

УДК 519.6

МАТРИЦА ИСКУССТВЕННЫХ ВЯЗКОСТЕЙ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ЛАГРАНЖЕВОЙ ГАЗОДИНАМИКИ, СПОСОБСТВУЮЩАЯ УМЕНЬШЕНИЮ "ЭНТРОПИЙНОГО СЛЕДА" В ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТАХ

А. М. Стенин, Е. А. Соловьева

(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

В систему уравнений газовой динамики, описывающую двумерные течения в эйлеровых координатах, консервативным образом вводятся искусственные диффузии массы, импульса и полной энергии. После перехода к лагранжеевым координатам получены формулы для скорости искусственной диффузии массы в уравнении неразрывности, а также для искусственных вязкостей в уравнениях движения и энергии. Искусственная вязкость в уравнении движения представляет собой тензор, пропорциональный дивергенсу тензора скоростей деформаций.

Результаты тестовых расчетов демонстрируют высокую эффективность новой системы вязкостей по уменьшению *энтропийного следа* в численном решении уравнений лагранжеевой газовой динамики.

Ключевые слова: лагранжеева газодинамика, искусственная вязкость, тензорная вязкость, энтропийный след, задача Ноха, задача Зальцмана.

Введение

Данная работа посвящена обобщению на двумерный случай набора, или матрицы, искусственных вязкостей, полученных в [1] для каждого из уравнений газодинамической системы, описывающей одномерные течения в переменных Лагранжа.

Известно (см., например, [2–4]), что одним из существенных недостатков метода сквозного счета гидродинамических скачков с помощью искусственной вязкости, предложенного в 1950 г. Нейманом и Рихтмайером [5] и ставшего к настоящему времени классическим, является появление в численном решении так называемого *энтропийного следа*. Энтропийный след проявляется в виде ошибок конечной величины в значениях плотности и внутренней энергии:

- около внешних границ счетных областей;
- около внутренних границ раздела между разными веществами после прохождения через эти границы ударной волны (УВ);
- при столкновении УВ даже в однородном веществе;
- при резком изменении шага по времени;
- при переходе УВ через резкую неравномерность в размерах ячеек.

Предложенное позднее добавление линейной искусственной вязкости способствует уменьшению осцилляций за фронтом УВ в численных расчетах, но по существу не влияет на энтропийный след.

В 1987 г. в работе Ноха [2] отмечено, что энтропийный след является свойством дифференциальных уравнений с классической вязкостью. Там же для уменьшения энтропийного следа был предложен метод искусственной теплопроводности. Позднее Ю. А. Бондаренко [3] с помощью расчетов на сходимость подтвердил вывод о том, что решающую роль в наличии энтропийного следа

в численных расчетах играют используемые виды искусственных вязкостей, включенных в систему дифференциальных уравнений газовой динамики, а не применяемая разностная схема.

В 2002 г. для одномерных течений, обладающих плоской, цилиндрической и сферической симметрией, авторами [1] было предложено использовать искусственные вязкости во всех трех уравнениях газовой динамики в лагранжевых координатах. Результаты проведенных тестовых расчетов ряда типичных одномерных задач показали высокую эффективность применения матрицы вязкостей для уменьшения энтропийного следа.

В работе [1] формулы для скорости искусственной диффузии массы в уравнении неразрывности, для искусственных вязкостей в уравнениях движения и энергии, записанных в переменных Лагранжа, были получены на основе системы уравнений газовой динамики в эйлеровых координатах. В эти уравнения консервативным образом были введены искусственная диффузия массы, искусственная диффузия импульса и искусственная диффузия полной энергии.

Для получения матрицы вязкостей в двумерном случае используется тот же подход.

Искусственная диффузия массы, импульса и энергии

Рассмотрим систему уравнений газовой динамики, записанную в виде законов сохранения в эйлеровых координатах. Введем искусственную диффузию массы в уравнение неразрывности, искусственную диффузию импульса — в уравнения движения, искусственную диффузию полной энергии — в уравнение энергии. Для двумерных течений, обладающих плоской симметрией, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C_U l \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_U l \frac{\partial \rho}{\partial y} \right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C_U l \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_U l \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C_U l \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_U l \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e + P) u}{\partial x} + \frac{\partial(\rho e + P) v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C_U l \frac{\partial(\rho e)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_U l \frac{\partial(\rho e)}{\partial y} \right). \quad (4)$$

Здесь используются следующие обозначения: ρ — плотность; P — газодинамическое давление; $e = E + 0,5 \vec{U}^2$ — полная энергия; E — удельная внутренняя энергия. Пространственные точки $\vec{Z} = (x, y)$ являются точками плоскости XOY прямоугольной декартовой системы координат; вектор скорости $\vec{U} = (u, v)$ имеет составляющие u — вдоль оси OX , v — вдоль оси OY . Функция $C_U \geq 0$ — коэффициент искусственной диффузии (вязкости) с единицами измерения скорости; $l \geq 0$ — малый параметр с единицами измерения длины. C_U и l не предполагаются постоянными. Давление, плотность и энергия связаны уравнением состояния

$$P = P(\rho, E). \quad (5)$$

Перейдем от системы уравнений (1)—(4) путем эквивалентных преобразований к уравнениям в лагранжевых координатах. Предварительно через

$$u_B = \frac{1}{\rho} C_U l \frac{\partial \rho}{\partial x}; \quad v_B = \frac{1}{\rho} C_U l \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (6)$$

обозначим компоненты скорости искусственной диффузии массы $\vec{U}_B = (u_B, v_B)$. Введем субстанциональную производную по времени $\frac{D}{Dt}$ вдоль траектории $\frac{d\vec{Z}}{dt} = \vec{U}$, определив ее формулой

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (7)$$

где $\vec{U} = (\tilde{u}, \tilde{v})$ — модифицированная скорость вещества:

$$\tilde{u} = u - u_B; \quad \tilde{v} = v - v_B. \quad (8)$$

После необходимых преобразований получим систему уравнений газодинамики в лагранжевых координатах с искусственными вязкостями во всех уравнениях:

$$\frac{d\vec{Z}}{dt} = \vec{U}; \quad (9)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) = 0; \quad (10)$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C_U l \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_U l \rho \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad (11)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C_U l \rho \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_U l \rho \frac{\partial v}{\partial y} \right); \quad (12)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} + \frac{\partial Pu}{\partial x} + \frac{\partial Pv}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C_U l \rho \frac{\partial e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_U l \rho \frac{\partial e}{\partial y} \right). \quad (13)$$

Здесь важно отметить, что благодаря введению в рассмотрение производной по времени (7) при выводе уравнений (9)–(13) не потребовалось предположения о постоянстве коэффициента C_U и малого параметра l .

Учитывая, что $e = E + 0,5\vec{U}^2$, преобразуем уравнение энергии (13):

$$\begin{aligned} \rho \frac{De}{Dt} + \frac{\partial Pu}{\partial x} + \frac{\partial Pv}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(C_U l \rho \frac{\partial E}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_U l \rho \frac{\partial E}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(C_U l \rho \frac{\partial (0,5\vec{U}^2)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_U l \rho \frac{\partial (0,5\vec{U}^2)}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

В итоге уравнения движения (11), (12) и уравнение для полной энергии (14) можно записать в виде

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} + \text{grad } P = \text{div } \tilde{S}; \quad (15)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} + \text{div} (P\vec{U}) = \text{div } \vec{Q}_E + \text{div} (\tilde{S}\vec{U}). \quad (16)$$

Здесь \vec{Q}_E — вектор, пропорциональный градиенту удельной внутренней энергии, который представляет собой искусственный поток внутренней (тепловой) энергии:

$$\vec{Q}_E = \left(C_U l \rho \frac{\partial E}{\partial x}, C_U l \rho \frac{\partial E}{\partial y} \right); \quad (17)$$

\tilde{S} — тензор, пропорциональный градиенту скорости:

$$\tilde{S} = C_U l \rho \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

В правой части уравнения движения (15) получена дивергенция от \tilde{S} (18) — несимметричного тензора градиента скорости, умноженного на некий коэффициент. В правой части уравнения для полной

энергии (16) — сумма двух слагаемых: дивергенции от вектора \vec{Q}_E (17), соответствующей так называемой искусственной теплопроводности, и дивергенции вектора $\vec{S}\vec{U}$, являющегося произведением тензора \vec{S} на вектор скорости \vec{U} .

