УДК 517.958:536.2

ПРИМЕНЕНИЕ TVD-ПОДХОДА К DS_n-МЕТОДУ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ RZ-ГЕОМЕТРИИ

А. Д. Гаджиев, В. В. Завьялов, А. А. Шестаков

(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Рассматривается реализация неявной нелинейной схемы типа TVD повышенного порядка аппроксимации для решения уравнения переноса теплового излучения в осесимметричной RZ-геометрии. Ранее данная схема была апробирована в плоском и сферически-симметричном случаях. Приводятся результаты численных расчетов тестовых задач.

Ключевые слова: перенос излучения, разностная схема, метод дискретных ординат, TVD-подход.

Введение

Для численного моделирования задач переноса теплового излучения разработка монотонных схем второго порядка аппроксимации является актуальной проблемой. Широко используемый для решения уравнения переноса метод дискретных ординат (DS_n-метод) [1] приводит к решению системы гиперболических уравнений. В то же время известно, что для гиперболических уравнений в классе линейных схем нет монотонной схемы с порядком аппроксимации выше первого. На практике, чтобы совместить в определенной степени монотонность и второй порядок аппроксимации, используются различные монотонизаторы [1]. В разработанной в РФЯЦ-ВНИИТФ DDAD-схеме [2] вводится искусственная диссипация. Хотя построенную подобным образом схему нельзя считать монотонной, она оказалась весьма эффективной для моделирования широкого класса задач.

Одним из путей решения рассматриваемой проблемы является переход к нелинейным TVD-схемам (Total Variation Diminishing) (см., например, [3]). В работе [4] в рамках DS_n-метода построена неявная нелинейная схема типа TVD для нестационарного одномерного уравнения переноса теплового излучения, которая демонстрирует монотонность, а по точности близка ко второму порядку. Построенная указанным способом схема типа TVD обладает следующими свойствами:

1. Неявность, безусловная устойчивость.
2. Монотонность в смысле принадлежности к классу TVD-схем.
3. Первый порядок аппроксимации по времени и второй порядок аппроксимации по пространству, кроме отдельных точек с экстремумами.
4. Консервативность в смысле выполнения разностного аналога интегрального закона сохранения в каждой ячейке.
5. Аппроксимация, как и в DS_n-методе, в рамках одной ячейки, если говорить о величинах с верхнего временного слоя. Данное свойство позволяет применять экономичный метод бегущего счета для решения системы разностных уравнений.

В данной работе схема из [4] обобщена на случай двумерной цилиндрически-симметричной геометрии с сохранением вышеперечисленных достоинств. Дополнительно в Приложении рассматривается вопрос о порядке аппроксимации схемы.

Постановка задачи

Система уравнений, описывающая распространение излучения, состоит из спектрального уравнения переноса в кинетической постановке, описывающего перенос, поглощение и рассеяние теплового излучения, и уравнения энергии, характеризующего изменение температуры вещества за счет поглощения и испускания фотонов. Данная система в осесимметричном спектральном случае для изотропного рассеяния выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} &\frac{\rho}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{I_\nu}{\rho}\right)+\vec{\Omega}\nabla I_\nu+\alpha_\nu I_\nu=\kappa_\nu B_\nu+\frac{k_\nu}{2\pi}U_\nu; \\ &\rho\frac{\partial E}{\partial t}=\int\limits_0^\infty\int\limits_{\vec{\Omega}}\kappa_\nu\left(I_\nu-B_\nu\right)d\vec{\Omega}d\nu. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\rho\left(\vec{r},t\right)$ — плотность вещества; $\vec{r}=(r,z)$ — радиус-вектор; t — время; $I_\nu\left(\vec{r},\vec{\Omega},\nu,t\right)$ — спектральная интенсивность излучения; ν — энергия фотонов; $\vec{\Omega}=(\mu=\cos\theta,\ \xi=\sqrt{1-\mu^2}\cos\phi,\ \eta=\sqrt{1-\mu^2}\sin\phi)$ — единичный вектор в направлении полета фотона; θ — угол между $\vec{\Omega}$ и осью Z; ϕ — угол между $\vec{r}$ и проекцией $\vec{\Omega}$ на плоскость, перпендикулярную оси R; $\vec{\Omega}\nabla I_\nu=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\xi I_\nu\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(r\mu I_\nu\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\eta I_\nu\right)$ — оператор переноса; $B_\nu\left(T,\nu\right)$ — интенсивность равновесного излучения (функция Планка); $T\left(\vec{r},t\right)$ — температура среды; $U_\nu=\int\limits_{\vec{\Omega}}I_\nu d\vec{\Omega}$ — спектральная плотность энергии излучения, умноженная на скорость света c; $\kappa_\nu\left(T,\nu\right)$ — коэффициент поглощения; $k_\nu\left(T,\nu\right)$ — коэффициент рассеяния; $\alpha_\nu\left(T,\nu\right)=\kappa_\nu+k_\nu$ — коэффициент ослабления; $E\left(T\right)$ — удельная внутренняя энергия вещества.

