

УДК 519.6

## ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ МЕТОДА КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА НА "АЖУРНЫХ" СЕТКАХ

Д. Т. Чекмарев

(ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород)

Рассматривается вопрос об использовании вариационно-разностных и конечно-элементных схем, в которых ячейки (конечные элементы) заполняют расчетную область не сплошь, а с промежутками. Приводятся примеры двумерных и трехмерных схем, обладающих существенно большей эффективностью по сравнению с традиционными схемами.

*Ключевые слова:* метод конечного элемента, вариационно-разностный метод, эффективность численных схем.

### Введение

Во всех известных вариационно-разностных схемах и схемах метода конечного элемента (МКЭ) неявно предполагается, что конечные элементы занимают расчетную область сплошь — без промежутков и без наложения друг на друга. Такое предположение вполне естественно, если принять во внимание, что в МКЭ решение ищется во всех точках области, а не только в узлах. Однако возможен и отказ от требования сплошного заполнения области элементами — в том смысле, что элементы, участвующие в формировании системы алгебраических уравнений, заполняют расчетную область с промежутками (при сохранении связности сетки).

### Двумерная "ажурная" схема

В качестве примера можно привести "ажурную" вариационно-разностную схему решения задач динамики пластин и оболочек типа Тимошенко на треугольных ячейках [1]. Как известно, задачи теории пластин и оболочек типа Тимошенко являются вырождающимися [2], так как система уравнений содержит малый параметр — толщину оболочки. Поэтому у некоторых численных схем, например [3, 4], отсутствует равномерная сходимость по параметру сеточной задачи  $\Delta x/h$ , где  $\Delta x$  — характерный размер ячейки,  $h$  — толщина пластины или оболочки.

Данным недостатком обладает и вариационно-разностная схема на треугольных ячейках. После удаления половины ячеек получаем ажурную схему, свободную от данного недостатка (подробный анализ приведен в [1, 5]).

Рассмотрим результаты решения тестовой линейной задачи динамического деформирования квадратной пластины с размерами  $0,1 \times 0,1$  м, толщиной  $0,002$  м, заземленной по краю. Пластина имеет начальную скорость  $V_0 = 100$  м/с, направленную по нормали к срединной поверхности, равномерно распределенную по поверхности пластины. Характеристики материала: модуль Юнга  $E = 71,5$  ГПа, плотность  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Использовались равномерные квадратные, треугольные и ажурные треугольные сетки  $11 \times 11$  узлов и  $21 \times 21$  узел. Типы сеток представлены на рис. 1. В случае рис. 1, б заштрихованные ячейки не рассматривались.

На рис 2, а, б представлены зависимости прогибов  $w$  в центре пластины от безразмерного времени  $y = 2,55tc/L$  ( $t$  — время,  $c$  — скорость звука,  $L$  — размер пластины (сторона квадрата)). Для сеток  $11 \times 11$  (см. рис. 2, а) и  $21 \times 21$  (см. рис. 2, б) отношение размеров ячейки к толщине пластины  $\Delta x/h = h_1/h = h_2/h$  равнялось соответственно 5 и 2,5. Результаты показывают, что сходимость четырехугольной и ажурной треугольной схем гораздо быстрее и качество решения выше, чем у треугольной схемы. Плохое качество реше-

