

УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ TVD-ПОДХОДА К DS_n -МЕТОДУ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. Д. Гаджиев, В. В. Завьялов, А. А. Шестаков
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Для решения неявных конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих нелинейную систему нестационарных дифференциальных уравнений, состоящую из спектрального интегродифференциального кинетического уравнения переноса фотонов и уравнения энергии, предложены две схемы, основанные на TVD-методологии. Предлагаемые схемы позволяют использовать алгоритм бегущего счета. Приводятся расчеты тестовых задач для одномерных геометрий.

Ключевые слова: перенос теплового излучения, TVD-подход.

Введение

При решении задач переноса теплового излучения разработка монотонных схем второго порядка аппроксимации до сих пор является актуальной проблемой. Широко используемый для решения уравнения переноса метод дискретных ординат (DS_n -метод) [1] не позволяет одновременно обеспечивать монотонность и второй порядок аппроксимации. В работе С. К. Годунова [2] показано, что для гиперболических уравнений в классе линейных схем нет монотонной схемы со вторым порядком аппроксимации. На практике, чтобы совместить в определенной степени монотонность и второй порядок, используются различные монотонизаторы [3–5].

Одним из путей решения рассматриваемой проблемы является переход к нелинейным схемам. Начиная с 80-х годов 20-го столетия опубликовано большое количество работ по нелинейным TVD-схемам (Total Variation Diminishing), например [6–10]. Достаточно подробно этот вопрос рассматривается в монографии [11]. В этих работах рассмотрены как явные, так и неявные схемы типа TVD для решения гиперболических систем уравнений.

Первые публикации по применению TVD-методов к решению уравнения переноса теплового излучения появились сравнительно недавно. Так, в [12] предложена схема в стационарном случае. Если говорить о неявных TVD-схемах для уравнения переноса, то это будут трехточечные (или более) схемы в каждом направлении пространственной переменной. Это значит, что теряется важное достоинство DS_n -метода, где аппроксимация строится в рамках счетной ячейки, а для решения разностных уравнений используется экономичный метод бегущего счета.

В данной работе построены две неявные схемы типа TVD, которые обеспечивают монотонность и второй порядок аппроксимации, а также сохраняют основные достоинства DS_n -метода. Построенные указанным способом схемы типа TVD обладают следующими свойствами:

1. Неявность, безусловная устойчивость.
2. Монотонность в смысле принадлежности к классу TVD-схем.
3. Первый порядок аппроксимации по времени и второй порядок аппроксимации по пространству, кроме отдельных точек с экстремумами.
4. Консервативность в смысле выполнения разностного аналога интегрального закона сохранения в каждой ячейке.

5. Построение аппроксимации во второй схеме, как и в DS_n -методе, в рамках одной ячейки, если говорить о величинах с верхнего временного слоя. Данное свойство позволяет применять экономичный метод бегущего счета для решения системы разностных уравнений.
6. Обобщаемость на многомерные геометрии.

Относительно п. 5 надо сделать следующее замечание. Используемая в новой схеме TVD-методология вносит в схему ограничитель, который вычисляется явно по известным величинам с предыдущего временного шага на трехточечном шаблоне в каждом направлении. При этом величины с верхнего временного слоя берутся в рамках данной ячейки. Что же касается монотонности в смысле принадлежности к классу схем с невозрастанием полной вариации, то этот класс шире, чем класс монотонности из [2], и еще шире, чем класс схем, удовлетворяющих принципу максимума. TVD-схемы обеспечивают монотонность лишь в указанном выше смысле. Реальный же уровень монотонности надо оценивать по результатам численных расчетов. При этом предлагается анализировать монотонность не только самого решения, но и его производных. Если это есть, то говорят о сильной монотонности [13].

Постановка задачи

Система уравнений, описывающая распространение излучения в неподвижной среде, состоит из спектрального уравнения переноса в кинетической постановке, описывающего перенос, поглощение и рассеяние теплового излучения, и уравнения энергии, характеризующего изменение температуры вещества за счет поглощения и испускания фотонов:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\mu}{r^\eta} \frac{\partial}{\partial r} (r^\eta I_\nu) + \frac{\eta}{2r} \frac{\partial}{\partial \mu} ((1 - \mu^2) I_\nu) + \alpha_\nu I_\nu = \kappa_\nu B_\nu + \frac{k}{2} U_\nu;$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_0^\infty \kappa_\nu (U_\nu - 2B_\nu).$$

Здесь c — скорость света; r — пространственная координата; t — время; ν — энергия фотонов; μ — косинус угла между направлением полета фотона $\vec{\Omega}$ и осью r ; $I_\nu(r, \mu, \nu, t)$ — спектральная интенсивность излучения; $T(r, t)$ — температура среды; $\alpha_\nu = \kappa_\nu + k$ — коэффициент ослабления; $\kappa_\nu(\nu, T)$ — коэффициент поглощения; $k(r)$ — коэффициент рассеяния; $E(T)$ — удельная внутренняя энергия вещества; $B_\nu(\nu, T)$ — интенсивность равновесного излучения (функция Планка); $U_\nu = \int_{-1}^1 I_\nu d\mu$ — спектральная плотность энергии излучения; η — параметр геометрии (0 — плоская, 2 — сферически-симметричная).

Данная система решается в области $\{r_0 < r < R, -1 \leq \mu \leq 1\}$ с начальными и граничными условиями

$$I_\nu(r, \mu, \nu, t^0) = I_\nu^0(r, \mu, \nu); \quad T(r, t^0) = T^0(r);$$

$$I_\nu(r_0, \mu > 0, \nu, t) = \varphi_L(\mu, \nu, t); \quad I_\nu(R, \mu < 0, \nu, t) = \varphi_R(\mu, \nu, t).$$

В качестве граничного условия при $r_0 = 0, \mu > 0$ в сферически-симметричной геометрии берется условие $I_\nu(0, \mu, \nu, t) = I_\nu(0, -\mu, \nu, t)$.