Для системы уравнений переноса (1) в некоторой области G, ограниченной замкнутой поверхностью $\bar{G}$, решается краевая задача со следующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} &I_\nu\left(\vec{r},\vec{\Omega},\nu,t=0\right)=I_\nu^0\left(\vec{r},\vec{\Omega},\nu\right); \\ &I_\nu\left(\vec{r}\in\bar{G},\vec{\Omega}\vec{n}<0,\nu,t\right)=I_\nu\left(\vec{r}\in\bar{G},\vec{\Omega},\nu,t\right); \\ &T\left(\vec{r},t=0\right)=T^0\left(\vec{r}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к $\bar{G}$. В силу осевой симметрии справедливо условие

$$I_\nu\left(r=0,z,\mu,\phi,\nu,t\right)=I_\nu^0\left(r=0,z,\mu,2\pi-\phi,\nu,t\right),\quad \vec{\Omega}\vec{n}=\xi, \tag{3}$$

поэтому рассматривается только область значений $-1\le\mu\le 1$, $0\le\phi\le\pi$.

Разностная аппроксимация

При разностной аппроксимации используется левая система координат. В качестве оси абсцисс используется ось Z, в качестве оси ординат — ось R. Для системы уравнений переноса (1) решается краевая задача с соответствующими начальными и граничными условиями (2), (3) в области

$$\left(t^0,t^{\hat{n}}\right)\times\left(-\infty<z<\infty,\ r\ge 0\right)\times\left(-1\le\mu\le 1,\ 0\le\phi\le\pi\right).$$

Для получения конечно-разностной схемы интегрирование уравнений производится по ячейке $G_{i+1/2,j+1/2}$ сетки $(i=0,\ldots,\hat{i}-1,\ j=0,\ldots,\hat{j}-1)$ (рис. 1). Как правило, дробные индексы будем опускать. Объем и площадь ячейки равны

$$\Delta V=\frac{1}{6}\left(r_1+r_2+r_3\right)\Big[r_1\left(z_3-z_2\right)+r_2\left(z_1-z_3\right)+r_3\left(z_2-z_1\right)\Big]+$$
$$+\frac{1}{6}\left(r_1+r_3+r_4\right)\Big[r_1\left(z_4-z_3\right)+r_3\left(z_1-z_4\right)+r_4\left(z_3-z_1\right)\Big];$$
$$\Delta S=0{,}5\left[\left(r_1-r_3\right)\left(z_2-z_4\right)+\left(r_2-r_4\right)\left(z_3-z_1\right)\right].$$