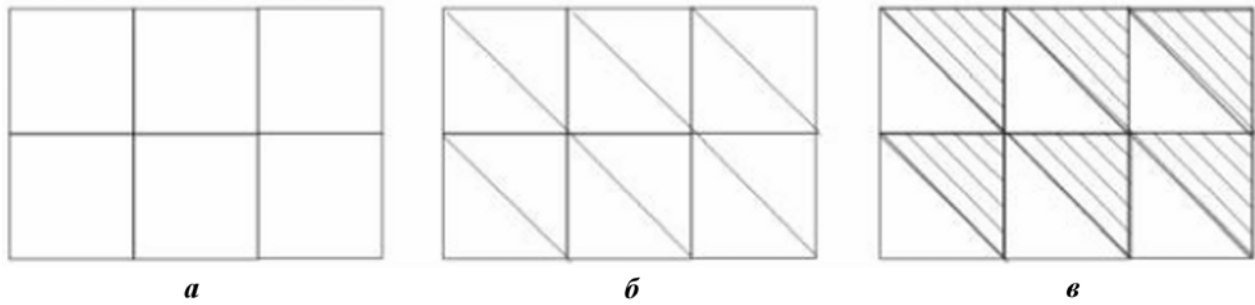


Рис. 1. Четырехугольная (а), треугольная (б) и ажурная треугольная (в) сетки

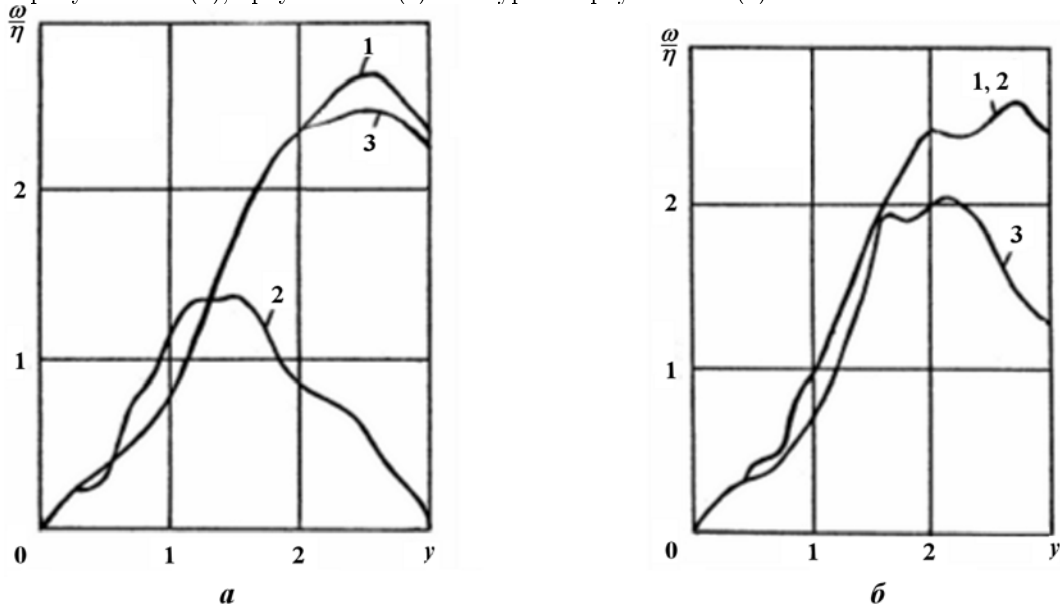


Рис. 2. Зависимости прогибов в центре пластины от времени: а — сетка  $11 \times 11$ ,  $\Delta x/h = 5$ ; б — сетка  $21 \times 21$ ,  $\Delta x/h = 2,5$ ; 1 — четырехугольная схема; 2 — треугольная; 3 — ажурная треугольная

ния, полученного по треугольной схеме, подтверждает теоретический вывод об отсутствии у нее равномерной сходимости по параметру  $\Delta x/h$ .

Рассмотрим еще одну тестовую задачу. Круглая пластина радиусом  $R = 0,08$  м,  $h = 0,002$  м, шарнирно оперта по краю. Начальная скорость  $V_0 = 0,01$  м/с, направленная по нормали, равномерно распределена по поверхности. Использовалась сетка с 9 узлами вдоль радиуса, принцип построения сетки показан на рис. 3. Ввиду симметрии задачи рассчитывалась половина пластины. Решение сравнивалось с решением осесимметричной задачи по методике [6]. Оба решения (значения прогиба в центре пластины) практически совпали, поэтому на рис. 4 приведена одна кривая. Величина прогиба приведена по отношению к радиусу.

Ажурная схема тестировалась также на ряде других задач, в том числе геометрически и физически нелинейных. При этом все тесты показали

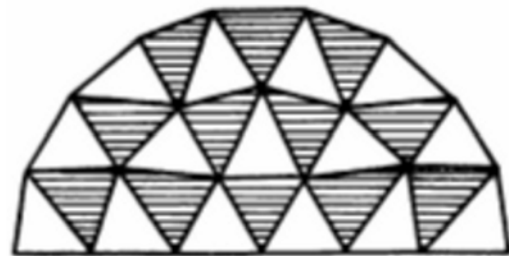


Рис. 3. Расчетная сетка (круглая пластина)

ее высокое качество.

Таким образом, ажурная схема показала преимущества по сравнению со стандартной схемой на треугольниках. Также данная схема является более экономичной и по памяти, и по быстродействию.