Линейное уравнение переноса

В одногрупповом случае для плоской геометрии в вакууме исходная система превращается в широко известное линейное уравнение переноса

$$\frac{\partial I}{c \partial t} + \mu \frac{\partial I}{\partial r} = 0.$$

Введем равномерную разностную сетку по времени и пространству $\tau = t^{n+1} - t^n$, $h = r_{i+1} - r_i$, $n = 0, \dots$, $i = 0, \dots$. Монотонная схема первого порядка аппроксимации имеет вид

$$\frac{I_{i+1/2}^{n+1} - I_{i+1/2}^n}{c\tau} + \mu \frac{I_{i+1}^{n+1} - I_i^{n+1}}{h} = 0 \quad (1)$$

с дополнительными соотношениями связи

$$I_{i+1/2} = I_{i+(1+\text{sign}(\mu))/2}. \quad (2)$$

Если схему (1), (2) при $\mu > 0$ записать в виде

$$I_{i+1/2}^{n+1} = \frac{C}{1+C} I_i^{n+1} + \frac{1}{1+C} I_{i+1/2}^n, \quad I_{i+1}^{n+1} = \frac{C}{1+C} I_i^{n+1} + \frac{1}{1+C} I_{i+1}^n, \quad C = \frac{c\mu\tau}{h}, \quad (3)$$

то видно, что выполняется принцип максимума, схема является монотонной и безусловно устойчивой:

$$0 \leq I_{i+1/2}^{n+1} \leq \max(I_{i-1/2}^{n+1}, I_{i+1/2}^n); \quad 0 \leq I_{i+1}^{n+1} \leq \max(I_i^{n+1}, I_{i+1}^n).$$

В теории переноса эта схема называется St -схемой. При $\mu < 0$ принцип максимума доказывается аналогично.

Для дальнейшего рассмотрения фиксируем $\mu > 0$ и там, где это не вызывает недоразумения, опускаем соответствующие разностные индексы.

Первая TVD-схема

Для повышения порядка аппроксимации проведем реконструкцию решения на сеточных интервалах. Представим $I(r, t)$ на интервале $r_i \leq r \leq r_{i+1}$ в кусочно-линейной форме:

$$I(r, t) = I_{i+1/2} + \frac{\partial I_{i+1/2}}{\partial r} (r - r_{i+1/2}), \quad r_{i+1/2} = 0,5(r_i + r_{i+1}).$$

Отсюда следует реконструированное соотношение связи

$$I_{i+1}^{n+1} = I_{i+1/2}^{n+1} + \frac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial r} \frac{h}{2}.$$

В соответствии с TVD-методологией в качестве $\frac{\partial I_{i+1/2}}{\partial r}$ берутся некоторые ограничители L , которые обычно используют односторонние производные. Добавление производных в формулах эквивалентно введению антидиффузии в монотонную схему (1), (2). Но антидиффузию надо ограничить таким образом, чтобы новая схема имела второй порядок аппроксимации и сохраняла при этом монотонность. В этом заключается главное назначение ограничителей.

Вводя функцию-ограничитель, можно записать

$$I_{i+1}^{n+1} = I_{i+1/2}^{n+1} + 0,5\phi_{i+1/2}^{n+1} \Delta I_{i-1/2}^{n+1}, \quad (4)$$

$$\phi_{i+1/2} = \frac{L(\Delta I_{i-1/2}, \Delta I_{i+1/2})}{\Delta I_{i-1/2}} = L(1, \hat{\theta}_{i+1/2}), \quad \hat{\theta}_{i+1/2} = \frac{\Delta I_{i+1/2}}{\Delta I_{i-1/2}}, \quad \Delta I_{i-1/2} = I_{i+1/2} - I_{i-1/2}.$$

Система уравнений (2), (4) представляет собой систему с четырехточечным шаблоном на $(n+1)$ -м слое. Так как функция-ограничитель ϕ имеет дробно-линейный характер, то можно ожидать, что она слабо меняется за один шаг τ . Таким образом, можно взять ϕ с n -го шага, внося при этом погрешность $O(\tau)$. Это дает возможность применить алгоритм бегущего счета. Тогда подстановка в (3) с учетом ϕ^n приводит к уравнениям

$$I_{i+1/2}^{n+1} = \frac{I_{i+1/2}^n + C I_i^{n+1} + 0,5C\phi_{i+1/2}^n I_{i-1/2}^{n+1}}{1 + C + 0,5C\phi_{i+1/2}^n}; \quad I_{i+1}^{n+1} = \left(1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n\right) I_{i+1/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i+1/2}^n I_{i-1/2}^{n+1}, \quad (5)$$

которые имеют относительно $I_{i+1/2}^{n+1}$, I_{i+1}^{n+1} разрешенный вид. По этим формулам можно вести рекуррентный бегущий счет в сторону роста индекса i .

Заметим, что при вычислении $I_{i+1/2}^{n+1}$ сумма коэффициентов при $I_{i+1/2}^n$, I_i^{n+1} , $I_{i-1/2}^{n+1}$ равна единице, как и для St -схемы. Равенство суммы коэффициентов единице означает, что $I_{i+1/2}^{n+1}$ есть линейная интерполяция величин $I_{i+1/2}^n$, I_i^{n+1} , $I_{i-1/2}^{n+1}$ и она положительна при положительности этих величин.

Из формул (5) при $\phi_{i+1/2}^n \geq 0$ следует условие положительности $I_{i+1/2}^{n+1}$ при положительности $I_{i+1/2}^n$, I_i^{n+1} , $I_{i-1/2}^{n+1}$ для центральной точки: $0 \leq I_{i+1/2}^{n+1} \leq \max(I_{i+1/2}^n, I_i^{n+1}, I_{i-1/2}^{n+1})$, однако не гарантируется положительность в узле I_{i+1}^{n+1} . Для рассматриваемых в работе ограничителей условие $\phi_{i+1/2}^n \geq 0$ выполняется всегда. При $I_{i+1}^{n+1} < 0$ можно полагать $\phi_{i+1/2}^n = 0$ и счет вести по схеме первого порядка.

В качестве ограничителей будем брать ограничитель Чакравати—Ошера и $\min \text{mod}$, который является его частным случаем [8].