Учитывая в (14), что $e = E + 0,5\vec{U}^2$, и используя уравнения движения (11), (12), получаем уравнение для удельной внутренней энергии:

$$\rho \frac{DE}{Dt} + P \operatorname{div} \vec{U} = \operatorname{div} \vec{Q}_E + Q_{\vec{S}}. \quad (19)$$

Здесь слагаемое $Q_{\vec{S}}$ определяет диссипацию кинетической энергии во внутреннюю энергию вследствие действия вязкости \vec{S} в уравнении движения (15):

$$Q_{\vec{S}} = C_{Ul}\rho \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right).$$

Тензор \vec{S} (18) в уравнении движения (15), пропорциональный градиенту скорости, представляет собой несимметричный тензор. Он включает в себя составляющую градиента скорости, соответствующую вращению газодинамической системы как твердого тела, и не инвариантен относительно поворота осей координат. Поэтому вместо него в уравнении движения (15) и в уравнении для полной энергии (16) целесообразно использовать тензор вязкости \hat{S} , пропорциональный тензору скоростей деформаций для случая плоской симметрии [6], который отличается от тензора градиента скорости тем, что из него исключена составляющая, соответствующая вращению системы как твердого тела, и что он является симметричным. То есть вместо уравнений (15), (16) возьмем уравнения

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} + \operatorname{grad} P = \operatorname{div} \hat{S}; \quad (20)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} + \operatorname{div} (P\vec{U}) = \operatorname{div} \vec{Q}_E + \operatorname{div} (\hat{S}\vec{U}), \quad (21)$$

где

$$\hat{S} = C_{Ul}\rho \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Более подробно уравнения движения (20) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{Ul}\rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{Ul}\rho \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right); \\ \rho \frac{Dv}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{Ul}\rho \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{Ul}\rho \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Учитывая в (21), что $e = E + 0,5\vec{U}^2$, и используя уравнения движения (23), получаем уравнение для удельной внутренней энергии:

$$\rho \frac{DE}{Dt} + P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{Ul}\rho \frac{\partial E}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{Ul}\rho \frac{\partial E}{\partial y} \right) + C_{Ul}\rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right].$$

То есть имеется уравнение для удельной внутренней энергии того же вида (19), но с диссипативным слагаемым $Q_{\hat{S}}$, обусловленным тензором вязкости (22):

$$Q_{\hat{S}} = C_{Ul}\rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right].$$

Однако окончательно в качестве тензора искусственной вязкости \hat{D} в уравнении движения (15), а следовательно, и в уравнении энергии (16), как и в одномерном случае [1], будем использовать тензор, пропорциональный девиатору тензора скоростей деформаций. То есть будем использовать уравнение движения и уравнение энергии

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} + \text{grad } P = \text{div} \hat{D}; \quad (24)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} + \text{div} (P\vec{U}) = \text{div} \vec{Q}_E + \text{div} (\hat{D}\vec{U}), \quad (25)$$

где

$$\hat{D} = \hat{S} - \left(C_{Ul} \rho \frac{1}{2} \text{div} \vec{U} \right) \hat{I} = C_{Ul} \rho \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \text{div} \vec{U} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2} \text{div} \vec{U} \end{pmatrix}; \quad (26)$$

\hat{I} — единичный тензор. Тогда уравнения (24) для компонентов скорости записываются в виде

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{Ul} \rho \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{Ul} \rho \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right); \\ \rho \frac{Dv}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{Ul} \rho \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{Ul} \rho \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Используя в (25) уравнения движения (27) и учитывая, что $e = E + 0,5\vec{U}^2$, получаем следующее уравнение для удельной внутренней энергии:

$$\begin{aligned} \rho \frac{DE}{Dt} + P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{Ul} \rho \frac{\partial E}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{Ul} \rho \frac{\partial E}{\partial y} \right) + \\ &+ C_{Ul} \rho \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет тот же вид уравнения (19), но отличается от него диссипативным слагаемым $Q_{\hat{D}}$ вида

$$Q_{\hat{D}} = C_{Ul} \rho \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right],$$

которое определяет диссипацию кинетической энергии во внутреннюю энергию вследствие действия тензорной вязкости \hat{D} (26) в уравнении движения (24).

Таким образом, получена следующая система уравнений в лагранжевых координатах с искусственной вязкостью в каждом из уравнений:

$$\frac{d\vec{Z}}{dt} = \vec{U}; \quad (28)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \vec{U} = 0; \quad (29)$$

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} + \text{grad } P = \text{div} \hat{D}; \quad (30)$$

$$\rho \frac{DE}{Dt} + P \text{div} \vec{U} = \text{div} \vec{Q}_E + Q_{\hat{D}}. \quad (31)$$

Здесь $\vec{U} = \vec{U} - \vec{U}_B$ (см. (8)), \vec{U}_B — скорость искусственной диффузии массы (6):

$$\vec{U}_B = \frac{1}{\rho} C_{Ul} \text{grad} \left(\frac{1}{\rho} \right). \quad (32)$$

Производная $\frac{D}{Dt}$ вдоль траектории $\frac{d\vec{Z}}{dt} = \vec{U}$ определяется формулой (7); \hat{D} — тензор искусственной вязкости (26); \vec{Q}_E — поток искусственной диффузии энергии (17).

Численные расчеты

Для численного решения системы уравнений (28)–(31) используется полностью консервативная разностная схема типа *крест* на регулярной четырехугольной сетке, но с определением всех величин на моменты времени с целочисленными индексами, которая может быть получена с помощью дискретного вариационного метода [7].

Приведем порядок вычисления значений сеточных функций f^{n+1} на момент времени $t = t^{n+1}$ при известных значениях f^n на момент времени $t = t^n$. Как обычно, целочисленными нижними индексами здесь обозначаются сеточные функции, определенные в узлах, а полуцелыми — сеточные функции, определенные в ячейках сетки.

На первом полушаге вычисляются промежуточные значения величин $f^{n+1/2}$ на момент времени $t = t^{n+1/2} = 0,5(t^{n+1} + t^n)$:

$$Z_{ik}^{n+1/2} = Z_{ik}^n + 0,5\tau^{n+1/2}U_{ik}^n; \quad (33)$$

$$\rho_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2} = \frac{M_{i-1/2, k-1/2}}{S_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2}}; \quad (34)$$

$$E_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2} = E_{i-1/2, k-1/2}^n - 0,5\tau^{n+1/2}P_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2} \text{DIV}_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2}(U^n); \quad (35)$$

$$P_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2} = P\left(\rho_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2}, E_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2}\right). \quad (36)$$

Здесь $\tau^{n+1/2} = t^{n+1} - t^n$; $M_{i-1/2, k-1/2}$ и $S_{i-1/2, k-1/2}$ — масса и площадь ячейки сетки соответственно.

Разностный оператор DIV аппроксимирует дифференциальный оператор $\frac{1}{\rho} \text{div}$.