Введем следующие разности: $\Delta f_{i\rightleftarrows j}=f_{i,j+1\rightleftarrows i+1,j}-f_{ij}$; $\Delta_* f=f_{*+1}-f_*$ ($*$ — некоторый индекс) и зададим векторы нормалей к ребрам ячеек разностной сетки, направленные в сторону возрастания индексов:

$$\vec{n}_i=\left(\frac{\Delta z_i}{\sqrt{\Delta r_i^2+\Delta z_i^2}},-\frac{\Delta r_i}{\sqrt{\Delta r_i^2+\Delta z_i^2}}\right);\quad \vec{n}_j=\left(-\frac{\Delta z_j}{\sqrt{\Delta r_j^2+\Delta z_j^2}},\frac{\Delta r_j}{\sqrt{\Delta r_j^2+\Delta z_j^2}}\right);$$
$$\Delta s_i=\sqrt{\Delta r_i^2+\Delta z_i^2};\quad \Delta s_j=\sqrt{\Delta r_j^2+\Delta z_j^2};\quad \vec{\varphi}_i=\vec{n}_i\Delta s_i;\quad \vec{\varphi}_j=\vec{n}_j\Delta s_j.$$

Производя интегрирование (1) в пространстве $\left(t^n,t^{n+1}\right)\times G_{i+1/2,j+1/2}\times\left(\phi_{l+1},\phi_l\right)\times\left(\mu_{m+1},\mu_m\right)$ и используя формулу Гаусса—Остроградского, получим

$$\begin{aligned}&\frac{\rho^{n+1}}{c\tau}\left[\left(\frac{I_g}{\rho}\right)^{n+1}-\left(\frac{I_g}{\rho}\right)^{n}\right]+\vec{\Omega}\nabla_h I_g^{n+1}+\alpha_g^{n+1}I_g^{n+1}=Q_g^{n+1};\\&\rho^{n+1}\frac{E^{n+1}-E^n}{\tau}=\sum_g w_g\kappa_g^{n+1}\left(U_g^{n+1}-2\pi B_g^{n+1}\right),\end{aligned}\qquad(4)$$

где $\tau=t^{n+1}-t^n$; $Q_g^{n+1}=\kappa_g^{n+1}B_g^{n+1}+\dfrac{k}{2\pi}U_g^{n+1}$; w_g — весовой коэффициент. Оператор переноса в разностном виде:

$$\vec{\Omega}\nabla_h I_g=\frac{\Delta_i\left(\varpi I_g\right)+\Delta_j\left(\varpi I_g\right)}{\Delta V}-\frac{\Delta S}{\Delta V}\frac{\Delta_l\left(\eta\, I_g\right)}{\Delta_l\phi},$$
$$\varpi_i=\left(\vec{\Omega}\vec{n}\Delta sr\right)_i=\xi\Delta z_i-\mu\Delta r_i=\xi\left(z_{i,j+1}-z_{ij}\right)-\mu\left(r_{i,j+1}-r_{ij}\right),$$
$$\varpi_j=\left(\vec{\Omega}\vec{n}\Delta sr\right)_j=-\xi\Delta z_j+\mu\Delta r_j=-\xi\left(z_{i+1,j}-z_{ij}\right)+\mu\left(r_{i+1,j}-r_{ij}\right).$$