Для ограничителя Чакравати—Ошера имеем

$$L(a, b) = 0,5(1 - \delta) \min \text{mod}(a, \beta b) + 0,5(1 + \delta) \min \text{mod}(\beta a, b);$$

$$\phi_{i+1/2}^n = 0,5(1 - \delta) \min \text{mod}\left(1, \beta \hat{\theta}_{i+1/2}^n\right) + 0,5(1 + \delta) \min \text{mod}\left(\beta, \hat{\theta}_{i+1/2}^n\right);$$

для $\min \text{mod} (\delta = 0, \beta = 1)$

$$L(a, b) = \min \text{mod}(a, b) = 0,5(\text{sign}(a) + \text{sign}(b)) \min(|a|, |b|);$$

$$\phi_{i+1/2}^n = \frac{L(\Delta I_{i-1/2}^n, \Delta I_{i+1/2}^n)}{\Delta I_{i-1/2}^n} = L\left(1, \hat{\theta}_{i+1/2}^n\right) = \frac{1 + \text{sign}(\hat{\theta}_{i+1/2}^n)}{2} \min\left(1, \left|\hat{\theta}_{i+1/2}^n\right|\right),$$

где β — параметр сжатия, а параметр δ определяет тип схемы и порядок аппроксимации. При $\delta = 1$ получаем схему второго порядка аппроксимации. При $\delta = 1/3$, $\beta = 3$ для явной схемы можно получить третий порядок аппроксимации. Для неявной схемы точность также повышается, поэтому в дальнейшем будем всегда использовать эти значения. Графики функций $\phi(\hat{\theta} = \theta^{-1})$ приведены на рис. 1.

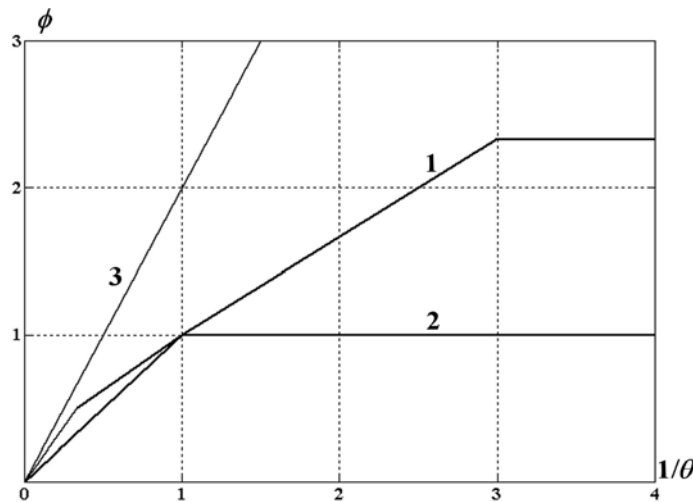


Рис. 1. Функция $\phi(\hat{\theta})$: 1 — ограничитель Чакравати—Ошера ($\delta = 1/3$; $\beta = 3$); 2 — ограничитель $\min \text{mod}$; 3 — функция $\phi = 2/\theta$

Несмотря на то, что схема (5) построена по классической TVD-методологии, доказать ее принадлежность классу TVD не удастся. Причина состоит в линеаризации $\phi(\hat{\theta})$ со взятием функции-ограничителя с предыдущего временного слоя. Но схему (5) можно модифицировать, чтобы она стала неявной TVD-схемой. Для этого приведем ее к виду

$$I_{i+1/2}^{n+1} + C \left(1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - 0,5\phi_{i-1/2}^n \theta_{i-1/2}^{n+1} \right) \Delta I_{i-1/2}^{n+1} = I_{i+1/2}^n, \quad \theta_{i+1/2} = \frac{\Delta I_{i-1/2}}{\Delta I_{i+1/2}}. \quad (6)$$

Заменяя в уравнении (6) $\theta_{i-1/2}^{n+1}$ на $\theta_{i-1/2}^n$, получаем модифицированную схему

$$I_{i+1/2}^{n+1} + C \left(1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - 0,5\phi_{i-1/2}^n \theta_{i-1/2}^n \right) \Delta I_{i-1/2}^{n+1} = I_{i+1/2}^n, \quad (7)$$

которая уже принадлежит классу TVD. Это следует из достаточного условия [9] для неявных схем

$$1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - 0,5\phi_{i-1/2}^n \theta_{i-1/2}^n \geq 0, \quad (8)$$

которое удовлетворяется, в частности, если $0 \leq \phi_{i+1/2} \leq 2\hat{\theta}_{i+1/2}$.

Условие (8) выполняется для рассмотренных в данной работе ограничителей (см. рис. 1). Но вновь построенная схема (7) стала неконсервативной. Терять консервативность нежелательно, поэтому для численных расчетов использовалась консервативная схема (5), которая также подтвердила второй порядок аппроксимации и монотонность.

Как оказывается, такая ситуация, когда для построенной консервативной схемы не удастся доказать принадлежность к классу TVD, а удастся это сделать только для неконсервативной модифицированной схемы, характерна для многих неявных TVD-схем [9]. Пользоваться следует все же исходной консервативной схемой.

Вторая TVD-схема

Если в соотношении связи из (4) вынести за скобку $I_{i+1/2}^{n+1}$, тогда при $\mu > 0$

$$I_{i+1}^{n+1} = \left(1 + \frac{L \left(\Delta I_{i-1/2}^{n+1}, \Delta I_{i+1/2}^{n+1} \right)}{2I_{i+1/2}^{n+1}} \right) I_{i+1/2}^{n+1} = D_{i+1/2}^{n+1} I_{i+1/2}^{n+1}, \quad D_{i+1/2}^{n+1} = 1 + \frac{L \left(\Delta I_{i-1/2}^{n+1}, \Delta I_{i+1/2}^{n+1} \right)}{2I_{i+1/2}^{n+1}}.$$

При $\mu < 0$ получаем $I_i^{n+1} = D_{i+1/2}^{n+1} I_{i+1/2}^{n+1}$, $D_{i+1/2}^{n+1} = 1 - \frac{L \left(\Delta I_{i-1/2}^{n+1}, \Delta I_{i+1/2}^{n+1} \right)}{2I_{i+1/2}^{n+1}}$.

