УДК 621.039.586

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ С ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

М. В. Кащеев
(ГНЦ РФ-ФЭИ, г. Обнинск)

Методом конечных интегральных преобразований решена задача нестационарной теплопроводности ограниченного цилиндра с непрерывно действующими источниками тепла, помещенного в среду с переменной во времени температурой, с граничными условиями третьего рода на трех границах.

Ключевые слова: задача теплопроводности, цилиндрический стержень, внутренние источники тепла, метод конечных интегральных преобразований, дифференциальный оператор, характеристическое уравнение, ядро преобразования, граница, окружающая среда.

Рассмотрим задачу об остывании однородного цилиндрического стержня с круглым сечением радиусом R и длиной l, помещенного в среду с температурой $\widehat{T}_c\,(t)$. На границах стержня происходит теплообмен по закону Ньютона. В цилиндре действуют источники тепла, зависящие от времени. Если вести отсчет температуры от *ложного нуля* $\widehat{T}_c\,(t)$, т. е. $T=\widehat{T}-\widehat{T}_c$, то в системе координат (r,z) математическую постановку задачи можно записать в следующем виде:

– дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{q_V\,(t)}{\lambda}-\frac{1}{a}\frac{\partial \widehat{T}_c\,(t)}{\partial t},\quad 0<r<R,\quad 0<z<l,\quad 0<t<\infty; \tag{1}$$

– начальное условие

$$T\,(r,z,0)=T^0,\quad 0<r<R,\quad 0<z<l; \tag{2}$$

– граничные условия

$$\frac{\partial T\,(0,z,t)}{\partial r}=0,\quad 0<z<l,\quad 0<t<\infty; \tag{3}$$

$$\frac{\partial T\,(R,z,t)}{\partial r}+h_1 T\,(R,z,t)=0,\quad 0<z<l,\quad 0<t<\infty; \tag{4}$$

$$\frac{\partial T\,(r,0,t)}{\partial z}-h_2 T\,(r,0,t)=0,\quad 0<r<R,\quad 0<t<\infty; \tag{5}$$

$$\frac{\partial T\,(r,l,t)}{\partial z}+h_3 T\,(r,l,t)=0,\quad 0<r<R,\quad 0<t<\infty. \tag{6}$$

Здесь r, z [м] — поперечная и продольная координаты соответственно; t [с] — время; T, T^0 [К] — текущая и начальная температура; a [$\text{м}^2\cdot\text{с}^{-1}$] — коэффициент температуропроводности; q_V [Вт/м^3] — мощность источников тепла; λ [$\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$] — коэффициент теплопроводности; $h_i=\alpha_i/\lambda$ [м^{-1}], α_i $\left[\text{Вт}/\left(\text{м}^2\cdot\text{К}\right)\right]$ — коэффициент теплоотдачи, $i=1,2,3$.

Если ввести масштабы: $T_м$ — для температуры, R — для линейных размеров, R^2/a — для времени, q_{V0} — для объемной плотности тепловыделения, то задача (1)—(6) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} + Q(\tau) - \frac{\partial \widehat{u}_c(\tau)}{\partial \tau}, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < Z < \Lambda, \quad 0 < \tau < \infty; \tag{7}$$

$$u(\rho, Z, 0) = u^0, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < Z < \Lambda; \tag{8}$$

$$\frac{\partial u(0, Z, \tau)}{\partial \rho} = 0, \quad 0 < Z < \Lambda, \quad 0 < \tau < \infty; \tag{9}$$

$$\frac{\partial u(1, Z, \tau)}{\partial \rho} + \mathrm{Bi}_1 u(1, Z, \tau) = 0, \quad 0 < Z < \Lambda, \quad 0 < \tau < \infty; \tag{10}$$

$$\frac{\partial u(\rho, 0, \tau)}{\partial Z} - \mathrm{Bi}_2 u(\rho, 0, \tau) = 0, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < \tau < \infty; \tag{11}$$

$$\frac{\partial u(\rho, \Lambda, \tau)}{\partial Z} + \mathrm{Bi}_3 u(\rho, \Lambda, \tau) = 0, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < \tau < \infty. \tag{12}$$

Здесь $\rho = r/R$; $Z = z/R$; $\Lambda = l/R$; $u = T/T_м$; $u^0 = T^0/T_м$; $\widehat{u}_c = \widehat{T}_c/T_м$; $T_м = q_{V0}R^2/\lambda$; $\tau = \mathrm{Fo} = at/R^2$ (Fo — число Фурье); $h_i R = \alpha_i R/\lambda = \mathrm{Bi}_j$, $j = 1, 2, 3$ (Bi — число Био); $Q(\tau) = q_V(t)/q_{V0}$.