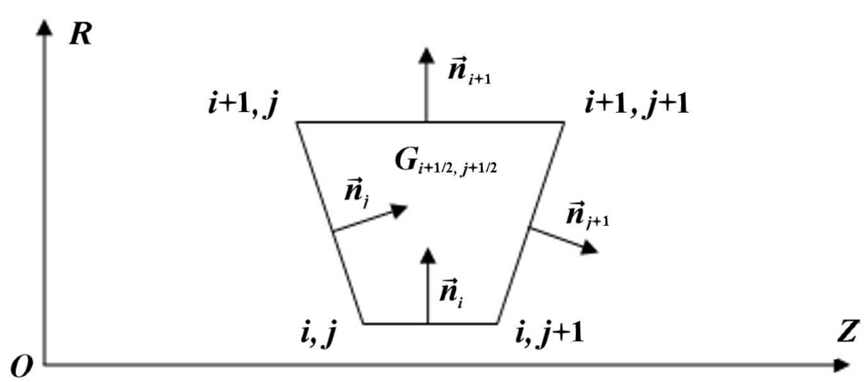

Рис. 1. Ячейка пространственной разностной сетки

Тогда уравнение переноса (4) можно записать в виде

$$\varpi_{i+1} I_{i+1,g}^{n+1} - \varpi_i I_{ig}^{n+1} + \varpi_{j+1} I_{j+1,g}^{n+1} - \varpi_j I_{jg}^{n+1} - \Delta S \frac{\eta_{l+1} I_{l+1,g}^{n+1} - \eta_l I_{lg}^{n+1}}{\Delta_l \phi} + \widehat{a}_g^{n+1} I_g^{n+1} = \widehat{Q}_g^{n+1}, \qquad (5)$$

где $\widehat{a}_g^{n+1} = \left(\frac{\rho^{n+1}}{c\tau} + a_g^{n+1}\right) \Delta V; \quad \widehat{Q}_g^{n+1} = \left[\frac{\rho^{n+1}}{c\tau} \left(\frac{I_g}{\rho}\right)^n + Q_g^{n+1}\right] \Delta V.$

Систему (4) нужно дополнить краевыми условиями и соотношениями связи значений I_g в центрах и на гранях ячеек. Для выпуклой ячейки при фиксированном $\vec{\Omega}$ существуют конфигурации трех типов (рис. 2).

Для широко используемой WDD-схемы соотношения связи задаются следующим образом:

$$I^+ = (1 + p)\, I - p I^-,$$

где I — интенсивность в центре ячейки; I^+, I^- — значения на неосвещенных и освещенных гранях соответственно; $p \in [0, 1]$ — вес. Шаговая St-схема ($p = 0$) имеет первый порядок точности, *алмазная* DD-схема ($p = 1$) имеет второй порядок точности, но она немонотонна и неположительна. На произвольных четырехугольных сетках возникают ячейки с одной освещенной и тремя неосвещенными сторонами, для которых приходится применять соотношения St-схемы, имеющие первый порядок точности. Кроме того, на St-схему делается переход в тех ячейках, где DD-схема дает отрицательное решение. Тем не менее данная DD/St-коррекция также неудовлетворительна, поскольку осцилляции в положительной области решения остаются.

Для повышения порядка аппроксимации обобщим нелинейную TVD-подобную схему, рассмотренную в [4], на двумерную систему (4). С этой целью в соответствии с TVD-методологией в качестве производных по всем направлениям берутся некоторые ограничители L, которые обычно используют односторонние производные. Добавление производных эквивалентно введению антидиффузии в St-схему таким образом, чтобы новая схема имела второй порядок аппроксимации и сохраняла при этом монотонность.

Пусть $L\,(I)$ — некоторая функция-ограничитель, тогда можно записать следующие соотношения:

$$L_*^n = L\left(\Delta_{*+1/2} I^n, \Delta_{*-1/2} I^n\right); \quad \left(D_*^{\pm}\right)^n = 1 \pm \frac{L_*^n}{2 I_*^n}; \quad I_{*\pm 1/2}^{n+1} = D_*^{\pm} I_*^{n+1}.$$

Поскольку $D^{\pm}$ является дробно-линейным функционалом, можно брать его с n-го шага в предположении слабого изменения на итерациях. В этом случае можно использовать экономичный алгоритм бегущего счета.