Если рассматривать ажурную неявную схему МКЭ, то она будет обладать еще одним преимуще-

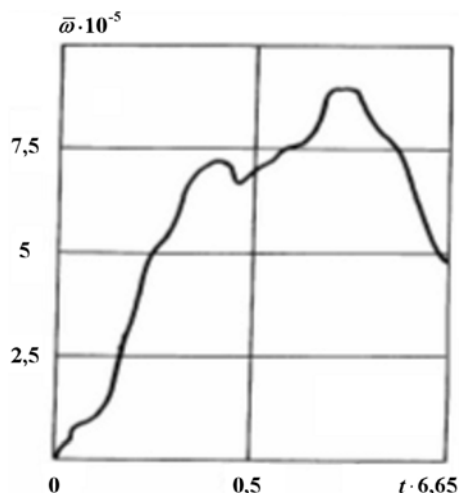


Рис. 4. Зависимость прогиба в центре пластины от времени

ществом — более разреженной матрицей системы. Данная схема имеет суммарный второй порядок аппроксимации на равномерных сетках.

К сожалению, данная схема обладает и существенным недостатком — очевидной асимметрией. В результате на границе второй порядок аппроксимации нарушается. Эта нерешенная проблема граничных условий является основным недостатком, мешающим внедрению схемы в расчетную практику.

Приведенный пример ажурной разностной схемы показывает, что отказ от сплошного заполнения области элементами позволяет получить ряд новых схем, некоторые из которых представляются весьма перспективными. Это относится как к вариационно-разностным схемам, так и к схемам МКЭ.

### Трехмерная "ажурная" схема

Рассмотрим пример ажурной схемы МКЭ решения трехмерных задач теории упругости [7]. Это схема на базе линейного конечного элемента в виде тетраэдра. Известно несколько способов построения регулярных сеток на тетраэдральных ячейках. При одном из них ячейка основной сетки (шестигранник) разбивается на 5 тетраэдров — 1 в центре и 4 по краям. Если удалить все тетраэдры, кроме центрального, получим искомую схему МКЭ (рис. 5).

Разбиение области на элементы производится следующим образом. Область делим на шестигранники и далее в них оставляем по одному тетраэдру. При этом в расчетах участвуют не

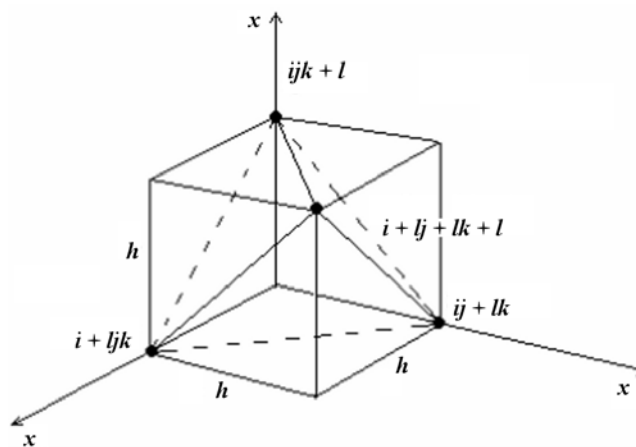


Рис. 5. Элемент ажурной схемы — центральный тетраэдр внутри куба (остальные четыре тетраэдра в расчетах не участвуют)

все узлы разностной сетки (на рис. 6 выделены узлы, участвующие в расчетах). Из восьми кубиков (шестигранников), окружающих узел, тетраэдры оставляем только в четырех, в которых они одинаково ориентированы в пространстве. Остальные кубики полностью игнорируем. Схема расположения элементов вокруг узла приведена на рис. 7.

Таким образом, данная трехмерная сетка конечных элементов обладает минимальной связностью: каждый элемент инцидентен четырем узлам, а каждый внутренний узел сетки инцидентен четырем элементам. При этом данная сетка конечных элементов имеет по сравнению с традиционной тетраэдральной сеткой в 2 раза меньше узлов и в 10 раз меньше ячеек.