Все вычисления первого полушага предназначены исключительно для того, чтобы получить промежуточные значения давления $P_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2}$. После этого вычисляются новые значения всех величин на момент времени $t = t^{n+1}$:

$$U_{ik}^{n+1} = U_{ik}^n - \tau^{n+1/2} \text{GRAD}_{ik}^{n+1/2}(P^{n+1/2}); \quad (37)$$

$$Z_{ik}^{n+1} = Z_{ik}^{n+1/2} + 0,5\tau^{n+1/2}U_{ik}^{n+1}; \quad (38)$$

$$\rho_{i-1/2, k-1/2}^{n+1} = \frac{M_{i-1/2, k-1/2}}{S_{i-1/2, k-1/2}^{n+1}}; \quad (39)$$

$$E_{i-1/2, k-1/2}^{n+1} = E_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2} - 0,5\tau^{n+1/2}P_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2} \text{DIV}_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2}(U^{n+1}); \quad (40)$$

$$P_{i-1/2, k-1/2}^{n+1} = P\left(\rho_{i-1/2, k-1/2}^{n+1}, E_{i-1/2, k-1/2}^{n+1}\right). \quad (41)$$

Разностный оператор GRAD в (37) аппроксимирует дифференциальный оператор $\frac{1}{\rho} \text{grad}$.

В разностных формулах (33)–(41) не учтены искусственные вязкости. Классическая скалярная искусственная вязкость, которая используется в сравнительных расчетах, вычисляется на нижнем слое по времени $t = t^n$ и добавляется к давлению в уравнениях (35), (37) и (40). Новые искусственные вязкости также вычисляются на нижнем слое по времени.

Скорость искусственной диффузии массы учитывается в уравнениях (33), (38). Тензор искусственной вязкости \hat{D} (26) учитывается в уравнении для промежуточной энергии (35), в уравнении движения (37) и в уравнении энергии (40). Поток искусственной диффузии энергии используется в уравнениях (35) и (40). Значения скорости искусственной диффузии массы (32) в разностной схеме определяются в узлах пространственной сетки, значения компонент тензора вязкости (26) — в

ячейках сетки, значения потоков искусственной диффузии энергии (17) определяются на сторонах ячеек сетки.

Коэффициенты вязкости C_U и l пока вычисляются с помощью самых простых формул. Неотрицательный коэффициент $C_U \geq 0$ с единицами измерения скорости для тензорной вязкости (26) вычисляется в ячейках сетки по формуле

$$C_U = \begin{cases} -C_{\text{кв}} l \text{DIV} \vec{U} + C_{\text{л}} C_w, & \text{если } \text{DIV} \vec{U} \leq 0; \\ 0, & \text{если } \text{DIV} \vec{U} > 0. \end{cases} \quad (42)$$

Здесь DIV — разностный оператор, аппроксимирующий дифференциальный оператор дивергенции div в ячейках сетки; C_w — изоэнтропическая скорость звука в ячейке сетки; $C_{\text{кв}}$ — безразмерный коэффициент квадратичной части искусственной вязкости; $C_{\text{л}}$ — безразмерный коэффициент линейной части искусственной вязкости.

Линейный характерный размер ячейки сетки l в (42) и (26) вычисляется по формуле, используемой во многих методиках:

$$l = \frac{S}{\sqrt{0,5 (d_1^2 + d_2^2)}}, \quad (43)$$

где S — площадь ячейки сетки; d_1, d_2 — длины диагоналей ячейки.

Для вычисления искусственной вязкости (32) коэффициент вязкости C_U в узлах сетки, как и значение l , вычисляется простым арифметическим усреднением по ячейкам сетки, для которых данный узел является общей вершиной. Для вычисления потоков искусственной диффузии энергии на сторонах ячеек сетки значения C_U и l усредняются по двум соседним ячейкам.

Все представленные ниже расчеты, проведенные с новыми вязкостями, сравнивались с расчетами, проведенными с классической вязкостью, используемой как скалярная добавка к давлению. Скалярная вязкость в этих расчетах вычислялась по формуле

$$Q = -C_U \rho l \text{DIV} \vec{U}$$

с теми же коэффициентами C_U и l из (42) и (43), что и в новых вязкостях. Все расчеты были проведены с одними и теми же безразмерными коэффициентами $C_{\text{кв}} = 4, C_{\text{л}} = 0,4$.

Цилиндрическая задача Ноха. Расчеты цилиндрической задачи Ноха проводились в двух вариантах: вариант 1 — на радиальной сетке; вариант 2 — на квадратной сетке.

В первом варианте счетная область — четверть круга $0 \leq R \leq 1$, расположенная в первом координатном квадранте. Радиальная начальная сетка строится равномерным разбиением на 200 интервалов по радиусу и 10 интервалов по углу.

Во втором варианте счетная область — квадрат $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$. Начальная сетка — квадратная с числом ячеек 50×50 .

Постановка задачи берется из работы Ноха [2]. Там же приводится аналитическое решение. В обоих вариантах вещество — идеальный газ: $P = (\gamma - 1) \rho E$, $\gamma = 5/3$. Начальные значения: плотность $\rho^0 = 1$, энергия $E^0 = 0$, радиальная скорость $U_R = -1$. Граничные условия: границы $x = 0$ и $y = 0$ — жесткие стенки; на внешних границах $U_R = -1$.

По результатам расчетов прежде всего заметим, что, как видно из рис. 1, новая система вязкостей оказывает стабилизирующее воздействие на пространственную сетку в расчете задачи Ноха на квадратной сетке, хотя при аппроксимации новых вязкостей никаких специальных мер для этого не принималось.

Судить об ошибке, возникающей вследствие энтропийного следа в значениях плотности и энергии в окрестности центра схождения скоростей, можно по радиальным распределениям плотности и энергии, представленным на рис. 2, 3.

На рис. 2,а, 2,б видно значительное уменьшение энтропийного следа при использовании в численных расчетах новой матрицы искусственных вязкостей на радиальной сетке. Максимальное откло-

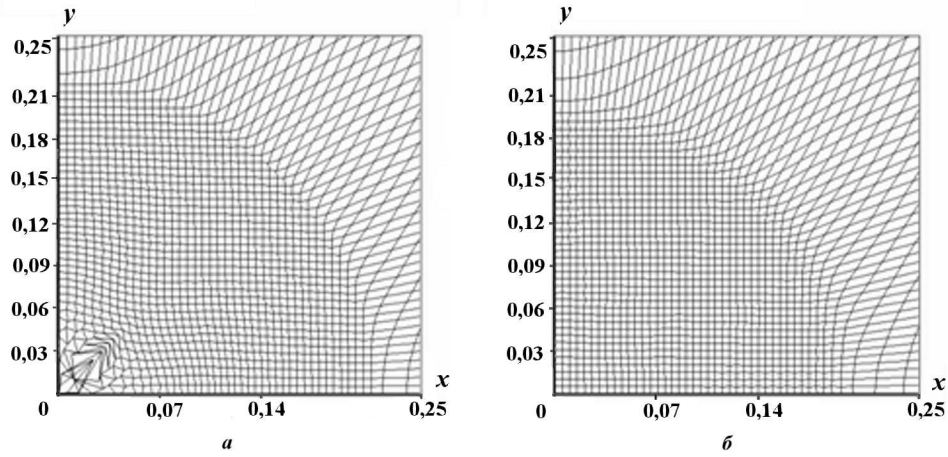


Рис. 1. Цилиндрическая задача Нoha на квадратной сетке, $t = 0,6$. Фрагмент счетной сетки: a — расчет с вязкостью Неймана—Рихтмайера; b — расчет с полной матрицей вязкостей