Решим задачу (7)—(12) с использованием метода конечных интегральных преобразований [1, 2]. Следуя указанным работам, для исключения дифференциальных выражений по Z можно получить ядро прямого преобразования в виде

$$\overline{K}_{\mu_n}(Z) = \frac{1}{C_{\mu_n}}\left(\cos\mu_n Z + \frac{\mathrm{Bi}_2}{\mu_n}\sin\mu_n Z\right). \tag{13}$$

При этом нормирующий делитель равен

$$C_{\mu_n} = \frac{\Lambda}{2}\left(1 + \frac{\mathrm{Bi}_2^2}{\mu_n^2}\right) + \frac{(\mathrm{Bi}_2 + \mathrm{Bi}_3)\left(\mu_n^2 + \mathrm{Bi}_2\mathrm{Bi}_3\right)}{2\mu_n^2\left(\mu_n^2 + \mathrm{Bi}_3^2\right)},$$

а собственные числа μ_n^2 $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ — положительные корни характеристического уравнения

$$\operatorname{ctg}\mu\Lambda = \frac{\mu^2 - \mathrm{Bi}_2\mathrm{Bi}_3}{\mu(\mathrm{Bi}_2 + \mathrm{Bi}_3)}. \tag{14}$$

С помощью интегрального преобразования в интервале $0 < Z < \Lambda$ с ядром (13) задачу (7)—(12) приведем к виду

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \rho} - \mu_n^2\overline{u} + \overline{f}(\tau), \tag{15}$$

где чертой обозначены интегральные образы исходных величин u, $u(0)$ и $f(\tau) = Q(\tau) - \dfrac{\partial \widehat{u}_c}{\partial \tau}$, т. е.

$$\overline{u} = \int_0^\Lambda \overline{K}_{\mu_n} u\,dZ; \qquad \overline{u}(0) = A_n u^0; \qquad \overline{f}(\tau) = A_n f(\tau), \tag{16}$$

где

$$A_n = \frac{1}{C_{\mu_n}\mu_n^2}\left((-1)^{n+1}\mathrm{Bi}_3\sqrt{\frac{\mu_n^2 + \mathrm{Bi}_2^2}{\mu_n^2 + \mathrm{Bi}_3^2}} + \mathrm{Bi}_2\right).$$

Теперь исключим дифференциальные операции по ρ. Ядро прямого преобразования в этом случае имеет вид

$$\widetilde{K}_{\nu_k}(\rho) = \frac{\rho}{C_{\nu_k}} J_0(\nu_k\rho), \tag{17}$$

где нормирующий делитель

$$C_{\nu_k} = \int_0^1 J_0^2\left(\nu_k\rho\right)\rho d\rho = \frac{1}{2}\left(J_0^2\left(\nu_k\right) + J_1^2\left(\nu_k\right)\right);$$

$J_0\left(x\right)$, $J_1\left(x\right)$ — функции Бесселя первого рода соответственно нулевого и первого порядков. Собственные числа ν_k^2 $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ — положительные корни характеристического уравнения

$$\frac{J_0\left(\nu\right)}{J_1\left(\nu\right)} = \frac{\nu}{\mathrm{Bi}_1}. \tag{18}$$

Осуществляя прямое преобразование задачи (15), (16) с ядром (17) в интервале $0 < \rho < 1$, получаем обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d\widetilde{u}}{d\tau} + \left(\mu_n^2 + \nu_k^2\right)\widetilde{u} = \widetilde{f}\left(\tau\right),$$

