M_D = 8000$; — — точное решение

При использовании вязкости на разрежении результаты расчетов с динамическим методом контроля скорости фронта совпадают с результатами аналогичных расчетов с навязанной скоростью фронта волны энерговыделения.

Хотя при отсутствии вязкости на разрежении динамический метод контроля скорости фронта немного отклоняется на подробных сетках от решения типа Чепмена—Жуге, это отклонение небольшое, и такой метод можно рекомендовать для практического использования (когда нежелательно использовать вязкость на разрежении).

Обсуждение. Результаты расчетов с точки зрения условий допустимости скачков разрежения

Подробно условия допустимости скачков разрежения, возникающих при заданном бегущем энерговыделении [10], будут рассмотрены в отдельной статье.

Когда в расчетах используется достаточно большая искусственная вязкость на разрежении, разностной дисперсией можно пренебречь. В этом случае полученные выше аномальные автомодельные решения со скачком разрежения оказываются запрещены условиями допустимости. Вязкость на разрежении запрещает скачки разрежения, удовлетворяющие условию автомодельности (условию устойчивости автомодельного решения) $\xi_3 < \xi_2$, которое эквивалентно условию

$$s_2 = \sqrt{\frac{\gamma P_2}{V_2}} < \sigma. \quad (42)$$

Поэтому при использовании достаточно большой искусственной вязкости на разрежении в расчетах с навязанным бегущим энерговыделением реализуется решение типа Чепмена—Жуге.

Когда искусственная вязкость работает только на сжатии, а на разрежении отсутствует, ведущим дополнительным процессом, который определяет структуру волны разрежения при навязанном энерговыделении, является разностная дисперсия. Обычно (см. примеры в работах [15—17]) при определяющей роли дисперсии условие допустимости скачков приводит к появлению дополнительных соотношений, сверх условий типа Ренкина—Гюгонио. Учет аппроксимационной дисперсии разностной схемы *крест* для скачков разрежения на фронте волны бегущего точечного навязанного энерговыделения [10] также приводит к появлению дополнительного соотношения. При этом допустимыми, в отличие от вязкости, оказываются скачки разрежения, удовлетворяющие условию автомодельности (42). Именно такого сорта скачки разрежения реализуются в расчетах при появлении аномальных автомодельных решений на очень мелких сетках, когда искусственная вязкость работает только на сжатии.

В расчетах с динамическим методом контроля скорости фронта при отсутствии вязкости на разрежении (см. рис. 13, 14) разностная схема "хочет перескочить" на аномальное решение, но динамическая зависимость (41) скорости фронта волны энерговыделения от давления на фронте приводит к увеличению скорости фронта. В результате устанавливается некоторое динамическое равновесие, приводящее на очень подробных сетках к некоторой автомодельной структуре, уже мало отличающейся от решения типа Чепмена—Жуге.

В расчетах по разностной схеме *крест*, не имеющей аппроксимационной вязкости, при полном отключении искусственных вязкостей, реализуется решение типа Чепмена—Жуге со скачком сжатия на фронте волны навязанного бегущего энерговыделения. Аномальное решение здесь оказывается запрещенным по той причине, что при отсутствии искусственной вязкости невозможно появление отошедшей вперед ударной волны сжатия. Причина в том, что для появления ударной волны сжатия необходимо увеличение энтропии, а при отсутствии вязкости энтропия не возрастает. В то же время в решении Чепмена—Жуге энтропия на фронте детонационной волны возрастает за счет навязанного энерговыделения, искусственная вязкость для этого не требуется.

Остался открытым вопрос, почему при численном моделировании детонации методом контроля скорости фронта волны энерговыделения при использовании искусственной вязкости только на сжатии совокупная разностная схема "предпочитает" на достаточно подробной сетке аномальное автомодельное решение вместо решения типа Чепмена—Жуге. Теоретического объяснения этому пока не найдено.

Список литературы

1. Бахрах С. М., Краснов Б. Н., Цыкин С. В., Шавердов С. А. Расчетное исследование перехода горения тэна во взрыв в рамках модели с выделенным фронтом горения // ФГВ. 1996. Т. 32, № 6. С. 96—107.

2. *Балрах С. М., Воронина Е. Б., Устинова Е. В., Шавердов С. А.* Алгоритм расчета распространения фронта послыоного горения, основанный на принципе Гюйгенса // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1998. Вып. 1. С. 59—65.
3. *Бондаренко Ю. А.* Консервативные разностные схемы типа "крест" с положительно определенной кинетической энергией для лагранжевой газодинамики // Там же. 1995. Вып. 4. С. 17—21.
4. *Бондаренко Ю. А.* Консервативное расщепление уравнения энергии в разностных схемах типа "крест" для лагранжевой газодинамики // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1997. Т. 37, № 8. С. 1020—1023.
5. *Бондаренко Ю. А.* Порядок аппроксимации, порядок численной сходимости и экономичность счета многомерной газовой динамики в переменных Эйлера на примере расчетов задачи "blast waves" // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2004. Вып. 4. С. 51—61.
6. *Bondarenko Yu. A., Zmushko V. V., Stenin A. M.* Local and nonlocal stability conditions of difference schemes for calculating gas-dynamics problems in Lagrangian coordinates // Numerical Methods in Fluid Dynamics / Ed. N. N. Yanenko and Yu. I. Shokin. M.: Mir publ., 1984. P. 245—264.
7. *Куропатенко В. Ф.* О разностных методах для уравнений гидродинамики // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1966. Т. 74. С. 107—137.
8. *Christensen R. B.* High resolution hydrodynamics using artificial viscosity // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1996. Вып. 4. С. 89—93.
9. *Caramana E. J., Shashkov M. M., Whalen P. P.* Formulations of artificial viscosity for multi-dimensional shock wave problems. LANL report, LA-UR-97-2146. 1997.
10. *Бондаренко Ю. А.* Условия допустимости скачков разрежения, возникающих на фронте точечного энерговыделения, бегущего с заданной массовой скоростью // X Межд. семинар "Супервычисления и математическое моделирование". Саров, 29 сентября — 3 октября 2008 г. Тезисы. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2008. С. 37—39.
11. *Куликовский А. Г.* О свойствах ударных адиабат в окрестности точек Жуге // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1979. № 2. С. 184—186.
12. *Зверев И. Н., Смирнов Н. Н.* Газодинамика горения. М.: Изд-во Московского университета, 1987.
13. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1987.
14. *Забабихин Е. И.* Некоторые вопросы газодинамики взрыва. Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 1997.
15. *Куликовский А. Г.* О возможном влиянии колебаний в структуре разрыва на множество допустимых разрывов // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 6. С. 1349—1352.
16. *Куликовский А. Г., Гвоздовская Н. И.* О влиянии дисперсии на множество допустимых разрывов в механике сплошной среды // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 1998. Т. 223. С. 63—73.
17. *Бондаренко Ю. А., Софронов В. Н., Копышев В. П., Хрусталева В. В.* Неединственность ударных волн разрежения: влияние вязкости и дисперсии // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 4. С. 3—12.