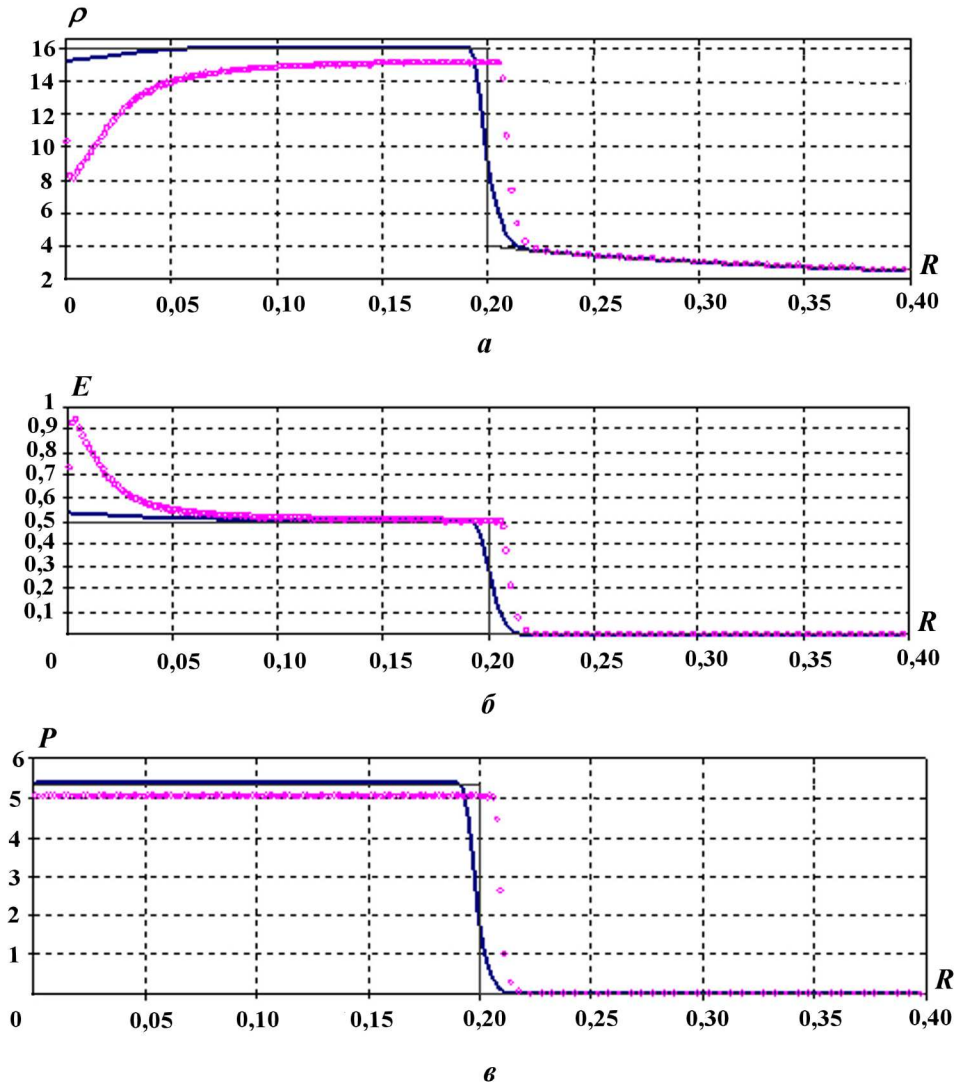


Рис. 2. Цилиндрическая задача Нoha на радиальной сетке, $t = 0,6$. Профили плотности (a), удельной внутренней энергии (b), давления ($в$): \circ — расчет с классической вязкостью; — — расчет с полной матрицей вязкостей; — — аналитическое решение

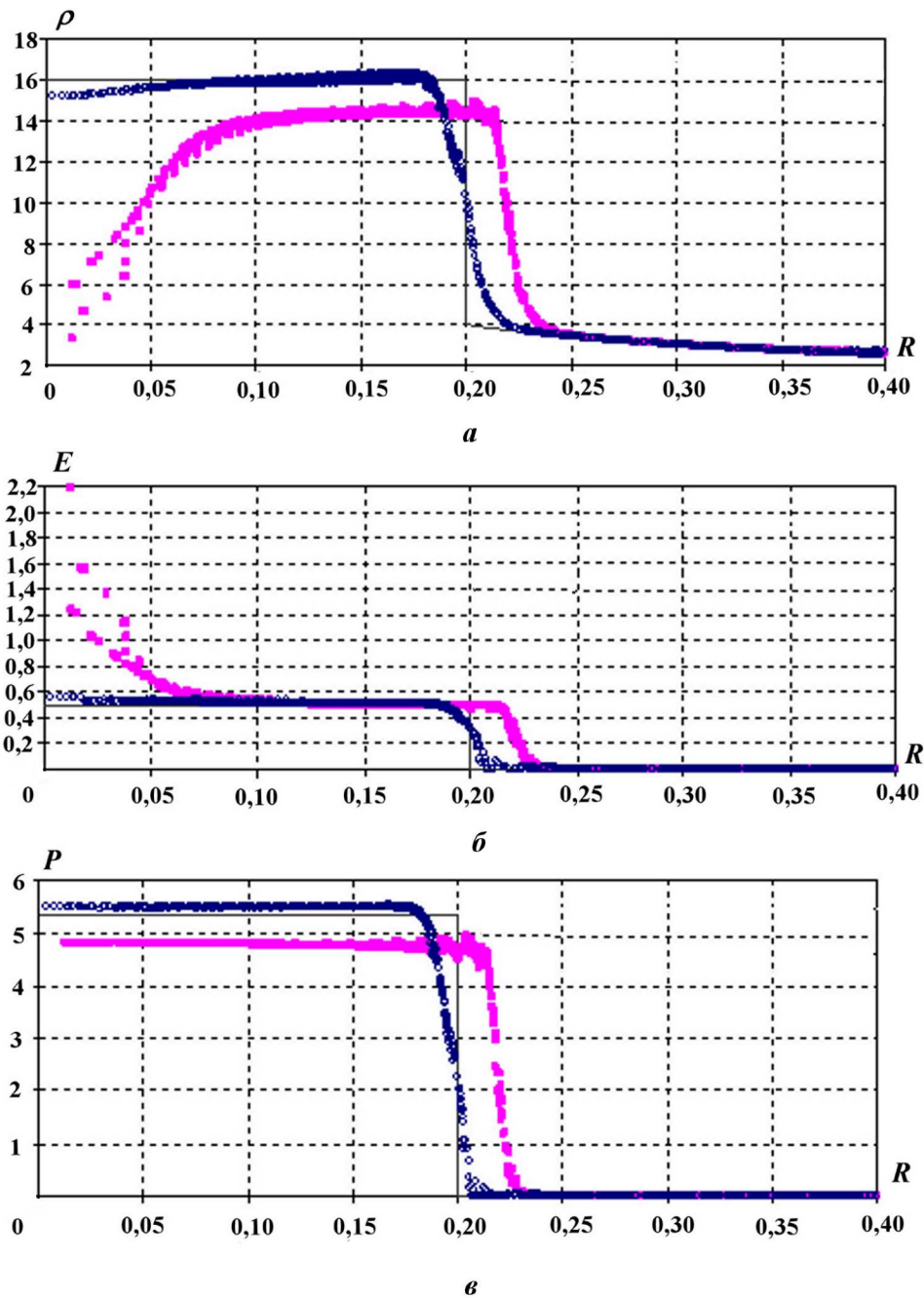


Рис. 3. Цилиндрическая задача Ноха на квадратной сетке, $t = 0,6$. Распределение плотностей (*a*), энергий (*б*), давлений (*в*): ■ — расчет с классической вязкостью; ○ — расчет с полной матрицей вязкостей; — — аналитическое решение

нение плотности от точного значения (см. рис. 2, *a*) в расчете с использованием матрицы искусственных вязкостей составляет 4,9 %, а в расчете с использованием классической вязкости — 48,8 %. Максимальная ошибка в значениях удельной внутренней энергии (см. рис. 2, *б*) в расчете с использованием матрицы искусственных вязкостей составляет 6,5 %, а в расчете с классической вязкостью — 88,6 %.

