

УДК 533.9

## СХЕМА РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЫ

А. И. Голубев, Т. Г. Сысоева  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Рассмотрено обобщение на случай релятивистской плазмы предложенной ранее комбинированной схемы расщепления системы уравнений Власова—Максвелла.

При численном решении уравнений наиболее сложных этапов схемы расщепления, на которых учитывается влияние на распределение электронов компонентов электромагнитного поля, проведено исследование точности метода характеристик с интерполяцией функции распределения релятивистских электронов на основе кубических сплайнов. Результаты исследования показали, что при решении кинетических уравнений на этих этапах метод обеспечивает приемлемую для приложений точность выполнения имеющихся законов сохранения.

*Ключевые слова:* уравнения Власова—Максвелла, функция распределения электронов, метод характеристик, кубические интерполяционные сплайны.

### Введение

В работе [1] была предложена новая схема расщепления для численного решения системы уравнений Власова—Максвелла. Известные авторам схемы расщепления многомерного кинетического уравнения на шаге по времени основаны на идее, изложенной в пионерской работе [2]. В этих схемах напряженности электрического и магнитного полей на всех этапах вычисления функции распределения остаются неизменными по времени. В схеме [1] наряду с расщеплением многомерного нерелятивистского уравнения Власова расщепляются и уравнения Максвелла, а именно в отдельный этап вынесен учет влияния токов на электрические поля. Кроме того, данный этап совмещен с этапом схемы расщепления для кинетического уравнения Власова, на котором учитывается влияние электрических полей на функцию распределения частиц. Такая комбинированная схема расщепления обладает преимуществом перед традиционными схемами. Она позволяет по заданным значениям электрических полей и токов на момент времени  $t_n$  на основе интегральных следствий кинетического уравнения вычислить токи на момент времени  $t_{n+1} = t_n + \tau$  ( $\tau$  — шаг по времени для схемы расщепления) и согласовать эти токи с электрическими полями, вычисляемыми при  $t = t_{n+1}$ . Такое согласование существенно улучшает консервативные свойства схемы расщепления на этапе обмена энергией между плазмой и электрическим полем.

В данной работе комбинированная схема расщепления в отличие от работы [1] рассмотрена для случая релятивистской плазмы. Формально она имеет тот же вид, что и в случае нерелятивистской плазмы, но численная реализация отдельных этапов значительно сложнее.

Естественно, действенность любой схемы расщепления зависит от того, насколько удачно выбраны разностные схемы для решения уравнений отдельных этапов. В работе [1] для решения одномерных уравнений переноса на этапе учета влияния электрических полей на функцию распределения авторами была выбрана схема Алояна—Дымникова [3] вследствие ее монотонности, точности второго порядка на гладких решениях и простоты реализации. Однако впоследствии оказалось, что при расчетах физических задач для получения приемлемого уровня дисбаланса полной энергии

(обычно  $\leq 1\%$ ) в системе *плазма—электромагнитное поле* вследствие излишней диссипативности схемы [3] требуется чрезмерно большое число узлов сетки в пространстве скоростей частиц.

В известных авторам работах по схемам расщепления для уравнения Власова при численном решении уравнений отдельных этапов в пространстве скоростей наибольшее распространение получил метод характеристик с применением для интерполяции функции распределения кубических сплайнов [2, 4—7]. В работе [8] для интерполяции в методе характеристик использованы лагранжевы кубические многочлены, в работе [9] — эрмитовы кубические многочлены. Из других методов решения уравнений переноса в пространстве скоростей отметим метод балансных потоков, подробно рассмотренный в работах [10—12]. Сравнение различных методов решения уравнения переноса [13—15] (с применением других видов интерполяции функции распределения в методе характеристик и с использованием различных способов реконструкции балансных потоков), по мнению авторов, не выявило метода, существенно превосходящего по точности метод характеристик с интерполяцией на основе кубических сплайнов. Поэтому в данной работе используется именно этот метод и проводится его тестирование при численном решении уравнений наиболее сложных этапов схемы расщепления.

### Исходные уравнения и схема расщепления

Для определенности будем рассматривать уравнения Власова—Максвелла применительно к следующей задаче. Пусть требуется проследить временную эволюцию электронного распределения в предположении, что ионный фон неподвижен. В данной работе будем рассматривать только пространственно-одномерные задачи, предполагая, что функция распределения электронов  $f$  и напряженности  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  электрического и магнитного полей зависят от одной пространственной переменной, которую обозначим через  $x$ . Таким образом, размерность кинетического уравнения равна четырем, а вся задача в целом согласно общепринятой классификации в физике плазмы [16] имеет размерность, равную двум. При сделанном выше предположении уравнения модели примут вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} - \left( \vec{E} + [\vec{v}, \vec{H}] \right) \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} + j_x = 0; \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} + j_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} + j_z = \frac{\partial H_y}{\partial x}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}. \quad (3)$$

При этом компонента  $H_x = H_{x0} = \text{const}$ , а уравнение, используемое при задании начальных данных для  $E_x$ , приводится к виду

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \rho_i - n.$$

В приведенных выше уравнениях  $f(t, x, \vec{p})$  — функция распределения электронов;  $\vec{p}, \vec{v}$  — их импульс и скорость;  $\vec{j}$  — плотность тока,  $n$  — концентрация электронов,

$$\vec{j} = - \int \vec{v} f d\vec{p}, \quad n = \int f d\vec{p}; \quad (4)$$

$\rho_i$  — заданная плотность заряда ионов. Уравнения (1)—(4) записаны для безразмерных величин; использованы следующие единицы измерения: для скорости  $\vec{v}$  — скорость света в вакууме  $c$ ; для времени  $t - \tau_* = \omega_{p_*}^{-1} = (4\pi n_* e^2 / m)^{-1/2}$ , где  $e, m$  — заряд и масса электрона,  $n_*$  — единица измерения для концентрации электронов  $n$ ; для остальных величин в качестве единиц измерения полагаем

$$E_* = \frac{mc}{e\tau_*}; \quad p_* = mc; \quad f_* = n_* p_*^{-3}; \quad j_* = en_* c; \quad x_* = c\tau_*.$$

В релятивистском случае скорость  $\vec{v}$  и импульс  $\vec{p}$  связаны соотношением  $\vec{v} = \vec{p} / \sqrt{1 + p^2}$  (в нерелятивистском случае полагается  $\vec{v} = \vec{p}$ ). Уравнения (1)–(3) должны быть дополнены подходящими начальными и граничными условиями, соответствующими конкретной задаче.