Возможен и другой вариант схемы: тетраэдры сохраняются во всех шестигранных ячейках, но в половине ячеек они перевернуты. Такой вариант

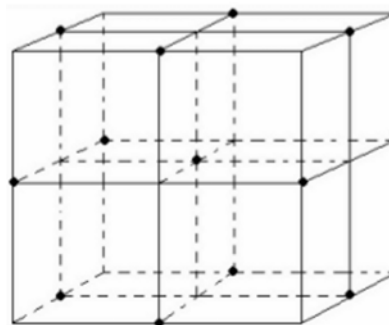


Рис. 6. Шаблон (окрестность узла) ажурной схемы. Точками выделены узлы шаблона

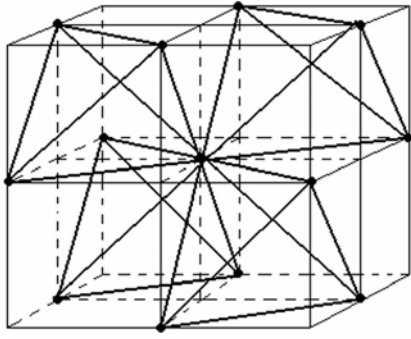


Рис. 7. Схема расположения элементов вокруг узла

имеет по сравнению с традиционным в 2 раза меньше узлов и в 5 раз меньше ячеек.

В отличие от рассмотренной выше схемы на треугольных ячейках данная схема полностью симметрична, так как тетраэдр расположен симметрично относительно центра куба. Схема имеет на ортогональной по координатной сетке второй порядок аппроксимации. При решении динамических задач по явной схеме (или при итерационном решении системы в неявной схеме) вычислительные затраты на один временной слой (одну итерацию) данной схемы не менее чем в 5 раз ниже по сравнению с традиционной схемой на тетраэдрах и не менее чем в 3 раза ниже по сравнению со схемой на полилинейных шестигранных элементах. В случае использования явной схемы *крест* устойчивость данной схемы не хуже, чем у схемы полилинейного шестигранного конечного элемента. Отметим, что данная схема МКЭ в точности совпадает с вариационно-разностной схемой с идентичным расположением ячеек и, следовательно, обладает свойствами индексной коммутативности [1]. Отметим также, что полный шаблон (окрестность узла) данной схемы существенно ближе к шару, чем куб. Следовательно, сеточная анизотропия у нее должна быть ниже, чем, например, у схемы шестигранного полилинейного конечного элемента.

Схема тестировалась на двух динамических и одной статической задачах. В динамическом варианте использовалась явная схема *крест*, в статической системе уравнений решалась методом Зейделя. Решение сравнивалось с результатами, полученными с помощью вариационно-разностной схемы на шестигранных ячейках (динамические задачи), и схемой билинейного конечного элемента (статическая задача). Рассматривались следующие задачи.

*Задача о деформировании упругого куба.* Пять граней куба заделаны, одна грань свободна. На свободной грани задается начальная скорость, направленная по нормали, распределенная по закону

$$V|_{t=0} = \sin \frac{\pi X^1}{l} \sin \frac{\pi X^2}{l},$$

где  $l$  — длина стороны куба. Материал предполагается изотропным упругим с коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,3$ . Поскольку результаты рассматривались в безразмерном виде, остальные характеристики не приводятся. Расчеты проводились на сетке из  $34 \times 34 \times 34$  ячеек (кубиков). Сравнивались перемещения по нормали в центральной точке свободной грани.

*Задача о поперечных колебаниях бруса.* Брус с квадратным сечением имеет размеры  $0,50 \times 0,04 \times 0,04$  м. Свойства материала те же. Торцы бруса заделаны. Брус нагружен поперечной начальной скоростью, перпендикулярной одной из граней и распределенной по закону

$$V|_{t=0} = \sin \frac{\pi X^1}{l}$$

во всем объеме бруса. Здесь  $l$  — длина бруса. Расчет проводился на сетке из  $50 \times 4 \times 4$  ячеек. Сравнивались перемещения в центральной точке бруса.

*Задача Буссинеска.* Дано упругое полупространство  $x_3 \geq 0$ , нагруженное в начале координат сосредоточенной силой  $p_3(x_1, x_2) = P\delta(x_1)\delta(x_2)$ , направленной по оси  $x_3$ . Здесь  $\delta(x)$  — дельта-функция. Требуется определить перемещения  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$ . Аналитическое решение задачи (см. [8]) имеет вид

$$u_3 = \frac{P}{4\pi\mu} \left[ \frac{x_3^2}{R^3} + 2(1-\nu)\frac{1}{R} \right];$$

$$u_\beta = \frac{Px_\beta}{4\pi\mu} \left[ \frac{x_3}{R^3} - (1-2\nu)\frac{1}{R(R+x_3)} \right], \beta = 1, 2;$$

$$R = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}.$$

Здесь  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  — модуль сдвига.