Аналогично рассмотрению в предыдущем разделе возьмем коэффициент $D_{i+1/2}^{n+1}$ с предыдущего шага:

$$I_{i+1}^{n+1} = D_{i+1/2}^n I_{i+1/2}^{n+1}. \quad (9)$$

В отличие от первой схемы здесь этот способ не приводит к расширению шаблона и позволяет оставаться в рамках одной ячейки при бегущем счете. Внесенная ошибка имеет порядок $O(\tau h)$:

$$D_{i+1/2}^{n+1} - D_{i+1/2}^n \approx \pm \frac{h}{2} \left(\frac{1}{I_{i+1/2}^{n+1}} \frac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial r} - \frac{1}{I_{i+1/2}^n} \frac{\partial I_{i+1/2}^n}{\partial r} \right) \approx \pm \frac{\tau h}{2} \frac{\partial^2 (\ln I_{i+1/2})}{\partial r \partial t}.$$

При анализе поведения решения на интервале $r_{i-1/2} \leq r \leq r_{i+3/2}$ возможны 3 случая, приведенные в таблице. Согласно таблице введенный коэффициент D положителен и ограничен. Заметим, что при условии $\text{sign}(\Delta I_{i-1/2}^n) \neq \text{sign}(\Delta I_{i+1/2}^n)$ в данных ограничителях всегда получаем $L = 0$, $D_{i+1/2}^n = 1$ и счет ведется по St -схеме первого порядка.

Ограничения на коэффициент D

Ограничитель	$\text{sign}(\Delta I_{i-1/2}^n) \neq \text{sign}(\Delta I_{i+1/2}^n)$	$I_{i-1/2}^n \leq I_{i+1/2}^n \leq I_{i+3/2}^n$	$I_{i-1/2}^n \geq I_{i+1/2}^n \geq I_{i+3/2}^n$
min mod	$D_{i+1/2}^n = 1$	$1 \leq D_{i+1/2}^n \leq \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2} \leq D_{i+1/2}^n \leq \frac{3}{2}$
Чакравати—Ошера	$D_{i+1/2}^n = 1$	$1 \leq D_{i+1/2}^n \leq \frac{13}{6}$	$\frac{1}{6} \leq D_{i+1/2}^n \leq \frac{13}{6}$

Подставляя полученные соотношения связи (9) в основное уравнение (1), получаем

$$I_{i+1/2}^{n+1} = \frac{I_{i+1/2}^n + CD_{i-1/2}^n I_{i-1/2}^{n+1}}{1 + CD_{i+1/2}^n} = \frac{1}{1 + CD_{i+1/2}^n} I_{i+1/2}^n + \frac{CD_{i+1/2}^n}{1 + CD_{i+1/2}^n} \frac{D_{i-1/2}^n}{D_{i+1/2}^n} I_{i-1/2}^{n+1}, \quad I_{i+1}^{n+1} = D_{i+1/2}^n I_{i+1/2}^{n+1}. \quad (10)$$

В силу положительности $D_{i+1/2}^n$ из уравнения (10) видно, что $I_{i+1/2}^{n+1} \geq 0$ при $I_{i+1/2}^n \geq 0, I_{i-1/2}^{n+1} \geq 0$. Кроме того, положительно и значение в узле I_{i+1}^{n+1} , чего не было в первой схеме. Из (10) вытекает

$$0 \leq I_{i+1/2}^{n+1} \leq \max \left(I_{i+1/2}^n, \frac{D_{i-1/2}^n}{D_{i+1/2}^n} I_{i-1/2}^{n+1} \right). \quad (11)$$

Порядок малости множителя $D_{i-1/2}^n/D_{i+1/2}^n$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{D_{i-1/2}^n}{D_{i+1/2}^n} &= 1 + \frac{h}{D_{i+1/2}^n} \frac{D_{i-1/2}^n - D_{i+1/2}^n}{h} = 1 - \frac{h^2}{2D_{i+1/2}^n} \left(\frac{1}{hI_{i+1/2}^n} \frac{\partial I_{i+1/2}^n}{\partial r} - \frac{1}{hI_{i-1/2}^n} \frac{\partial I_{i-1/2}^n}{\partial r} \right) \approx \\ &\approx 1 - \frac{h^2}{2D_{i+1/2}^n} \frac{\partial^2 (\ln I_{i+1/2}^n)}{\partial r^2} = 1 + O(h^2). \end{aligned}$$

Неравенство (11) не обеспечивает принципа максимума. С другой стороны, доказательство принадлежности этой схемы к TVD-схемам затруднено из-за того, что коэффициент D берется с предыдущего шага.

Вычитая уравнение (10) в соседних точках, данную схему можно представить в форме относительно приращений:

$$\Delta I_{i-1/2}^{n+1} + C \left(D_{i+1/2}^n I_{i+1/2}^{n+1} - D_{i-1/2}^n I_{i-1/2}^{n+1} \right) = \Delta I_{i-1/2}^n + C \left(D_{i-1/2}^n I_{i-1/2}^{n+1} - D_{i-3/2}^n I_{i-3/2}^{n+1} \right).$$

Используя соотношение $D_{i+1/2}^n = 1 + \phi_{i+1/2}^n \frac{\Delta I_{i-1/2}^n}{2I_{i+1/2}^n}$, получаем

$$\begin{aligned} \Delta I_{i-1/2}^{n+1} + C \left(\Delta I_{i-1/2}^{n+1} + \phi_{i+1/2}^n \frac{\Delta I_{i-1/2}^n}{2I_{i+1/2}^n} I_{i+1/2}^{n+1} - \phi_{i-1/2}^n \frac{\Delta I_{i-3/2}^n}{2I_{i-1/2}^n} I_{i-1/2}^{n+1} \right) = \\ = \Delta I_{i-1/2}^n + C \left(\Delta I_{i-3/2}^{n+1} + \phi_{i-1/2}^n \frac{\Delta I_{i-3/2}^n}{2I_{i-1/2}^n} I_{i-1/2}^{n+1} - \phi_{i-3/2}^n \frac{\Delta I_{i-5/2}^n}{2I_{i-3/2}^n} I_{i-3/2}^{n+1} \right). \end{aligned}$$