Профили давлений в обоих расчетах, как и обычно, не имеют особенностей в области энтропийного следа (см. рис. 2, *в*). Однако значение давления за фронтом УВ в расчете с классической вязкостью значительно отличается от точного аналитического решения. При этом положение фронта УВ,

полученное в расчете с классической вязкостью, значительно опережает положение фронта УВ в аналитическом решении.

То же самое можно сказать и по результатам расчетов задачи Ноха на квадратной сетке (см. рис. 3).

В обоих вариантах расчетов применение новой матрицы искусственных вязкостей радикально уточняет положение фронта УВ, а также значения плотности и давления за фронтом УВ по сравнению с расчетами, в которых используется классическая вязкость.

Задача Зальцмана. Постановка задачи и результаты многочисленных расчетов этой задачи содержатся, например, в работе [8].

В начальный момент времени $t = 0$ счетная область представляет собой прямоугольник $X_{\min} \leq x \leq X_{\max}$; $Y_{\min} \leq y \leq Y_{\max}$ в декартовой плоскости XOY . Регулярная пространственная сетка строится разбиением счетной области на $N_i - 1$ интервалов вдоль оси OX и на $N_k - 1$ интервалов вдоль оси OY , так что сетка состоит из $N_i \times N_k$ узлов $\vec{Z}_{i,k} = (x_{i,k}, y_{i,k})$, $i = 1, 2, \dots, N_i$, $k = 1, 2, \dots, N_k$ (рис. 4).

Вдоль оси OY принято равномерное разбиение по длине интервала, т. е. ординаты $y_{i,k}$, узлов сетки вычисляются по формуле

$$y_{i,k} = Y_{\min} + (k - 1) h_Y, \quad i = 1, 2, \dots, N_i, \quad k = 1, 2, \dots, N_k,$$

где $h_Y = \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{N_k - 1}$.

Абсциссы узлов сетки вычисляются по следующей формуле:

$$x_{i,k} = X_{\min} + (i - 1) h_X + (N_k - k) h_X \sin\left(\frac{(i - 1) \pi}{N_i - 1}\right), \quad i = 1, 2, \dots, N_i, \quad k = 1, 2, \dots, N_k,$$

где $h_X = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{N_i - 1}$.

Представленные здесь расчеты задачи Зальцмана проводились при следующих значениях параметров, определяющих геометрию счетной области и пространственную сетку: $X_{\min} = 0$; $X_{\max} = 1$; $Y_{\min} = 0$; $Y_{\max} = 0,1$; $N_i = 101$; $N_k = 11$.

Вещество в счетной области — идеальный газ с уравнением состояния $P = (\gamma - 1) \rho E$, $\gamma = 5/3$; начальная плотность газа $\rho^0 = 1$; начальная энергия $E^0 = 0$; начальная скорость $U_X = 0$, $U_Y = 0$. На левой границе в качестве граничного условия задана постоянная скорость $U_X = 1$. Остальные границы — жесткие стенки.

В этой задаче сначала сильная УВ движется по сетке, непараллельной ее фронту, от левой границы области к ее правой границе. Затем, после отражения первой УВ от правой жесткой стенки, образуется вторая УВ, движущаяся справа налево. После отражения второй УВ от левой границы образуется третья УВ, идущая слева направо, и т. д. до полного вырождения объема счетной области.

В таблице приводятся параметры первых трех УВ и времена их отражения от границ области.

На рис. 5–7 представлены пространственные распределения плотности и давления по всем точкам счетной области, полученные на моменты времени $t = 0,7$, $t = 0,85$, $t = 0,925$ в расчетах задачи Зальцмана. В эти моменты времени фиксируются первые три УВ, параметры которых приведены в таблице. Результаты расчетов с новым набором искусственных вязкостей сравниваются с результатами расчетов с классической вязкостью и с аналитическим решением.

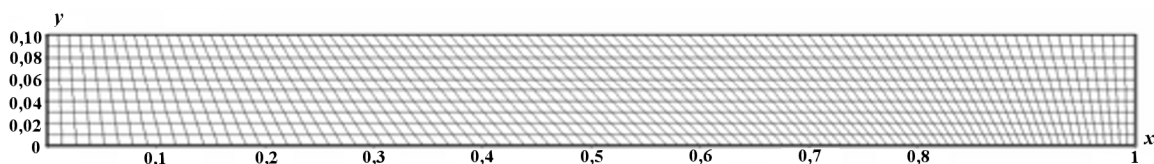


Рис. 4. Задача Зальцмана. Начальная сетка

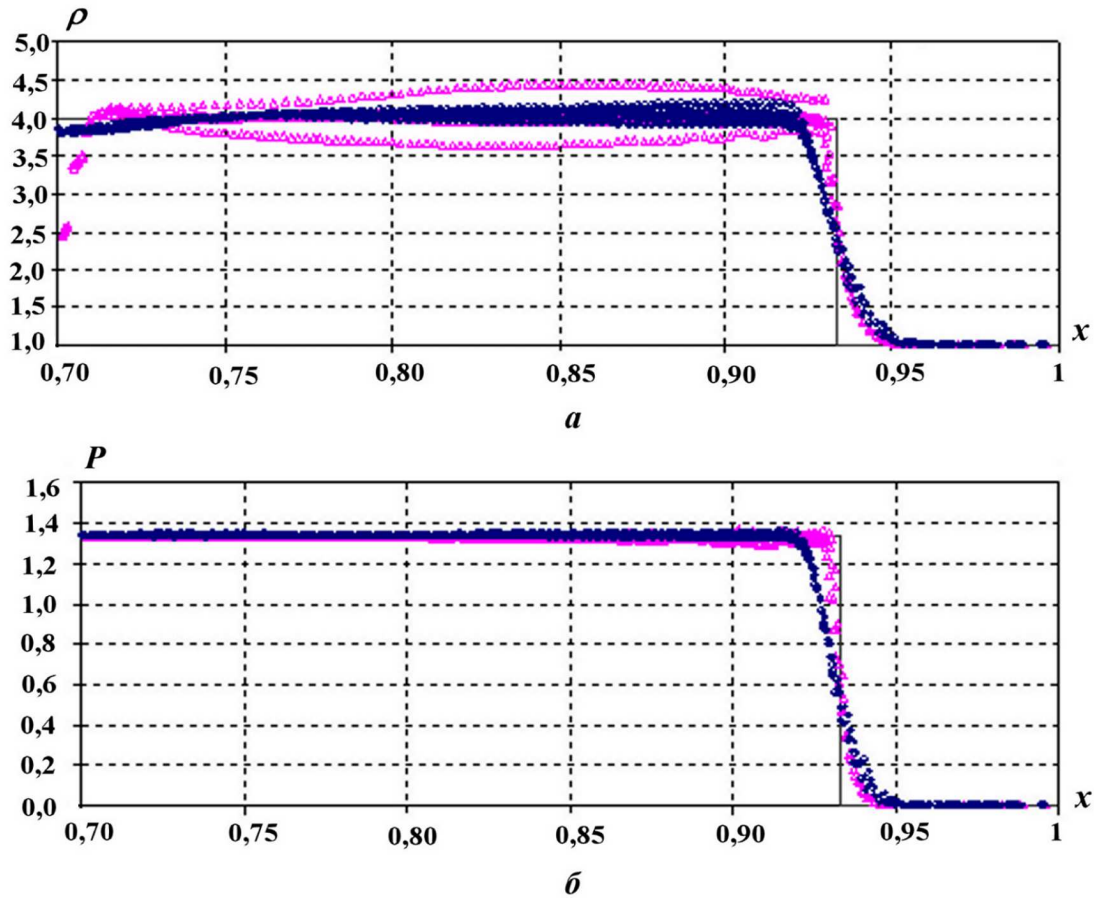


Рис. 5. Задача Зальцмана, $t = 0,7$. Распределение плотностей (а) и давлений (б): Δ — расчет с классической вязкостью; \bullet — расчет с полной матрицей вязкостей; — — аналитическое решение

Из рис. 5–7 видно, что использование новой матрицы искусственных вязкостей позволяет не только практически убрать энтропийный след на границах счетной области, но и существенно улучшить решение внутри области.