При численном моделировании задач физики плазмы важное место занимает контроль за динамикой обмена энергией между плазмой и электромагнитным полем. В этой связи в рассмотрение вводятся плотности  $W_k$  и  $W_p$  кинетической энергии плазмы и энергии поля:

$$W_k = \int \varepsilon f d\vec{p}; \quad W_p = \frac{1}{2} \left( |\vec{E}|^2 + |\vec{H}|^2 \right), \quad (5)$$

где  $\varepsilon = \sqrt{1 + p^2} - 1$  в релятивистском случае ( $\varepsilon = 0,5p^2$  в нерелятивистском случае). Имеет место следующее уравнение баланса энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} (W_k + W_p) + \text{div} \left( \int \varepsilon \vec{v} f d\vec{p} + [\vec{E}, \vec{H}] \right) = 0.$$

При построении численного алгоритма для уравнений (1)–(5) используется схема расщепления, аналогичная приведенной в работе [1]. Она основана на замене многомерного уравнения переноса на последовательность одномерных переносов в каждом направлении и двумерных вращений функции распределения в магнитном поле; кроме того, производится расщепление уравнений Максвелла. Цепочка дифференциальных уравнений, решаемых на интервале  $[t_n, t_{n+1} = t_n + \tau]$ , имеет следующий вид:

— учет пространственных градиентов

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \quad t_n \leq t \leq t_n + \tau/2; \quad f_1(t = t_n) = f(t_n); \quad (6)$$

— учет влияния на  $f$  электрического поля  $E_\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ )

$$\begin{cases} \frac{\partial f_s}{\partial t} - E_\alpha^{(1)} \frac{\partial f_s}{\partial p_\alpha} = 0, & t_n \leq t \leq t_{n+1}; \\ \frac{\partial E_\alpha^{(1)}}{\partial t} + j_\alpha = 0, & f_s(t = t_n) = f_{s-1}(t_n + \eta\tau); \\ j_\alpha = - \int v_\alpha f_s d\vec{p}, & E_\alpha^{(1)}(t = t_n) = E_\alpha(t_n), \end{cases} \quad (7)$$

где значениям  $\alpha = x, y, z$  соответствуют значения  $s = 2, 3, 4$ ;  $\eta = 1/2$  для  $s = 2$ ,  $\eta = 1$  для  $s = 3, 4$ ;

— решение уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}; \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}; \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial x}, \end{cases} \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \quad (8)$$

$E_y(t_n) = E_y^{(1)}(t_{n+1})$ ;  $E_z(t_n) = E_z^{(1)}(t_{n+1})$ ; для  $H_y, H_z$  в качестве начальных данных берем их значения при  $t = t_n$ ;

— учет влияния на  $f$  магнитного поля  $H_\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ )

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} - H_\alpha \left( v \frac{\partial f_s}{\partial p} - u \frac{\partial f_s}{\partial q} \right) = 0, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}; \quad f_s(t_n) = f_{s-1}(t_{n+1}), \quad (9)$$

где значениям  $\alpha = x, y, z$  соответствуют значения  $v = v_z, v_x, v_y$ ,  $u = v_y, v_z, v_x$ ,  $s = 5, 6, 7$ ; импульсы  $p, q$  соответствуют скоростям  $u, v$ ;

— учет пространственных градиентов

$$\frac{\partial f_8}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_8}{\partial x} = 0, \quad t_n + \tau/2 \leq t \leq t_{n+1}; \quad f_8(t_n + \tau/2) = f_7(t_{n+1}). \quad (10)$$

По завершении решения уравнений (6)–(10) полагаем

$$f(t_{n+1}) = f_8(t_{n+1}),$$

и на этом заканчиваются вычисления на интервале  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ .

Приведенные выше уравнения переноса (6), (7), (9), (10) решаются методом характеристик с применением для интерполяции функции распределения сплайнов (кубических для уравнений (6), (7), (10) и бикубических для уравнений (9)). При вычислении  $f_s$  в (7) и (9) значения компонент  $E_\alpha^{(1)}$ ,  $H_\alpha$  полагаются равными полусуммам значений этих компонент при  $t = t_n$  и  $t = t_{n+1}$ . Уравнения (8) решаются с использованием двухслойной акустической схемы [17].

Наиболее сложны для численного решения уравнения (7), (9), поэтому дальнейшее обсуждение будет связано именно с ними.

### Учет влияния электрического поля на функцию распределения электронов

Отметим, что, как и в нерелятивистском случае, для уравнений (7) при каждом  $\alpha$  имеют место следующие законы сохранения:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( W_k + \frac{E_\alpha^2}{2} \right) = 0. \quad (11)$$

К сожалению, из первого уравнения (7) уже нельзя получить в качестве следствия соотношение

$$\frac{\partial j_\alpha}{\partial t} - E_\alpha n = 0,$$

имеющее место в нерелятивистском случае, которое вместе со вторым уравнением из (7) позволяет вычислить значение  $E_\alpha$  на следующий момент времени  $t_{n+1} = t_n + \tau$  [1]. В релятивистском случае получаем

$$\frac{\partial j_\alpha}{\partial t} - E_\alpha \int \frac{\partial v_\alpha}{\partial p_\alpha} f d\vec{p} = 0. \quad (12)$$

Это обстоятельство делает схему решения уравнений (7) для релятивистского случая существенно более сложной, чем для нерелятивистского.