Используя соотношения

$$\begin{aligned} I_{i+1/2}^{n+1} &= 0,5 \left(I_{i+1/2}^{n+1} - I_{i-1/2}^{n+1} \right) + 0,5 \left(I_{i+1/2}^{n+1} + I_{i-1/2}^{n+1} \right); \\ I_{i-1/2}^{n+1} &= -0,5 \left(I_{i+1/2}^{n+1} - I_{i-1/2}^{n+1} \right) + 0,5 \left(I_{i+1/2}^{n+1} + I_{i-1/2}^{n+1} \right) \end{aligned}$$

и вынося за скобки разности ΔI^{n+1} , получаем

$$\begin{aligned} \Delta I_{i-1/2}^{n+1} + C \left(1 + \phi_{i+1/2}^n \frac{\Delta I_{i-1/2}^n}{4I_{i+1/2}^n} + \phi_{i-1/2}^n \frac{\Delta I_{i-3/2}^n}{4I_{i-1/2}^n} \right) \Delta I_{i-1/2}^{n+1} = \\ = \Delta I_{i-1/2}^n + C \left(1 + \phi_{i-1/2}^n \frac{\Delta I_{i-3/2}^n}{4I_{i-1/2}^n} + \phi_{i-3/2}^n \frac{\Delta I_{i-5/2}^n}{4I_{i-3/2}^n} \right) \Delta I_{i-3/2}^{n+1} - \Delta^3 I_{i-3/2}^{n+1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta^3 I_{i-3/2}^{n+1} = \frac{C}{2} \left(\phi_{i+1/2}^n \frac{\Delta I_{i-1/2}^n}{I_{i+1/2}^n} - \phi_{i-1/2}^n \frac{\Delta I_{i-3/2}^n}{I_{i-1/2}^n} \right) (I_{i+1/2}^{n+1} + I_{i-1/2}^{n+1}) - \\ - \frac{C}{2} \left(\phi_{i-1/2}^n \frac{\Delta I_{i-3/2}^n}{I_{i-1/2}^n} - \phi_{i-3/2}^n \frac{\Delta I_{i-5/2}^n}{I_{i-3/2}^n} \right) (I_{i-1/2}^{n+1} + I_{i-3/2}^{n+1}) \end{aligned}$$

— величина третьего порядка малости.

Для рассмотренных в данной работе ограничителей можно показать во всех точках разностной сетки, что

$$1 + \phi_{i+1/2}^n \frac{\Delta I_{i-1/2}^n}{4I_{i+1/2}^n} + \phi_{i-1/2}^n \frac{\Delta I_{i-3/2}^n}{4I_{i-1/2}^n} \geq 0.$$

Это условие есть не что иное, как достаточный критерий Хартена [10] для неявных схем. То есть при занулении величины третьего порядка малости $\Delta^3 I_{i-3/2}^{n+1}$ получаем модифицированную неявную схему из класса TVD-схем. Она монотонна и имеет второй порядок аппроксимации, но не удовлетворяет требованию консервативности. Поэтому в расчетах применяется консервативная схема (10).

Заметим, что в отличие от первой схемы при вычислении $I_{i+1/2}^{n+1}$ сумма коэффициентов при $I_{i+1/2}^n$, I_i^{n+1} , $I_{i-1/2}^{n+1}$ может быть не равна единице. Следует также отметить, что данная схема имеет сходные свойства с нелинейной схемой из [14], где антидиффузионная добавка ограничивается исходя из принципа максимума.

Численные расчеты

Рассматривались 3 задачи: перенос произвольного профиля в вакууме для плоской геометрии, задача об остывании сферы и задача Флека [15] в сферически-симметричной постановке. Сравнивались результаты, полученные по St-, DD-, DDAD-схемам [5] и второй схеме типа TVD с ограничением Чакравати—Ошера. Первая TVD-схема показывает результаты, близкие со второй, и поэтому не приводится. Сходимость итерационного процесса — с точностью $\varepsilon = 0,00001$. Величина временного шага выбиралась постоянной. Для интегрирования по μ использовалась гауссова квадратура (12 точек).

Задача 1. Для численного исследования рассмотрен перенос пакета из трех профилей (прямоугольника, треугольника и параболы) с амплитудой интенсивности, равной 0,9, и шириной в основании $L = 20$. Использовалась равномерная сетка по пространству: $h = 0,5$, $C = 0,05$. В работе [13] указывается на важность требований сильной монотонности для разностных схем, аппроксимирующих гиперболические системы законов сохранения. На рис. 2—4 приведены профили интенсивности, а также ее первой и второй производной по пространству на момент времени $ct = 10L$ (пакет переместился на 10 первоначальных профилей).

Из рис. 2 видно, что St-схема сильно размывает профиль, DD- и DDAD-схемы дают осцилляции, TVD-схема ведет себя как монотонная схема второго порядка. Из рис. 3, 4 видно, что TVD-схема дает более монотонное поведение производных и, по всей видимости, удовлетворяет требованию сильной монотонности.