Подставляя вышеприведенные соотношения связи в уравнение (5), получаем формулу для определения интенсивности в центре ячейки:

$$I^{n+1} = \frac{C_i^{n+1} + C_j^{n+1} + C_l^{n+1} + \widehat{Q}^{n+1}}{\Phi_i^n + \Phi_j^n + \Phi_l^n + \widehat{a}^{n+1}},$$

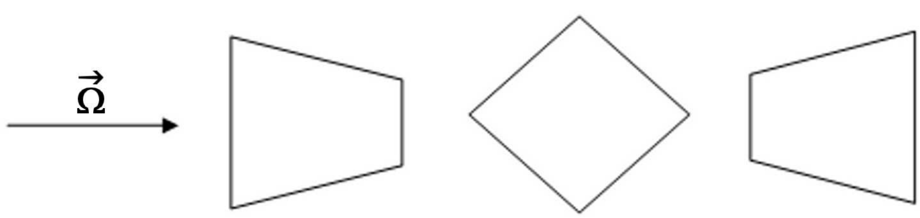

Рис. 2. Варианты освещенности ячеек

где

$$C_i = -\varpi_{i+1} I_{i+1}; \quad \Phi_i = -\varpi_i D^-_{i+1/2} \qquad \text{при } \varpi_i \le 0;\ \varpi_{i+1} < 0;$$

$$C_i = 0; \quad \Phi_i = \varpi_{i+1} D^+_{i+1/2} - \varpi_i D^-_{i+1/2} \qquad \text{при } \varpi_i \le 0;\ \varpi_{i+1} \ge 0;$$

$$C_i = \varpi_i I_i; \quad \Phi_i = \varpi_{i+1} D^+_{i+1/2} \qquad \text{при } \varpi_i > 0;\ \varpi_{i+1} \ge 0;$$

$$C_i = \varpi_i I_i - \varpi_{i+1} I_{i+1}; \quad \Phi_i = 0 \qquad \text{при } \varpi_i > 0;\ \varpi_{i+1} < 0;$$

$$C_l = -\Delta S \frac{\eta_l I_l}{\Delta_l \phi}; \quad \Phi_l = -\Delta S \frac{\eta_{l+1} D^+_{l+1/2}}{\Delta_l \phi};$$

C_j , Φ_j вычисляются аналогично C_i, Φ_i.

Для вычисления разностей, используемых в ограничителе, можно использовать более точное выражение для оператора $\nabla_h I$ на гранях разностной ячейки через расширение шаблона конечно-разностной схемы с привлечением значений интенсивности в окружающих ячейках (рис. 3). Положим градиент на ребре $\beta1\beta2$ равным полусумме градиентов в узлах $\beta1, \beta2$. Тогда разность интенсивностей в центре и на грани можно представить в виде

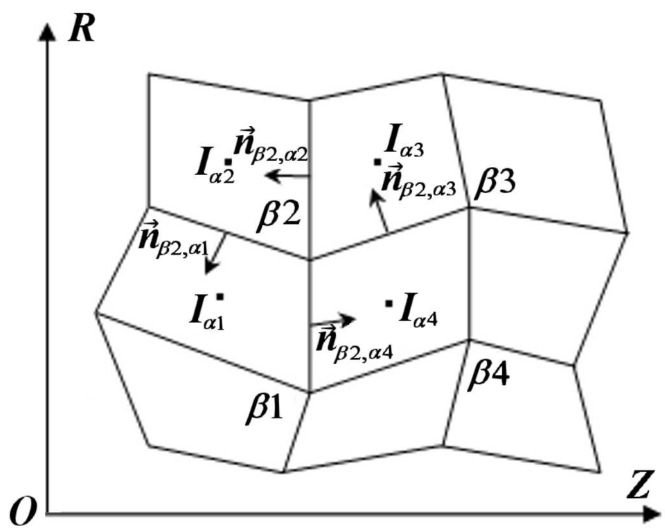

Рис. 3. Аппроксимация $\nabla_h I$ на расширенном шаблоне

$$I - I_{\beta1\beta2} = (\nabla_h I)_{\beta1\beta2} \left(\vec{r}_{\beta3\beta4} - \vec{r}_{\beta1\beta2}\right);$$

$$(\nabla_h I)_{\beta2} = \frac{4}{\sum\limits_{\gamma} \Delta S_{\alpha\gamma}} \sum_{\gamma} (\vec{n}\Delta s)_{\beta2} \left(\Delta_{\alpha\gamma} I\right),$$

$\alpha5 = \alpha1.$

Хотя аппроксимация разностей на расширенном шаблоне может быть более точной, она требует дополнительных вычислительных затрат.