В дальнейшем для определенности положим  $\alpha = x$  и индекс  $\alpha$  для сокращения записи у всех величин временно опустим. Кроме того, введем обозначение  $p_*^2 = 1 + p_y^2 + p_z^2$ , так что  $x$ -компонента скорости  $\vec{v}$  будет равна  $v = p / \sqrt{p_*^2 + p^2}$ .

Для численного решения второго уравнения из (7) на интервале  $t_n \leq t \leq t_n + \tau = t_{n+1}$  будем, как и в нерелятивистском случае, использовать схему вида

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\tau} + \frac{j^{n+1} + j^n}{2} = 0, \quad (13)$$

которая при подходящем способе вычисления  $j^{n+1}$  обеспечивает аппроксимацию закона сохранения энергии (11) с порядком  $O(\tau^2)$ . При решении уравнения для  $f$  из (7) на интервале  $[t_n, t_{n+1}]$  будем использовать метод характеристик с интерполяцией  $f(t, p)$  по  $p$  в момент  $t = t_n$  на основе кубических сплайнов, полагая при этом

$$E = \frac{E^{n+1} + E^n}{2}.$$

Построим схему вычисления  $j^{n+1}$ , согласованную по точности со схемой решения уравнения для  $f$ . Характеристики уравнения для  $f$  из (7) имеют вид

$$p(t) = p_0 - E(t - t_n),$$

где  $p_0$  — значение  $p$  при  $t = t_n$ . Следовательно, при  $t = t_{n+1}$  для  $f$  имеем

$$f(t = t_{n+1}, p) = f(t = t_n, p + E\tau). \quad (14)$$

Поэтому если  $f(t = t_n, p_0)$  — кубический сплайн по переменной  $p_0$ , то  $f(t = t_{n+1}, p)$  будет кубическим сплайном относительно  $p + E\tau$ , а  $j^{n+1}$  — многочленом третьей степени от переменной  $\tau$ . Можно, вообще говоря, определить явно коэффициенты этого многочлена, используя представление (14); однако, как показало применение такого подхода, этот способ трудно реализовать в случае, когда  $E$  меняет знак на интервале  $(t_n, t_{n+1})$ .

Воспользуемся для вычисления  $j^{n+1}$  методом рядов Тейлора, полагая

$$j^{n+1} = j^n + \tau \frac{\partial j^n}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 j^n}{\partial t^2} + \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^3 j^n}{\partial t^3}.$$

Производные по  $t$  от плотности тока  $j$  можно найти, последовательно применяя соотношение (12), считая при этом  $E$  постоянной величиной:

$$\frac{\partial^s j^n}{\partial t^s} = (-1)^{s+1} E^s a_s,$$

где

$$a_s = \int \frac{\partial^s v}{\partial p^s} f^n d\vec{p} \quad (s = 1, 2, 3). \quad (15)$$

Тогда получим

$$j^{n+1} = j^n + (E\tau) a_1 - \frac{(E\tau)^2}{2} a_2 + \frac{(E\tau)^3}{6} a_3. \quad (16)$$

Теперь имеется возможность получить уравнение для вычисления  $E$ . Учитывая (13) и определение  $E$ , имеем

$$E = E^n - \frac{\tau}{4} (j^{n+1} + j^n).$$

Подставляя вместо  $j^{n+1}$  выражение (16), после несложных преобразований находим

$$E = E_0 + aE^2 - bE^3, \quad (17)$$

где

$$E_0 = \frac{E^n - \frac{1}{2}\tau j^n}{1 + \frac{1}{4}\tau^2 a_1}; \quad a = \frac{1}{8} \frac{\tau^3 a_2}{1 + \frac{1}{4}\tau^2 a_1}; \quad b = \frac{1}{24} \frac{\tau^4 a_3}{1 + \frac{1}{4}\tau^2 a_1}.$$

После определения  $E$  значение  $E^{n+1}$  получается по формуле

$$E^{n+1} = 2E - E^n.$$

Способ решения уравнения (17) обсуждается в Приложении. Здесь же ограничимся вычислением коэффициентов  $a_s$ . Учитывая зависимость  $v(p)$ , имеем

$$\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{p_*^2}{(p_*^2 + p^2)^{3/2}}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial p^2} = -\frac{3p_*^2}{(p_*^2 + p^2)^2} v; \quad \frac{\partial^3 v}{\partial p^3} = \frac{3p_*^2 (4p^2 - p_*^2)}{(p_*^2 + p^2)^{7/2}}. \quad (18)$$

Из формул (15), (18) следует, что  $a_1 > 0$ , т. е. знаменатель в формулах для  $E_0$ ,  $a$ ,  $b$  всегда больше единицы; знаки  $a_2$ ,  $a_3$ , вообще говоря, заранее определить нельзя.

### Тестирование схемы вычисления напряженности электрического поля

Тестирование схемы (13), (16) проведем на следующей модельной задаче. Пусть требуется найти решение уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial t} - E \frac{\partial f}{\partial p} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial t} + j = 0 \quad (19)$$

в области  $(-\infty < p < \infty, t > 0)$  при следующих начальных и граничных условиях:

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} f(t, p) = 0; \quad E(t = 0) = E_0; \quad f(t = 0, p) = \varphi(p).$$

В этих уравнениях

$$j = - \int v f dp, \quad v = \frac{p}{\sqrt{p_*^2 + p^2}}.$$

Нетрудно убедиться, что решение для  $f$  имеет вид

$$f(t, p) = \varphi(p + \Phi(t)), \quad \Phi(t) = \int_0^t E(t') dt'.$$

Учитывая вид  $\Phi(t)$ , из второго уравнения (19) получаем следующее нелинейное уравнение для этой функции:

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p}{\sqrt{p_*^2 + p^2}} \varphi(p + \Phi(t)) dp = 0, \quad (20)$$

которое требуется решить при начальных условиях вида

$$\Phi(t = 0) = 0; \quad \frac{d\Phi(t = 0)}{dt} = E_0.$$

Выберем для теста гладкое начальное распределение  $\varphi(p)$  вида

$$\varphi(p) = \varphi_0 e^{-(p/p_m)^2}, \quad \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi} p_m},$$

и для него уравнение (20) будем решать численно. Численное решение получается при использовании метода Рунге—Кутты для эквивалентной (20) системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= E; \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\pi} p_m} \int_0^{\infty} \frac{p}{\sqrt{p_*^2 + p^2}} \left( \exp\left(-\frac{(p + \Phi)^2}{p_m^2}\right) - \exp\left(-\frac{(p - \Phi)^2}{p_m^2}\right) \right) dp \end{aligned} \quad (21)$$

с начальными условиями  $\Phi(t = 0) = 0, E(t = 0) = E_0$ . Результаты численного решения этой системы, приводимые далее, получены с относительной точностью  $10^{-5}$ .