где

$$\widetilde{u} = \frac{1}{C_{\nu_k}}\int_0^1 \overline{u}\left(\rho, \tau\right) J_0\left(\nu_k\rho\right)\rho d\rho,$$

$$\widetilde{u}\left(0\right) = A_n A_k u^0, \quad \widetilde{f}\left(\tau\right) = A_n A_k f\left(\tau\right), \quad A_k = \frac{2\mathrm{Bi}_1}{J_0\left(\nu_k\right)\left(\nu_k^2 + \mathrm{Bi}_1^2\right)}, \tag{19}$$

решение которого с начальным условием (19) (первая формула), полученное методом вариации постоянной [3], имеет вид

$$\widetilde{u}\left(\tau\right) = e^{-\left(\mu_n^2+\nu_k^2\right)\tau}\left(\int_0^\tau \widetilde{f}\left(\tau'\right) e^{\left(\mu_n^2+\nu_k^2\right)\tau'} d\tau' + \widetilde{u}\left(0\right)\right).$$

Заметим, что тильдой обозначены интегральные образы двойного преобразования исходных величин.

Осуществляя обратное преобразование, находим решение задачи

$$u\left(\rho, Z, \tau\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_n A_k\left(\cos\mu_n Z + \frac{\mathrm{Bi}_2}{\mu_n}\sin\mu_n Z\right) J_0\left(\nu_k\rho\right) e^{-\left(\mu_n^2+\nu_k^2\right)\tau}\left(\int_0^\tau f\left(\tau'\right) e^{\left(\mu_n^2+\nu_k^2\right)\tau'} d\tau' + u^0\right). \tag{20}$$

Полученное решение (20) является знакопеременным рядом. Так как для знакопеременных рядов сумма отброшенных членов по абсолютной величине не превышает первого из этих членов, то при относительной погрешности $\varepsilon = 0{,}001$ для малых времен $\left(\tau \sim 10^{-4}\right)$ $n = k = 30$. С увеличением времени число членов уменьшается. Так, при $\tau > 0{,}5$ указанная точность достигается удержанием всего лишь четырех членов ряда.

Для решения трансцендентных характеристических уравнений (14), (18) целесообразно применять итерационный метод Вегстейна [4].

В справочнике [5] приведено решение задачи в аналогичной физической постановке для прямого кольцевого конечного цилиндра с объемными источниками энергии, зависящими от координат и времени, но с постоянной температурой среды, равной нулю. Решение (20) является частным решением по сравнению с решением [5] в смысле геометрии и отсутствия зависимости энерговыделения от координат, но более общим вследствие изменения во времени температуры среды. Решение, приведенное в [5], менее пригодно для практического использования по сравнению с решением, полученным в данной работе. Достоинством полученного решения является также его критериальная форма.

В заключение отметим, что из решения (20) можно получить решения частных задач, некоторые из которых рассмотрены в монографии [6]. Так, при $\mathrm{Bi}_1 = 0$ и $f(\tau) = 0$ имеем задачу охлаждения бесконечно протяженной пластины толщиной l: если $\mathrm{Bi}_2 = \mathrm{Bi}_3$ — задача симметричная, если $\mathrm{Bi}_2 \neq \neq \mathrm{Bi}_3$ — несимметричная. При $\mathrm{Bi}_2 = \mathrm{Bi}_3 = 0$ и $f(\tau) = 0$ получается задача охлаждения бесконечного стержня при граничном условии третьего рода; при $\mathrm{Bi}_1 = \mathrm{Bi}_2 = \mathrm{Bi}_3 = \infty$ — задача охлаждения конечного цилиндра, помещенного в кипящую среду; при $\mathrm{Bi}_2 = 0$ и $f(\tau) = 0$ — задача охлаждения (нагревания) конечного цилиндра.

Список литературы

1. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.
2. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1985.
3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959.
4. *Ланс Дж. Н.* Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М.: Изд-во иностранной литературы, 1962.
5. *Полянин А. Д., Вязьмин А. В., Журов А. И., Казенин Д. А.* Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса. М.: Факториал, 1998.
6. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.

Статья поступила в редакцию 24.02.09.