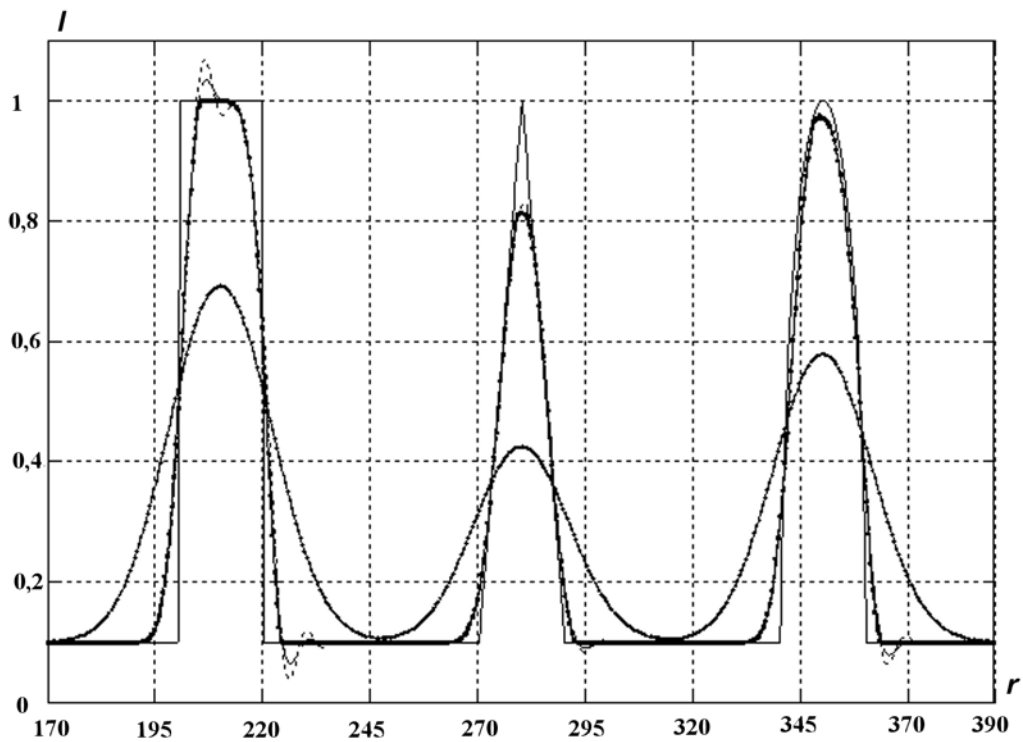


Рис. 2. Задача 1. Профили интенсивности $I(r)$: — — точное решение; $-\circ-$ — St-схема; \cdots — DD-схема; $-\square-$ — TVD-схема; $----$ — DDAD-схема

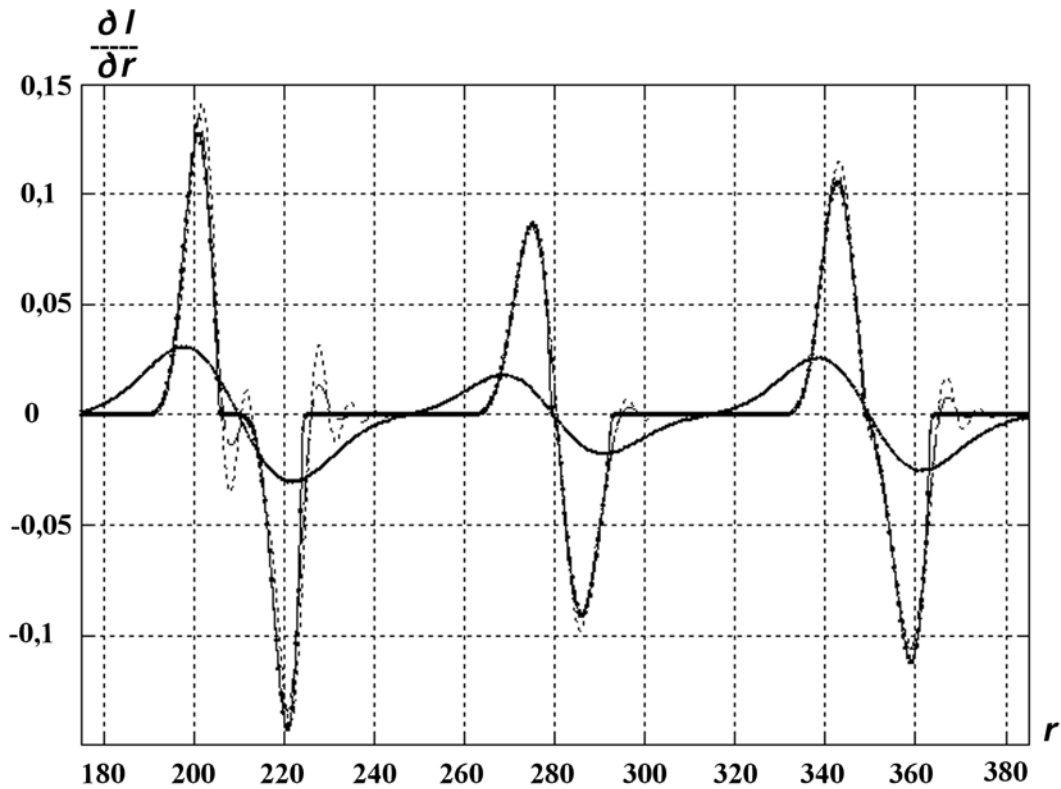


Рис. 3. Задача 1. Профили $\frac{\partial I(r)}{\partial r}$: — — точное решение; $-\circ-$ — St-схема; \cdots — DD-схема; $-\square-$ — TVD-схема; $----$ — DDAD-схема