Задавая различные значения  $p_m, p_*, E_0$ , будем получать тестовые решения с различными свойствами. Ниже рассмотрим два наиболее интересных случая.

Сначала положим  $p_* = 1, p_m = 1$  и будем менять значения  $E_0$ . На рис. 1 представлены зависимости  $\Phi(t)$ , полученные при численном решении системы (21) для  $E_0 = 0,5; 1; 2; 3$ . Видно, что с ростом  $E_0$  максимальные значения  $\Phi$  нелинейно возрастают.

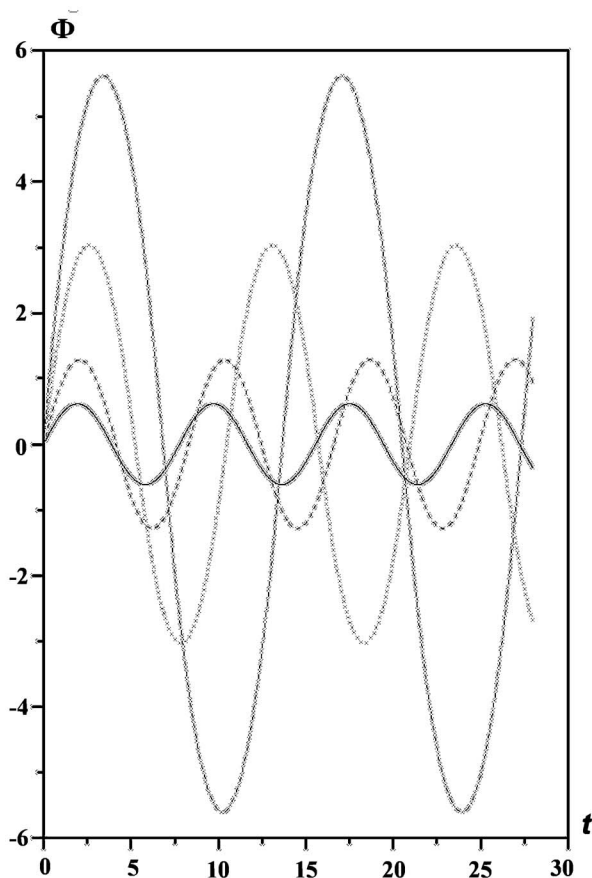


Рис. 1. Зависимости  $\Phi(t)$  при  $p_m = 1$  и различных  $E_0$ ; — —  $E_0 = 0,5$ ; - - -  $E_0 = 1$ ;  $\cdots$  —  $E_0 = 2$ ; - · - · -  $E_0 = 3$

Выберем для теста значение  $E_0 = 2$ , при котором  $\Phi_{\max} \cong 3$  (см. рис. 1), т. е. начальное распределение будет значительно смещаться с ростом времени  $t$ ; шаги по  $p$  и  $t$  —  $dp = 0,25p_m = 0,25$ ,  $dt = 0,1$ ; границы отрезка по  $p$   $[-p_g, p_g]$  выберем из условия  $p_g = 5p_m + \Phi_{\max} = 8$ .

Полученная при численном решении уравнений (19) зависимость  $E(t)$  с хорошей точностью совпадает с аналогичной зависимостью, полученной из решения уравнений (21) (на графиках эти кривые не различимы и здесь не приводятся). Хорошо согласуются между собой численные и аналитические зависимости  $f(p)$  на разные моменты времени. Концентрация  $n$  сохраняется с пятью значащими цифрами, а для суммарной энергии (11) отклонение составило 2 единицы в четвертом знаке; уменьшение шага  $dt$  до  $dt = 0,02$  приводит к улучшению точности сохранения энергии на порядок (погрешность — 2 единицы в пятом знаке).

*Замечание.* Довольно распространенной схемой решения уравнений (19) является следующая: по значению  $j^n$  вычисляется  $E = E^n - \frac{\tau}{2}j^n$ ; с этим значением  $E$  решается уравнение для  $f$  и находятся функция  $f^{n+1}$  и плотность тока  $j^{n+1}$ ; напряженность  $E^{n+1}$  вычисляется по формуле  $E^{n+1} = E^n - \frac{\tau}{2}(j^{n+1} + j^n)$ . Как показали расчеты задачи с  $E_0 = 2$ ,  $p_m = 1$ ,  $d = 0,25$ ,  $dt = 0,1$ , эта схема дает вдвое больший дисбаланс энергии, чем рассмотренная выше (0,12 % против 0,06 %), и по точности она эквивалентна рассмотренной выше схеме с занулением  $a, b$ .

Рассмотрим теперь случай, когда  $p_*^2 > 1$ . Положим  $p_* = 5$ ,  $p_m = 1$ ,  $E_0 = 2$ . Шаги по  $p, t$  выбраны прежними:  $dp = 0,25$ ,  $dt = 0,1$ ; граница  $p_g$  отрезка по  $p$  выбрана равной  $p_g = 5p_m + \Phi_{\max} = 10$ .

Полученная в этом расчете зависимость  $E(t)$  с графической точностью совпадает с зависимостью, полученной при решении уравнений (21). Хорошо согласуются между собой численные и аналити-

ческие зависимости  $f(p)$  на разные моменты времени, несмотря на то, что с течением времени профиль  $f(p)$  сильно смещается по оси  $p$ . Дисбаланс по энергии (11) составил 0,0037%.