Аппроксимируя новые искусственные вязкости на разностной сетке, авторы намеренно не принимали никаких мер, направленных на то, чтобы искусственные вязкости оказывали стабилизирующее действие на лагранжеву пространственную сетку, таких, например, как в работе [8], где для этой цели компоненты тензора искусственной вязкости определялись на сторонах ячеек сетки. В данной работе используется простейший скалярный коэффициент искусственной вязкости C_U (42) и простейший линейный размер ячейки сетки l (43).

Решение вопросов, связанных со стабилизирующим воздействием искусственной вязкости на пространственную сетку, авторы оставляют на будущее. Предложенный подход к получению искусственных вязкостей допускает не только скалярные коэффициенты вязкости C_U и l , но и векторные: $\mathbf{C}_U = (C_u, C_v)$ и $\mathbf{l} = (l_x, l_y)$.

Можно надеяться, что оптимальный выбор коэффициента искусственной вязкости C_U , векторного или скалярного, и линейного размера ячейки l , векторного или скалярного ориентированного, позволит лучше учесть направление движения фронта УВ относительно пространственной сетки. Это также, по мнению авторов, должно оказывать стабилизирующее воздействие на лагранжеву сетку в численных расчетах.

Несмотря на то, что на данном этапе от новой системы вязкостей не требуется стабилизирующего воздействия на пространственную сетку, из рис. 8 видно, что в расчете с новыми вязкостями качество сетки значительно лучше, чем в расчете с классической вязкостью. Однако основным результатом

Задача Зальцмана. Параметры первых трех УВ и время их отражения от границ области

Параметр	Начальное значение	Первая УВ	Вторая УВ	Третья УВ
Плотность	1	4	10	20
Давление	0	4/3	8	28
Внутренняя энергия	0	0,5	1,2	2,1
Скорость УВ	—	4/3	2/3	2
Время отражения	—	0,75	0,9	0,95

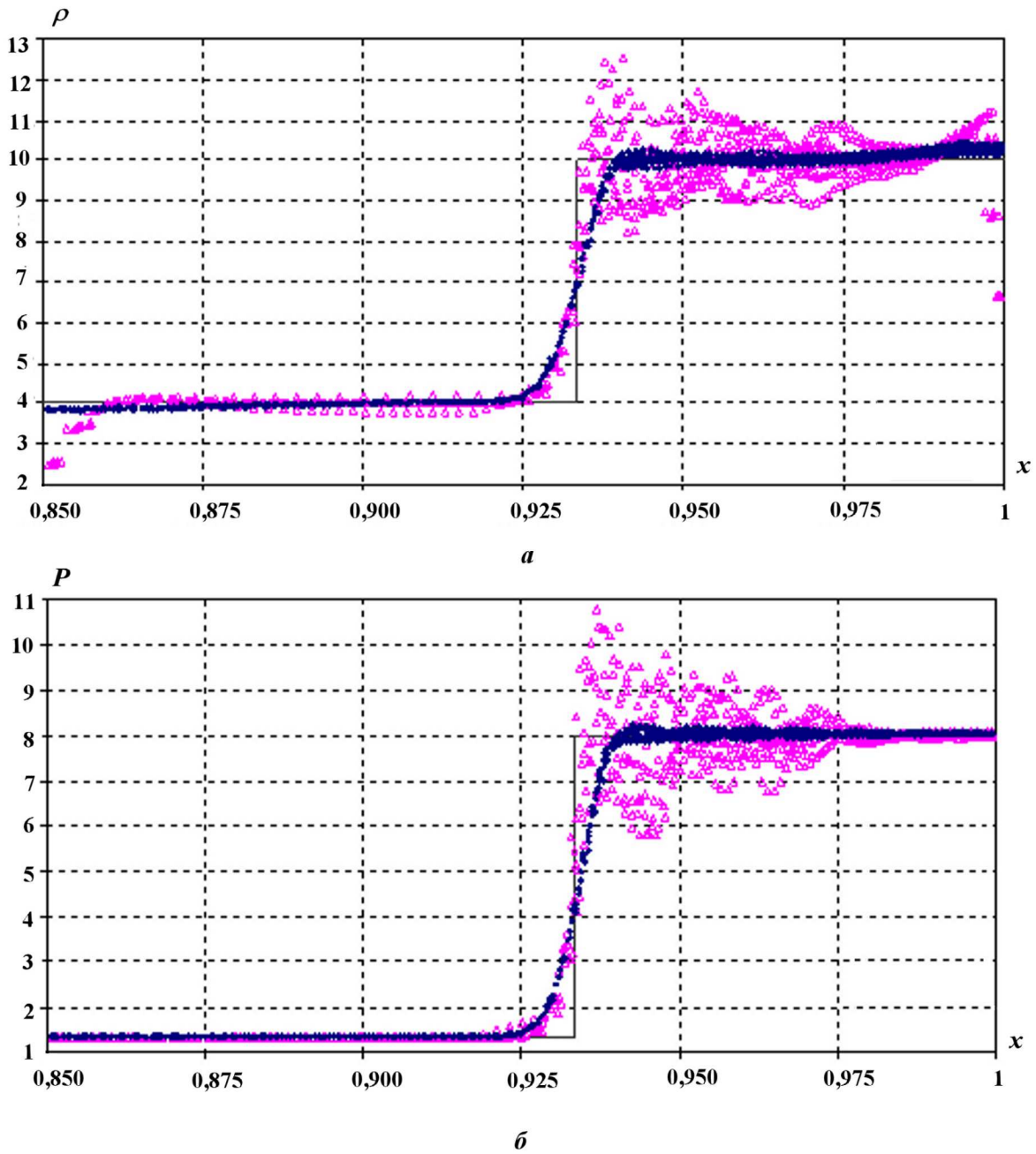


Рис. 6. Задача Зальцмана, $t = 0,85$. Распределение плотностей (а) и давлений (б): Δ — расчет с классической вязкостью; \bullet — расчет с полной матрицей вязкостей; — — аналитическое решение