Численно задача решалась в кубе  $\{|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 2\}$ . На гранях куба (кроме грани  $x_3 = 0$ ) задавалось аналитическое решение. На свободной грани — статические граничные условия. При этом сосредоточенная нагрузка "размазывалась" на несколько узлов, иначе

задача не сходилась. Проводилось сравнение скорости сходимости и качественное сопоставление численных решений, полученных по двум схемам, с аналитическим решением.

По результатам тестирования можно сделать следующие выводы:

1) численные результаты решения динамических задач по двум схемам на одинаковых сетках показывают практически полное совпадение;

2) численные результаты решения статической задачи показывают, что ажурная схема в целом не хуже, а в некоторых вариантах лучше схемы полилинейного шестигранного конечного элемента. При этом во всех случаях объем вычислений для ажурной схемы был существенно меньше.

### Проблемы реализации ажурных схем

Рассмотренные ажурные схемы МКЭ должны трактоваться как промежуточные между конечно-разностными и конечно-элементными.

Отказ от одного из основных постулатов МКЭ не позволяет относить данные схемы к схемам МКЭ в чистом виде (как реализацию проекционного подхода). Поэтому обоснование и интерпретация численных результатов для данных схем должны выполняться, скорее, в рамках конечно-разностного подхода.

В то же время при реализации данных схем может (и должна) использоваться техника МКЭ. При этом возможно возникновение ряда проблем, которые могут быть решены при соответствующей интерпретации предложенного подхода. Рассмотрим две наиболее очевидные из них:

1. *Как учитывать объем, массу и другие экстенсивные характеристики удаленных ячеек?* Данная проблема может быть решена путем присоединения удаленного объема (массы и т. п.) к оставленным ячейкам. Например, тетраэдральный элемент можно интерпретировать как шестигранный четырехузловой линейный элемент.
2. *Как реализовывать граничные условия в усилиях?* С каждым граничным узлом сетки связывается определенный участок границы расчетной области, и сила, действующая на этот участок, прикладывается к узлу, как это делается в вариационно-разностном методе. Фактически поверхностный интеграл заменяется квадратурной формулой.

Предложенные варианты решения проблем, очевидно, не единственные. Эти, а также другие возникающие проблемы могут быть решены по-разному в зависимости от конкретной ситуации. В целом же автор считает, что у данных схем проблем должно быть не больше, чем у любых других численных схем.

### Заключение

Предлагаемый подход к построению экономических численных схем МКЭ фактически касается только геометрического аспекта конструирования численных схем — построения сеток конечных элементов. Все остальные вопросы, касающиеся свойств среды, метода описания движения и т. д., могут решаться независимо — так же, как в традиционных численных схемах. Этим обуславливается универсальность предлагаемого подхода и возможность его применения к решению различных классов задач математической физики.

### Список литературы

1. *Баженов В. Г., Чекмарев Д. Т.* Об индексной коммутативности численного дифференцирования // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1989. Т. 29, № 5. С. 662—674.
2. *Болдычев В. П.* О связи различных схем метода конечных элементов при решении вырождающихся задач // Труды ЛПИ. 1985. № 405. С. 26—31.
3. *Гордиенко Б. А.* О машинном решении задач ударного выпучивания упругих систем методом конечных разностей // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 3. С. 143—148.
4. *Пацюк В. И., Рыбакова Г. А., Сабодаш П. Ф.* Волновые процессы в цилиндрической оболочке при неосесимметричном продольном ударе // Прикладная механика. 1985. Т. 21, № 1. С. 35—42.
5. *Баженов В. Г., Чекмарев Д. Т.* Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2000.
6. *Баженов В. Г., Ломунов В. К.* Исследование упругопластического выпучивания обо-

- лочек при ударном нагружении // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: ГГУ, 1975. Вып. 2. С. 44—50.
7. Чекмарев Д. Т. "Ажурные" схемы метода конечного элемента // Там же. Нижний Новгород: ННГУ, 1997. Вып. 55. С. 157—159.
8. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.

Статья поступила в редакцию 06.11.08.

---