### Тестирование схемы численного решения двумерного уравнения (9)

Рассмотрим для определенности уравнение, описывающее влияние компоненты  $H_z$  напряженности магнитного поля на релятивистское распределение электронов. Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} - v_y H_z \frac{\partial f}{\partial p_x} + v_x H_z \frac{\partial f}{\partial p_y} = 0. \quad (22)$$

Оно решается в бесконечной по  $p_x, p_y$  области ( $-\infty < p_x < \infty, -\infty < p_y < \infty$ ) с нулевыми граничными условиями при  $|p_\alpha| \rightarrow \infty$ . Будем предполагать, что при  $t = 0$

$$f(t = 0, p_x, p_y) = f_0(p_x, p_y). \quad (23)$$

Используя метод характеристик, нетрудно найти решение уравнения (22) с условием (23). Оно имеет вид

$$f(t, p_x, p_y) = f_0(p_x \cos \omega t + p_y \sin \omega t, -p_x \sin \omega t + p_y \cos \omega t), \quad (24)$$

где

$$\omega = \frac{H_z}{\varepsilon + 1}, \quad \varepsilon(p_x, p_y) = \sqrt{p_*^2 + p_x^2 + p_y^2} - 1, \quad p_*^2 = 1 + p_z^2.$$

Таким образом, как и в нерелятивистском случае, магнитное поле  $H_z$  за время  $t$  "поворачивает" распределение  $f_0(p_x, p_y)$  на угол  $\omega t$  относительно оси  $p_z$  декартовой системы координат  $(p_x, p_y, p_z)$ .

Отметим принципиальное отличие решения (24) от аналогичного решения в нерелятивистском случае: в формуле (24) частота  $\omega$  зависит от  $\varepsilon$ , в то время как в нерелятивистском случае  $\omega$  постоянна. Если начальное распределение  $f_0(p_x, p_y)$  изотропно (зависит от  $p = (p_x^2 + p_y^2)^{1/2}$ ), то для него это обстоятельство не имеет значения — распределение останется изотропным в любой момент времени  $t$  и будет совпадать с начальным распределением. Если же распределение  $f_0(p_x, p_y)$  анизотропно, то, вообще говоря,  $f(t, p_x, p_y)$  ни при каком времени  $t > 0$  не совпадает с начальным распределением.

В самом деле, пусть

$$f_0(p_x, p_y) = \varphi_0 \exp\left(-\frac{p_x^2}{p_{xc}^2} - \frac{p_y^2}{p_{yc}^2}\right). \quad (25)$$

На рис. 2 для  $H_z t = 20$  приведена аналитическая зависимость

$$f(p_x) \equiv f(t, p_x, p_y = 0) = \varphi_0 \exp\left(-p_x^2 \left(\frac{\cos^2 \omega t}{p_{xc}^2} + \frac{\sin^2 \omega t}{p_{yc}^2}\right)\right)$$

и зависимости  $f_{\min}(p_x) = \varphi_0 \exp\left(-\frac{p_x^2}{p_{yc}^2}\right)$ ,  $f_{\max}(p_x) = \varphi_0 \exp\left(-\frac{p_x^2}{p_{xc}^2}\right)$ . Результаты представлены для  $p_*^2 = 1$ ,  $p_{xc} = 1$ ,  $p_{yc} = 2/3$ . Видно, что кривая  $f(p_x)$  существенно немонотонна, с локальными минимумами и максимумами, расположенными на кривых  $f_{\min}(p_x)$  и  $f_{\max}(p_x)$  соответственно. Для заданного значения  $H_z t$  локальные максимумы достигаются в точках  $p_x$ , определяемых из условия

$$\frac{H_z t}{\sqrt{p_*^2 + p_x^2}} = \pi n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

откуда находим (для  $p_x > 0$ )



$$p_x = \left( \frac{H_z^2 t^2}{n^2 \pi^2} - p_*^2 \right)^{1/2}.$$

Из этого соотношения следует, что с ростом  $p_*$  увеличиваются и значения  $H_z t$ , при которых немо-  
нотонная зависимость в профиле  $f(p_x)$  начинает существенно проявляться. Для  $p_* = 1$  появление  
немо-нотонности следует ожидать при  $H_z t > \pi$ , или, в размерных единицах, при  $\frac{e H_z t}{m c} > \pi$ .

Эту особенность решения (24) следует учитывать при тестировании численного алгоритма реше-  
ния уравнения (22). Отметим, что описание "развала" анизотропных максвелловских релятивист-  
ских распределений электронов в постоянном магнитном поле в известной авторам литературе не  
встречалось.

Обычно численные схемы решения уравнения (22) тестируют на задаче об эволюции максвел-  
ловского распределения электронов (25) в постоянном магнитном поле. При этом распределение  
предполагается изотропным ( $p_{xc} = p_{yc}$ ) и нерелятивистским ( $p_{oc} \ll 1, \alpha = x, y$ ) (см., например, [14]).  
Приемлемыми считаются схемы, обеспечивающие достаточную для приложений точность сохране-  
ния числа электронов и их кинетической энергии при небольшом ( $\sim 40$ ) числе интервалов равномер-  
ной сетки по каждой из координат  $p_x, p_y$ . Ниже на примерах будет показано, что в релятивистском  
случае требуется более подробная по сравнению с нерелятивистским случаем сетка в пространстве  
импульсов.