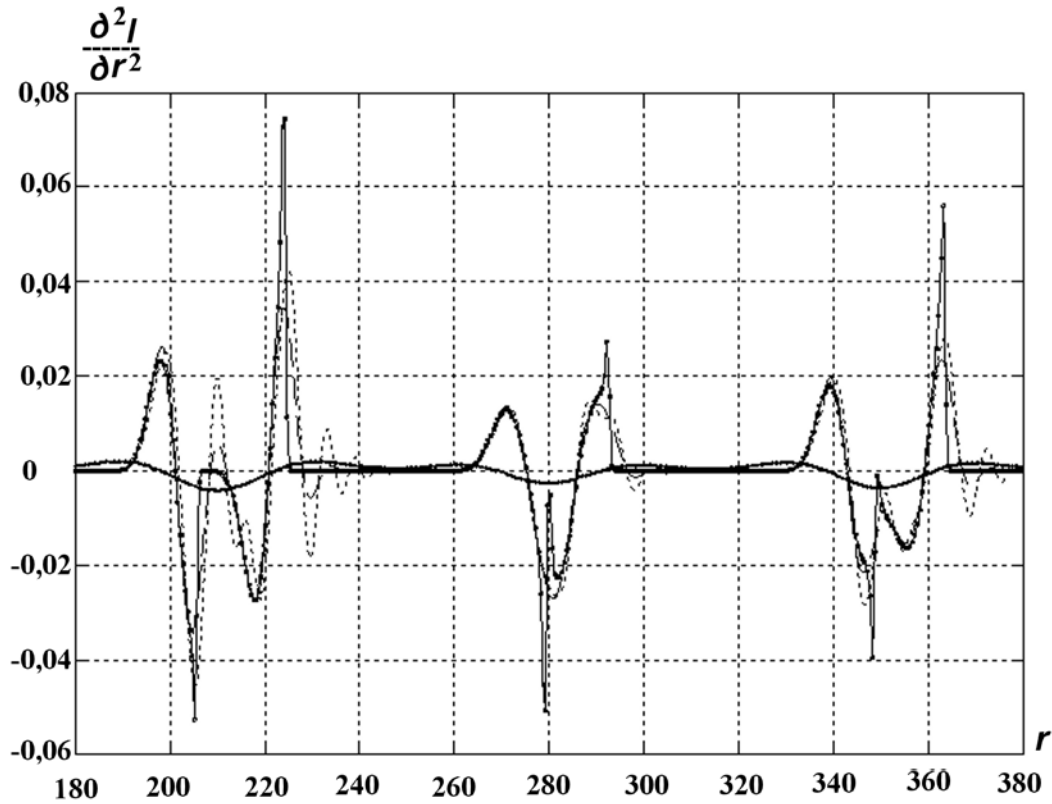


Рис. 4. Задача 1. Профили $\frac{\partial^2 I(r)}{\partial r^2}$: — — точное решение; -o- St-схема; ... — DD-схема; -□- — TVD-схема; - - - - DDAD-схема

Задача 2. Задача построена на остывании сферической области радиусом R с вакуумом, заполненной только фотонами (решение получено А. В. Вронским). Начальное распределение поля излучения задается в виде $I^0(r) = 0,5u_0 \exp\left(-\frac{i_0 r^2}{R^2}\right)$, где u_0, i_0 — положительные константы. Условие на внешней границе: $\varphi_R = I^0\left(\sqrt{R^2 - 2\mu ctR + c^2 t^2}\right)$. Точное решение:

$$U(r, t) = \frac{u_0 R^2}{4i_0 r c t} \left(\exp\left(-\frac{i_0}{R^2}(r - ct)^2\right) - \exp\left(-\frac{i_0}{R^2}(r + ct)^2\right) \right).$$

Расчеты проводились в приближении *серой материи* при следующих параметрах: $c\tau = 0,03$; $h = 0,1$; $u_0 = i_0 = 1$; $R = 3$. На рис. 5 приведены профили $U(r)$ на моменты времени $ct = 2,7$; 3,6; 6.

Из расчетов видно, что результаты, полученные по St-схеме, сильно отличаются от точного решения; полученные по DD- и TVD-схемам практически совпадают с ним. Промежуточное положение занимает DDAD-схема.

Задача 3. Рассматривалась вторая задача Флека в сферически-симметричной постановке [15]. На левой границе задано излучение планковского источника температуры $\varphi_L = B_\nu(T = 1)$, на правой — условие свободной поверхности $\varphi_R = 0$. В областях 1 и 3 ($1 \leq r \leq 3$ и $3,4 \leq r \leq 5$ соответственно) коэффициент поглощения равен $\kappa_\nu = 27(1 - e^{-\nu/T})/\nu^3$, в области 2 ($3 \leq r \leq 3,4$) — $\kappa_\nu = 10000(1 - e^{-\nu/T})/\nu^3$. Везде $E = 0,81T$, $k = 0$ и $T^0 = 0,001$. Использовались следующие сетки:

- 1) $h = 0,2$ в областях 1 и 3; $h = 0,01$ в области 2 (58 ячеек);
- 2) $c\tau = 0,03$; $\nu_{0,15} = 0; 0,3; 0,6; 0,8; 1,2; 1,5; 1,8; 2,4; 2,7; 3; 4; 5; 7; 9; 11; 15$.

На рис. 6 приведены профили температуры вещества на моменты времени $ct = 18; 30; 150; 450$.

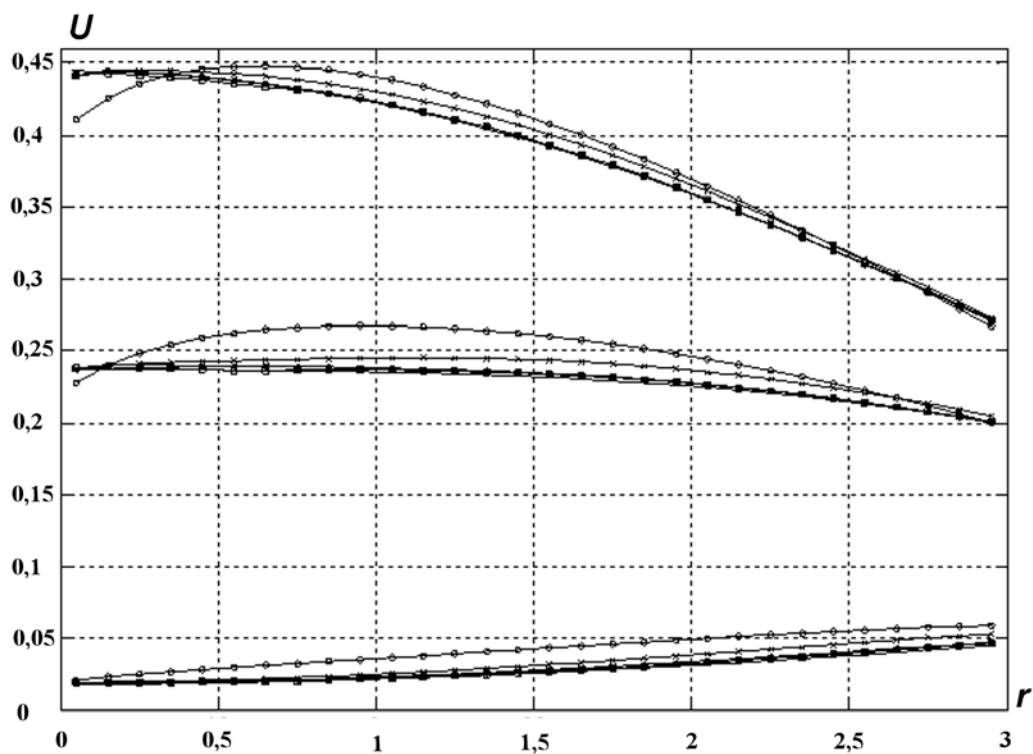


Рис. 5. Задача 2. Плотность излучения $U(r)$, $ct = 2,7; 3,6; 6$ (сверху вниз): — — точное решение; -o- — St-схема; -●- — DD-схема; -□- — TVD-схема; -x- — DDAD-схема