Численные результаты

Рассмотрим две задачи в нерассеивающей среде ($k_g = 0$): вторую задачу Флека и тест с аналитическим решением. В схеме TVD использовался ограничитель Чакравати—Ошера [5]

$$L\,(a,b) = 0{,}5\,(1-\delta) \min\mathrm{mod}\,(a, \beta b) + 0{,}5\,(1+\delta) \min\mathrm{mod}\,(\beta a, b)\,,$$

$$\min\mathrm{mod}\,(a,b) = 0{,}5\,(\mathrm{sign}\,(a) + \mathrm{sign}\,(b)) \min\left(|a|\,, |b|\right)$$

с параметрами $\delta = 1/3$, $\beta = 3$. Сходимость определялась условием $\left|T^{\nu+1} - T^{\nu}\right| \le 10^{-5}\left(1 + T^{\nu+1}\right)$; $T^0 = 0{,}01$. Временной шаг выбирался так, что $c\tau = 0{,}03$; использовалась квадратура ES_{12}.

Задача 1. Рассматривается вторая задача Флека в сферически-симметричной геометрии [6]. На левой границе задано излучение планковского источника температуры $B_\nu\,(T = 1)$, на правой — условие *свободной поверхности*. В областях 1, 3 ($1 \le r \le 3$; $3{,}4 \le r \le 5$) коэффициент поглощения равен $\kappa_\nu = 27\left(1 - e^{-\nu/T}\right)/\nu^3$, в области 2 ($3 \le r \le 3{,}4$) $\kappa_\nu = 10\,000\left(1 - e^{-\nu/T}\right)/\nu^3$, и всюду $E = 0{,}81T$.

Сетка по радиусу: $r_1 = 1$; 1,004; 1,04; $r_4 = 1{,}1$;...; $r_{22} = 2{,}9$ ($\Delta r = 0{,}1$); $r_{23} = 2{,}987$; 2,999; 3; 3,001; 3,004; 3,013; $r_{29} = 3{,}04$;...; $r_{37} = 3{,}36$ ($\Delta r = 0{,}04$); $r_{38} = 3{,}396$; 3,4; 3,404; 3,44; $r_{42} = 3{,}5$;...; $r_{57} = 5$ ($\Delta r = 0{,}1$). В двумерной геометрии во втором направлении взято 59 каналов. Сетка по энергии: $\nu_{0\ldots\widehat{g}=15} = 0$; 0,3; 0,6; 0,8; 1,2; 1,5; 1,8; 2,4; 2,7; 3; 4; 5; 7; 9; 11; 15.

На рис. 4 приведены профили температуры вещества на четыре момента времени (ct =18; 30; 150; 360) для TVD-схемы. В качестве *точного* решения брались результаты на сильно измельченной сетке. Из рисунка видно, что результаты для различных геометрий практически совпадают. Схемы TVD с расширенным шаблоном для ограничителя и без него дали практически одинаковые результаты.