При тестировании использовано следующее соглашение: если для некоторого узла  $(p_{xi}, p_{yj})$  сет-  
ки начальная точка  $(p_{x0}, p_{y0})$  характеристики, приходящей при  $t = t_{n+1}$  в этот узел, выходит за

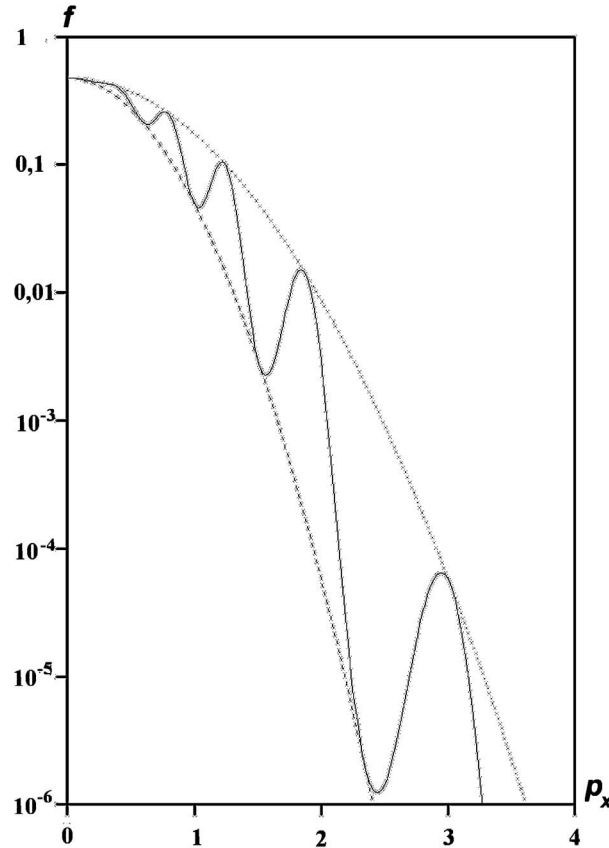


Рис. 2. Аналитическая зависимость  $f(p_x)$  (—) при  $p_y = 0, p_{xc} = 1, p_{yc} = 2/3, H_z t = 20$ ; - - -  $f_{\min}(p_x)$ ;  
... —  $f_{\max}(p_x)$

пределы сетки, то значение функции  $f_{ij}$  в этом узле не меняется:  $f_{ij}^{n+1} = f_{ij}^n$ . Во всех расчетах функция  $f_0(p_x, p_y)$  определялась согласно (25); при этом  $\varphi_0 = \frac{1}{\pi p_{xc} p_{yc}}$ ,  $H_z = 1$ . Если не оговорено противное,  $p_* = 1$ ; как следует из предыдущих оценок, это наиболее сложный случай.

Сначала рассмотрим нерелятивистский случай. Будем предполагать, что в начальном распределении электронов (25)  $p_{xc} = p_{yc} = 0,1$ . Шаги  $dp_x$ ,  $dp_y$  выберем равными  $dp_x = dp_y = 0,25$ ;  $p_{xc} = 0,025$ ; границы отрезков по  $p_x$ ,  $p_y$   $[-p_{\alpha g}, p_{\alpha g}]$  ( $\alpha = x, y$ ) выберем из условия  $p_{\alpha g} = 5p_{xc} = 0,5$  (по каждой переменной сетка будет содержать 40 интервалов). Будем прежде всего обращать внимание на точность выполнения законов сохранения двух моментов функции распределения:

$$W_0 = \iint f(t, p_x, p_y) dp_x dp_y; \quad W_2 = \iint \varepsilon(p_x, p_y) f(t, p_x, p_y) dp_x dp_y,$$

т. е. на точность сохранения числа частиц и их кинетической энергии.

В табл. 1 для различных значений шага по времени  $dt$  приведена относительная погрешность  $\delta(t)$  (в %) для момента  $W_2$ :

$$\delta(t) = \frac{|W_2(t) - W_2(0)|}{W_2(0)} \cdot 100\%.$$

Значение  $W_0$  во всех расчетах сохранялось с хорошей (не менее 6 знаков) точностью. Числа Куранта

$$r_\alpha = \frac{v_{\alpha g} H_z dt}{dp_\alpha}, \quad \text{где } v_{\alpha g} = \frac{p_{\alpha g}}{\sqrt{1 + p_{\alpha g}^2}} \quad (\alpha = x, y), \quad (26)$$

для  $dt$  из табл. 1 равны соответственно  $r_\alpha \approx 2; 1; 0,5; 0,2; 0,1$ .

Погрешность  $\delta(t)$  при использовании для интерполяции бикубических сплайнов должна быть пропорциональна  $dp_\alpha^3$ . Для расчетов, проведенных с  $dp_\alpha = 0,02$  и  $dt = 0,02; 0,008; 0,004$ , т. е. с числами Куранта (26)  $r_\alpha = 0,5; 0,2; 0,1$ , при  $t = 20$  значения  $\delta(t)$  составили соответственно  $\delta = 0,123 \cdot 10^{-1}; 0,607 \cdot 10^{-2}; 0,324 \cdot 10^{-2}$ . Сравнивая эти значения  $\delta$  с отмеченными звездочкой в табл. 1, видим, что погрешность уменьшилась в  $(0,025/0,02)^3 \cong 2$  раза, как это и должно быть при пропорциональности ее  $dp_\alpha^3$ .

Обратимся теперь к расчетам для релятивистского распределения электронов. Рассмотрим изотропное распределение с  $p_{xc} = p_{yc} = 1$ ; шаги  $dp_x$ ,  $dp_y$  выберем равными  $dp_x = dp_y = 0,25$ ;  $p_{xc} = 0,25$ ; границы отрезков  $[-p_{\alpha g}, p_{\alpha g}]$  выберем из условия  $p_{\alpha g} = 5p_{xc} = 5$ .

В табл. 2 для различных шагов по времени  $dt$  приведена относительная погрешность  $\delta(t)$  для момента  $W_2$ . Отметим, что в рассматриваемой задаче компоненты скорости  $v_{\alpha g} \approx 1$ , так что шагам  $dt$ , приведенным в табл. 2, соответствуют значения чисел Куранта (26)  $r_\alpha \cong 4dt$ .