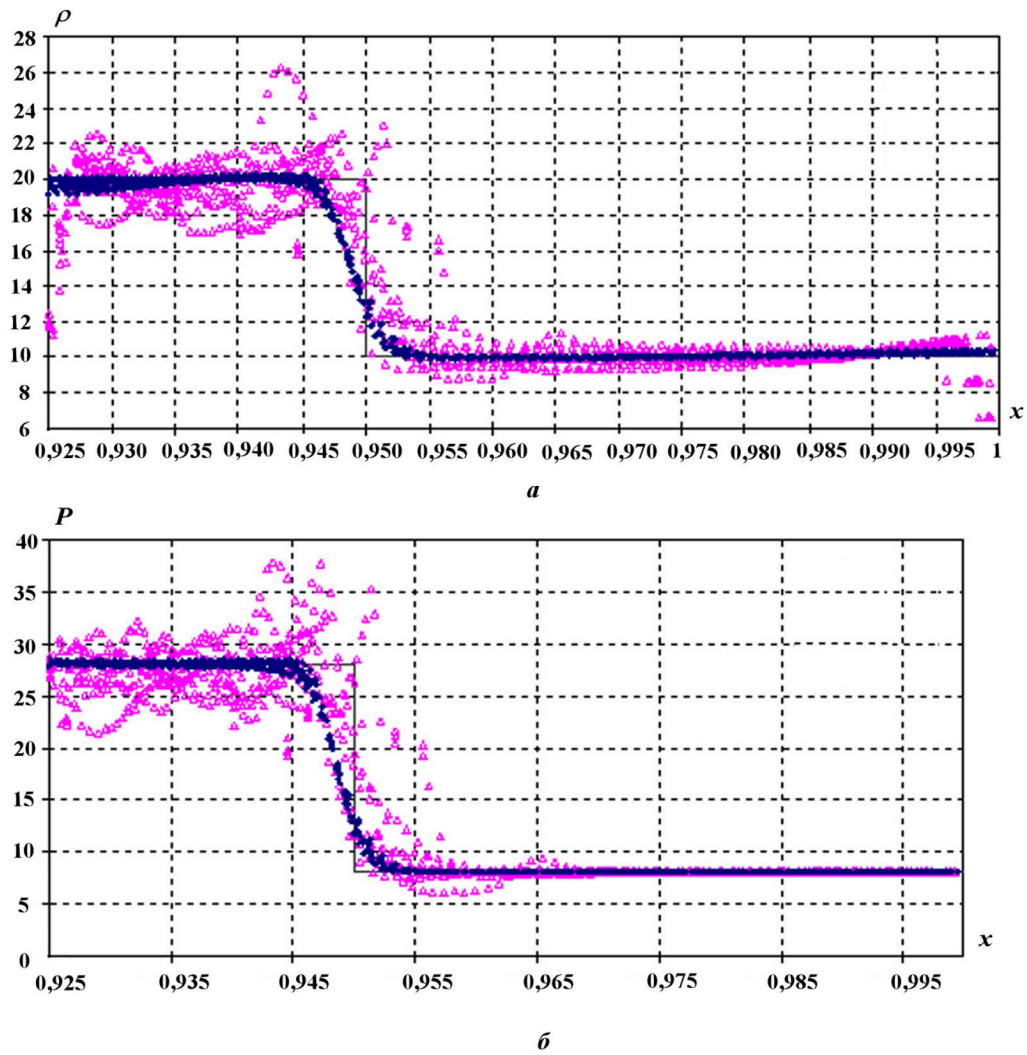


Рис. 7. Задача Зальцмана, $t = 0,925$. Распределение плотностей (а) и давлений (б): Δ — расчет с классической вязкостью; \bullet — расчет с полной матрицей вязкостей; — — аналитическое решение

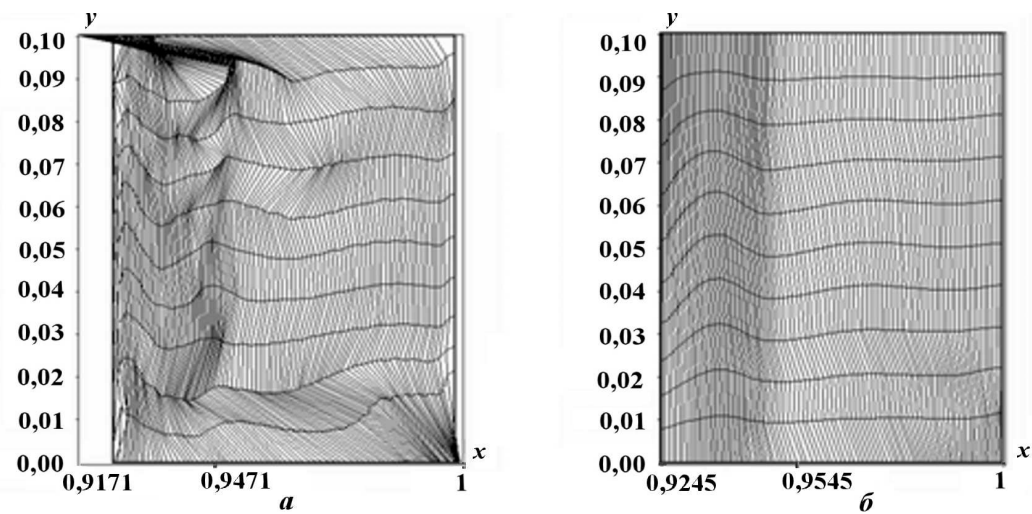


Рис. 8. Задача Зальцмана, $t = 0,925$. Растровая картина плотностей: а — расчет с классической вязкостью; б — расчет с полной матрицей вязкостей

представленных здесь расчетов задачи Зальцмана авторы все же считают то, что при использовании новой матрицы вязкостей практически исчезает энтропийный след на границах счетной области. Хотя, конечно, качество счетной сетки и качество решения — вещи взаимосвязанные.

Цилиндрическое безударное сжатие. Расчеты данной задачи были проведены с целью выяснить, как ведут себя новые искусственные вязкости в случае, когда сжатие безударное. То есть искусственная вязкость, предназначенная для сквозного счета УВ, не должна оказывать влияния на газодинамическое течение.

Здесь представлены результаты расчетов безударного сжатия в двух вариантах: на радиальной сетке и на квадратной сетке. В первом варианте счетная область — четверть круга $0 \leq R \leq 29$, расположенная в первом координатном квадранте. Во втором варианте счетная область — квадрат $0 \leq x \leq 29$; $0 \leq y \leq 29$. В обоих вариантах число ячеек сетки 58×58 .

Вещество — идеальный газ: $P = (\gamma - 1) \rho E$, $\gamma = 1,4$. Начальные данные: плотность $\rho^0 = 1$, энергия $E^0 = 0$, радиальная скорость $U_R^0 = -R^0$. Граничные условия: границы $x = 0$ и $y = 0$ — жесткие стенки; на внешних границах — *свободная поверхность*, $P = 0$. В этой задаче с течением времени под действием начального поля скоростей происходит равномерное безударное сжатие газа.

Задача имеет следующее решение, определенное в моменты времени $t < 1$.

Внутренняя энергия, давление и радиальные скорости с течением времени не меняются:

$$E = E^0 = 0; \quad P = P^0 = 0; \quad U_r = U_r^0 = -R^0.$$

Радиусы точек и плотность газа зависят от времени следующим образом:

$$R = R^0 (1 - t); \quad \rho = \frac{\rho^0}{(1 - t)^2}.$$

Результаты расчетов показали, что новые типы искусственных вязкостей в обоих вариантах постановки данной задачи принимают нулевые значения, т. е. "не работают". Численные решения с этими вязкостями в точности совпадают с аналитическим решением. Классическая вязкость в этой задаче не равна нулю, что ведет к неверному численному решению, причем неверное численное решение на радиальной сетке отличается от неверного численного решения на квадратной сетке (рис. 9, 10).

На рис. 9 представлены профили плотности и давления, полученные в расчете с полной матрицей искусственных вязкостей на радиальной сетке, в сравнении с расчетом, где использовалась классическая скалярная вязкость, и с аналитическим решением.

На рис. 10 представлено пространственное распределение плотностей в зависимости от радиуса, отсчитываемого от начала координат, полученное в расчете с полной новой матрицей вязкостей, в сравнении с полученным в расчете с классической вязкостью и с аналитическим решением.

Заключение

Метод получения матрицы искусственных вязкостей, предложенный в работе [1] для одномерного случая, обобщается на случай системы уравнений газовой динамики, описывающей двумерные течения, обладающие плоской симметрией. С помощью этого подхода получены формулы для скорости искусственной диффузии массы в уравнении неразрывности, тензорная искусственная вязкость в уравнении движения и формулы для потоков искусственной диффузии внутренней энергии для уравнений в лагранжевых координатах.