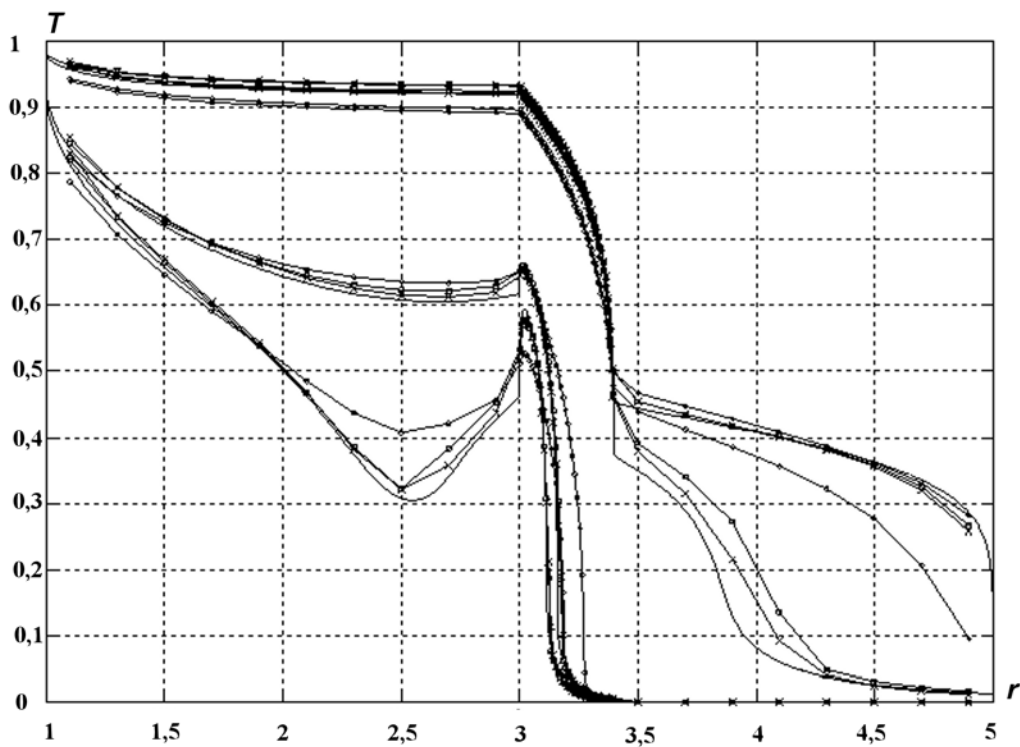


Рис. 6. Задача 3. Температура вещества $T(r)$, $ct = 18; 30; 150; 450$ (снизу вверх): — — точное решение; -x- — DDAD-схема; -o- — St-схема; -□- — TVD-схема

Эту задачу не удалось сосчитать по DD/St-схеме. В качестве *точного решения* брались результаты на сильно измельченной сетке. Из расчетов видно, что результаты по St-схеме сильно отличаются от точного решения, DDAD- и TVD-схемы показывают сопоставимые результаты, хотя DDAD-схема несколько точнее на все моменты времени.

Заключение

В работе построены две неявные схемы типа TVD для решения уравнения переноса теплового излучения. Целью работы было создание монотонной схемы второго порядка. В построенных TVD-схемах удалось сохранить важное достоинство DS_n -метода, когда для решения разностных уравнений используется экономичный метод бегущего счета. Используемая в новых схемах TVD-методология вносит в схему ограничитель, который вычисляется явно по известным величинам с предыдущего временного шага на трехточечном шаблоне в каждом направлении.

В первой схеме величины с верхнего временного слоя берутся в рамках двух ячеек, однако это не мешает организации бегущего счета. Схема консервативная, имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй порядок аппроксимации по пространству. Для этой схемы имеет место положительность величин в центрах ячеек при положительности входящих величин.

В отличие от первой схемы вторая схема не приводит к расширению шаблона и позволяет оставаться в рамках одной ячейки при бегущем счете, причем для этой схемы можно показать положительность величин как в центрах ячеек, так и в узлах. Вторая схема также сочетает в себе консервативность, монотонность в смысле принадлежности к классу TVD-схем и второй порядок аппроксимации по пространству. Она более удобна для практического применения.

Список литературы

1. Карлсон Б. Численное решение задачи кинетической теории нейтронов // Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1963. С. 243—258.
2. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник. 1959. Т. 47(3). С. 271—306.
3. Басс Л. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А. Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. М.: ИПМ АН СССР, 1986.
4. Елесин В. А., Троцкий В. Е., Юдинцев В. Ф. Развитие численных методов и программ расчета одномерных спектральных задач переноса теплового излучения во ВНИИЭФ // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2002. Вып. 1. С. 11—28.
5. Гаджиев А. Д., Селезнев В. Н., Шестаков А. А. DS_n -метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели // Там же. 2003. Вып. 2. С. 33—46.
6. Колган В. П. Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3(6). С. 68—77.
7. Van Leer B. Towards the ultimate conservative scheme. II. Monotonicity and conservation in a second-order scheme // J. Comp. Phys. 1974. Vol. 14(2). P. 361—370.
8. Osher S., Chakravarthy S. High resolution schemes and the entropy condition // SIAM J. Numer. Anal. 1984. Vol. 21(5). P. 955—984.
9. Yee H. C. A Class of high-resolution explicit and implicit shock-capturing methods // VKI lecture series. 1989. Vol. 4.
10. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. 1983. Vol. 49(3). P. 357—393.

11. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
12. Jessee J. P., Fiveland W. A. Bounded, high resolution differencing schemes applied to the discrete ordinates method // Proc. of the 31st National Heat Transfer Conference. 1996. Vol. 3. P. 133–141.
13. Остапенко В. В. О сильной монотонности нелинейных разностных схем // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1998. Т. 38(7). С. 1170–1185.
14. Андреев Е. С., Гусев В. Ю., Козманов М. Ю. Методы повышения точности схемы первого порядка для решения системы уравнений переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1998. Вып. 1. С. 15–18.
15. Fleck J. A. Jr., Cummings J. D. An implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8(3). P. 313–342.

Статья поступила в редакцию 15.10.08.