Из сравнения данных табл. 1, 2 следует, что при  $dt \geq 0,05$  погрешность  $\delta$  в релятивистском случае намного превышает эту погрешность для нерелятивистского случая; при  $dt \leq 0,01$  погрешности различаются примерно в 2 раза. Отметим также, что в релятивистском случае точность сохранения момента  $W_0$  значительно более низкая, чем в нерелятивистском случае. Так, при  $t = 20$  для  $dt$  из

Таблица 1

**Зависимость погрешности  $\delta(t)$  от шага  $dt$ ;  $p_{\alpha c} = 0,1$**

$dt$	$t$				
	4	8	12	16	20
0,1	$0,356 \cdot 10^{-2}$	$0,713 \cdot 10^{-2}$	$0,107 \cdot 10^{-1}$	$0,143 \cdot 10^{-1}$	$0,179 \cdot 10^{-1}$
0,05	$0,597 \cdot 10^{-2}$	$0,120 \cdot 10^{-1}$	$0,179 \cdot 10^{-1}$	$0,239 \cdot 10^{-1}$	$0,300 \cdot 10^{-1}$
0,025	$0,467 \cdot 10^{-2}$	$0,933 \cdot 10^{-2}$	$0,140 \cdot 10^{-1}$	$0,187 \cdot 10^{-1}$	$0,233 \cdot 10^{-1}$ *
0,01	$0,233 \cdot 10^{-2}$	$0,466 \cdot 10^{-2}$	$0,700 \cdot 10^{-2}$	$0,933 \cdot 10^{-2}$	$0,117 \cdot 10^{-1}$ *
0,005	$0,125 \cdot 10^{-2}$	$0,250 \cdot 10^{-2}$	$0,374 \cdot 10^{-2}$	$0,499 \cdot 10^{-2}$	$0,623 \cdot 10^{-2}$ *

Зависимость погрешности  $\delta(t)$  от шага  $dt$ ;  $p_{\alpha c} = 1$ 

$dt$	$t$				
	4	8	12	16	20
0,1	$0,411 \cdot 10^{-1}$	$0,822 \cdot 10^{-1}$	0,123	0,164	0,205
0,05	$0,227 \cdot 10^{-1}$	$0,454 \cdot 10^{-1}$	$0,681 \cdot 10^{-1}$	$0,907 \cdot 10^{-1}$	0,113
0,025	$0,118 \cdot 10^{-1}$	$0,236 \cdot 10^{-1}$	$0,353 \cdot 10^{-1}$	$0,472 \cdot 10^{-1}$	$0,589 \cdot 10^{-1}$ *
0,01	$0,481 \cdot 10^{-2}$	$0,981 \cdot 10^{-2}$	$0,141 \cdot 10^{-1}$	$0,198 \cdot 10^{-1}$	$0,248 \cdot 10^{-1}$
0,005	$0,242 \cdot 10^{-2}$	$0,510 \cdot 10^{-2}$	$0,683 \cdot 10^{-2}$	$0,108 \cdot 10^{-1}$	$0,137 \cdot 10^{-1}$

табл. 2 погрешность (в %) для  $W_0$  составила 0,112;  $0,890 \cdot 10^{-1}$ ;  $0,542 \cdot 10^{-1}$ ;  $0,241 \cdot 10^{-1}$ ;  $0,124 \cdot 10^{-1}$ . Таким образом, релятивистские задачи предъявляют более жесткие требования к выбору счетных шагов даже для изотропного распределения частиц.

Уменьшим шаги  $dp_\alpha$  до значения  $dp_\alpha = 0,2$  (т. е. в 1,25 раза) и выберем шаг  $dt = 0,002$ . Расчет, проведенный с этими параметрами, дал при  $t = 20$  погрешность в  $W_2\delta = 0,300 \cdot 10^{-1}$ , что, как и в нерелятивистском случае, в 2 раза меньше погрешности, отмеченной звездочкой в табл. 2 (сравниваются погрешности при одинаковом числе  $r$ ). Погрешность для  $W_0$  также уменьшилась в 2 раза (с  $0,542 \cdot 10^{-1}$  до  $0,277 \cdot 10^{-1}$ ). Таким образом, и в релятивистском случае погрешность  $\delta(t)$  пропорциональна  $dp_\alpha^3$ .

Увеличение  $p_*$  приводит к значительному улучшению балансных свойств схемы. Так, при  $p_* = \sqrt{2}$  (т. е. при увеличении  $p_*^2$  в 2 раза) в расчете с  $dp_\alpha = 0,25$ ,  $dt = 0,025$  значение  $\delta(t = 20) = 0,870 \cdot 10^{-2}$ , что почти в 7 раз меньше погрешности, отмеченной звездочкой в табл. 2; погрешность (в %) для  $W_0$  равна  $0,224 \cdot 10^{-1}$  вместо  $0,542 \cdot 10^{-1}$  при  $p_* = 1$ , т. е. уменьшается медленнее, чем  $\delta$ .

Как следует из приведенных примеров, для получения результатов для  $W_0$ ,  $W_2$  в релятивистском случае с точностью, сопоставимой с точностью для  $W_0$ ,  $W_2$  в нерелятивистском случае, надо в принятой схеме существенно (более чем вдвое) уменьшить шаги  $dp_\alpha$  (например, полагать  $dp_\alpha = 0,125p_{\alpha c}$  для максвелловских распределений) и обеспечивать при этом числа Куранта  $r_\alpha \leq 0,1$ . При моделировании плазмы с анизотропным начальным распределением при выборе шагов  $dp_\alpha$  следует учитывать возможность появления со временем в распределении мелкомасштабной структуры, о которой говорилось выше.

## Заключение

В работе рассмотрено обобщение комбинированной схемы расщепления системы уравнений Власова—Максвелла на случай релятивистской плазмы. При численном решении уравнений наиболее сложных этапов схемы расщепления, на которых учитывается влияние на распределение электронов компонентов электромагнитного поля, проведено исследование точности метода характеристик с интерполяцией функции распределения релятивистских электронов на основе кубических сплайнов (*полулагранжев* метод по терминологии цитированных зарубежных публикаций). Результаты исследования показали, что при решении кинетических уравнений на этих этапах метод обеспечивает приемлемую для приложений точность выполнения имеющихся законов сохранения.