Результаты проведенных тестовых расчетов показали высокую эффективность новой системы вязкостей по уменьшению энтропийного следа в численных расчетах. В задачах безударного цилиндрического сжатия новая система вязкостей не искажает решения задачи.

Новая система вязкостей оказывает стабилизирующее действие на пространственную сетку в двумерных расчетах, хотя никаких специальных мер для этого не предпринималось. Коэффициенты вязкости и линейный размер в формулах для вязкостей вычислялись по простейшим формулам. В дальнейшем возможна оптимизация этих параметров.

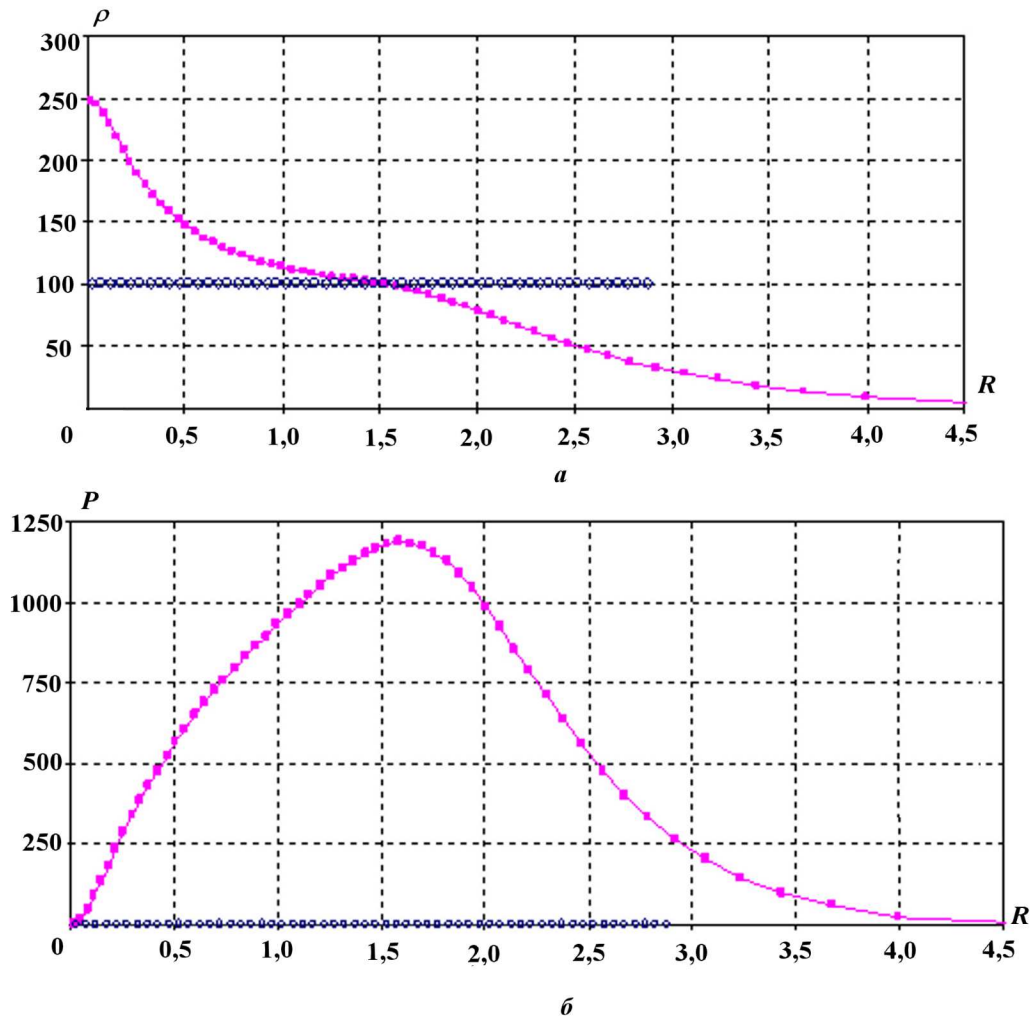


Рис. 9. Равномерное сжатие на радиальной сетке, $t = 0,9$. Профили плотности (а) и давления (б): ■ — расчет с классической вязкостью; ○ — расчет с полной матрицей вязкостей; — — аналитическое решение

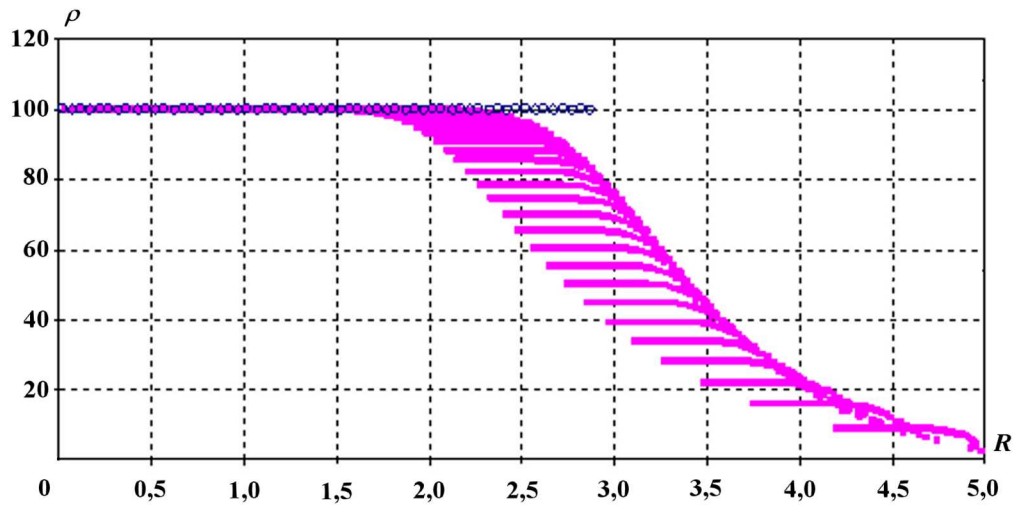


Рис. 10. Равномерное сжатие на квадратной сетке, $t = 0,9$. Распределение плотностей: ■ — расчет с классической вязкостью; ○ — расчет с полной матрицей вязкостей; — — аналитическое решение

Список литературы

1. Стенин А. М., Соловьёва Е. А. Исследование влияния некоторых форм искусственной вязкости на характер "энтропийного следа" при численном решении уравнений газодинамики // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2008. Вып. 1. С. 30—41.
2. Noh W. F. Errors for calculation of strong shocks using an artificial viscosity and artificial heat flux // J. Comp. Phys. 1987. Vol. 72, No. 1. P. 78—120.
3. Бондаренко Ю. А. Энтропийный след в расчетах на сходимость при взаимодействии ударных волн // Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики: Тез. докл. 11-й Всерос. конф. Пушино, 5—9 октября 1996 г. / Под ред. А. В. Забродина, А. М. Молчанова, В. М. Тихомирова. Пушино, 1996. С. 15—17.
4. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. Von Neumann J., Richtmyer R. D. A method for the numerical calculations of hydrodynamic shocks // J. Appl. Phys. 1950. Vol. 21, No. 3. P. 232—237.
6. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.
7. Бондаренко Ю. А. Применение вариационных принципов механики для построения дискретных по времени разностных моделей газодинамики. 1. Описание метода на простейших примерах // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1985. Вып. 2. С. 68—75.
8. Campbell J. C., Shashkov M. J. A tensor artificial viscosity using a mimetic finite difference algorithm // J. Comp. Phys. 2001. Vol. 172, No. 2. P. 739—765.

Статья поступила в редакцию 27.10.09.