В дальнейшем предполагается опубликовать результаты тестирования комбинированной схемы расщепления на представительных модельных физических задачах, обычно используемых при проверке методов моделирования динамики разреженной плазмы, и сравнить эту схему с методом *частица в ячейке*.

## Приложение. Численное решение уравнения (17)

При решении кубического уравнения (17) можно было бы попытаться использовать известные формулы для вычисления его корней. Однако при этом в случае существования трех действительных корней достаточно сложно выяснить, какой из них выбрать и при каких ограничениях на шаг  $\tau$  получается подходящий корень. Воспользуемся для получения решения уравнения (17) следующими соображениями.

В нерелятивистском случае  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = 0$  и уравнение (17) имеет корень  $E = E_0$ , т. е. именно то решение, которое получалось в [1]. При  $\tau \rightarrow 0$  к этому значению должен стремиться требуемый корень (17). Найдем решение уравнения  $aE^2 - E + E_0 = 0$ ; оно имеет действительные корни при условии

$$aE_0 \leq \frac{1}{4}. \quad (\text{П.1})$$

Эти корни равны

$$E_1 = \frac{1}{2a} \left( 1 + \sqrt{1 - 4aE_0} \right) \equiv \frac{e_1}{a}; \quad E_2 = \frac{E_0}{e_1}.$$

Очевидно, подходящим является корень  $E_2$ , поскольку именно он стремится к  $E_0$  при уменьшении шага  $\tau$ . Используя выражения для  $E_1$ ,  $E_2$ , уравнение (17) можно записать в виде

$$E = E_2 + b \frac{E^3}{aE - e_1}.$$

Это уравнение можно решить методом простых итераций:

$$E^{\nu+1} = E_2 + b \frac{(E^\nu)^3}{aE^\nu - e_1}, \quad \nu = 0, 1, \dots, E^0 = E_0. \quad (\text{П.2})$$

Ограничение (П.1) и требование сходимости итераций (П.2) приводят к следующим условиям на шаг  $\tau$ :

$$\tau |E_n| \leq \frac{1}{2}; \quad \tau^2 n \leq \frac{2}{3}.$$

Чтобы понять, насколько сильно эти условия ограничивают шаг  $\tau$ , перепишем их в размерной форме с учетом принятых единиц измерения, сохраняя за размерными величинами те же обозначения, что и за безразмерными:

$$\frac{e |E_n| \tau}{mc} \leq \frac{1}{2}; \quad \tau^2 \omega_p^2 \leq \frac{2}{3}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m}. \quad (\text{П.3})$$

Второе ограничение в (П.3), как правило, является типичным: шаг  $\tau$  должен быть заведомо меньше обратной плазменной частоты. Что же касается первого ограничения, то оно также не является обременительным, поскольку при решении кинетического уравнения (7) методом характеристик на шаг  $\tau$  накладывается ограничение (в размерных единицах)  $\frac{e |E_n| \tau}{h_\alpha} \leq 1$  ( $\alpha = x, y, z$ ), где шаг  $h_\alpha$  обычно существенно меньше  $mc$ .

### Список литературы

1. Голубев А. И., Сысоева Т. Г. Схема расщепления для численного решения кинетического уравнения Власова // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2002. Вып. 3. С. 68—71.
2. Cheng C. Z., Knorr G. The integration of the Vlasov equation in configuration space // J. Comp. Phys. 1976. Vol. 22. P. 330—351.

3. Дымников В. П., Алоян А. Е. Монотонные схемы решения уравнений переноса в задачах прогноза погоды, экологии и теории климата // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26, № 12. С. 1237—1247.
4. Bertrand P., Ghizzo A., Johnston T. W., Shoucri M., Fijalkow E., Feix M. R. A Nonperiodic Euler—Vlasov code for the numerical simulation of laser-plasma beam wave acceleration and raman scattering // Phys. of Fluids. B. Plasma Physics. 1990. Vol. 2, No 5. P. 1028—1037.
5. Ghizzo A., Bertrand P., Shoucri M. M., Johnston T. W., Fijalkow E., Feix M. R. A Vlasov code for the numerical simulation of stimulated raman scattering // J. Comp. Phys. 1990. Vol. 90. P. 431—457.
6. Ghizzo A., Huot F., Bertrand P. A non-periodic 2D semi-Lagrangian Vlasov code for laser-plasma interaction on parallel computer // Ibid. 2003. Vol. 186. P. 47—69.
7. Bess N., Sonnendrucker E. Semi-Lagrangian schemes for the Vlasov equation on unstructured mesh of phase space // Ibid. Vol. 191. P. 341—376.
8. Johnson L. E. Numerical model of plasma double layers using the Vlasov equation // J. Plasma Phys. 1980. Vol. 23, part 3. P. 433—452.
9. Nakamura T., Yabe T. Cubic interpolated propagation scheme for solving the hyper-dimensional Vlasov—Poisson equation in phase space // Comp. Phys. Commun. 1999. Vol. 120. P. 122—154.
10. Fijalkow E. Numerical solution to the Vlasov equation // Ibid. Vol. 116. P. 319—328.
11. Fijalkow E. Numerical solution to the Vlasov equation: the 1D code // Ibid. P. 329—335.
12. Fijalkow E. Numerical solution to the Vlasov equation: the 2D code // Ibid. P. 336—344.
13. Filber F., Sonnendrucker E., Bertrand P. Conservative numerical schemes for the Vlasov equation // J. Comp. Phys. 2001. Vol. 172. P. 166—187.
14. Mangeney A., Califano F., Cavazzoni C., Travnicek P. A numerical scheme for the integration of the Vlasov—Maxwell system of equations // Ibid. 2002. Vol. 179. P. 495—538.
15. Arber T. D., Vann R. G. L. A critical comparison of Eulerian-grid-based Vlasov solvers // Ibid. Vol. 180. P. 339—357.
16. Рошаль А. С. Моделирование заряженных пучков. М.: Атомиздат, 1979.
17. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.

Статья поступила в редакцию 18.08.09.

---