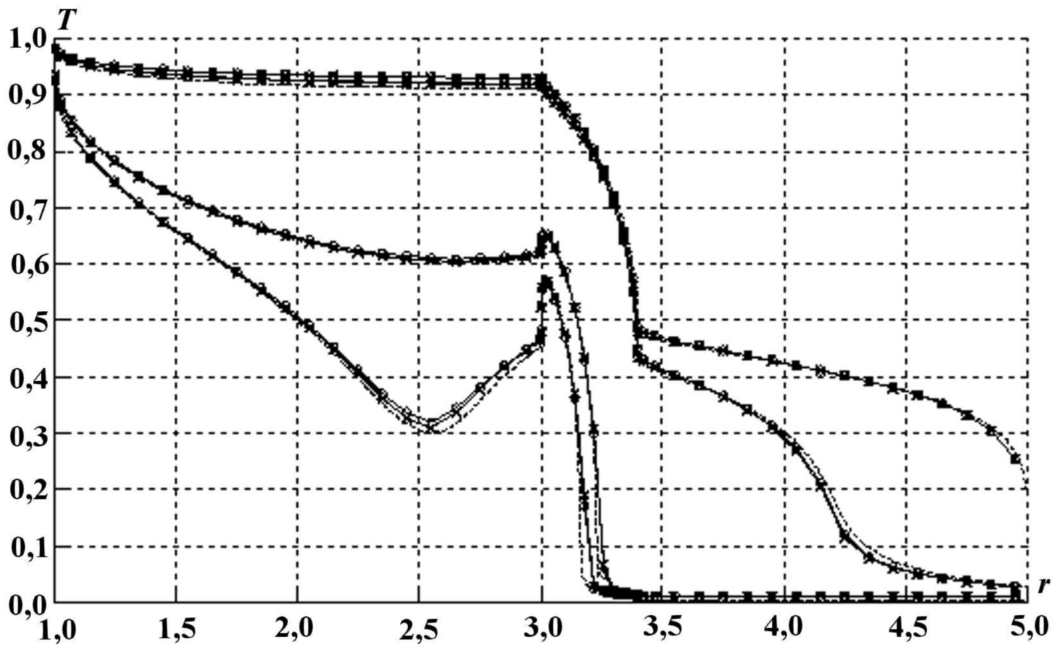

Рис. 4. Температура вещества $T(\vec{r},t)$: - - - — точное решение; $\circ$ — RZ-геометрия; $\times$ — сферически-симметричная геометрия

Задача 2. Задача построена на основе [7]. Выбранное точное решение в моноэнергетическом случае имеет вид тепловой волны, линейно распространяющейся вдоль оси Z:

$$T(\vec{r},t) = \begin{cases} \xi, & T > T^0; \\ T^0, & T \le T^0; \end{cases} \qquad I\left(\vec{r},\vec{\Omega},t\right) = \begin{cases} Bf, & I > B^0; \\ B^0, & I \le B^0; \end{cases}$$

$$\xi(\vec{r},t) = \beta_0 z + \nu_0 t; \quad E(T) = \frac{4\pi\kappa_0 (F-1)}{\nu_0} B; \quad \kappa(T) = \frac{4\kappa_0}{T};$$

$$\gamma = \frac{\beta_0}{\kappa_0 + \nu_0 c^{-1}}; \quad \delta = \frac{\kappa_0}{\beta_0}; \quad f\left(\vec{\Omega}\right) = \frac{\delta\gamma}{(1+\gamma\mu)}; \quad F = \delta \operatorname{arth}\gamma.$$

Использовались следующие параметры: $\beta_0 = 0{,}1$; $\nu_0 = 0{,}01$; $\kappa_0 = 500$; $c = 3\,000$. Задача решалась в прямоугольной области ($10 \le r \le 15$, $1 \le z \le 11$).

Результаты расчетов, проведенных с параметрами $\widehat{i} = 30$, $\widehat{j} = 15$ на двух типах неортогональных сеток, приводятся на рис. 5, 6 (см. также цветную вкладку) на момент $ct = 12$. Из рис. 5 видно, что, за исключением St-схемы, результаты по всем остальным схемам практически совпали с точным решением. На *комбинированной* сетке (см. рис. 6) лучше всех ведет себя DDAD-схема; схемы типа TVD показывают значительно лучший результат по сравнению с St-схемой, причем применение расширенного шаблона для ограничителя, вообще говоря, может повышать точность.

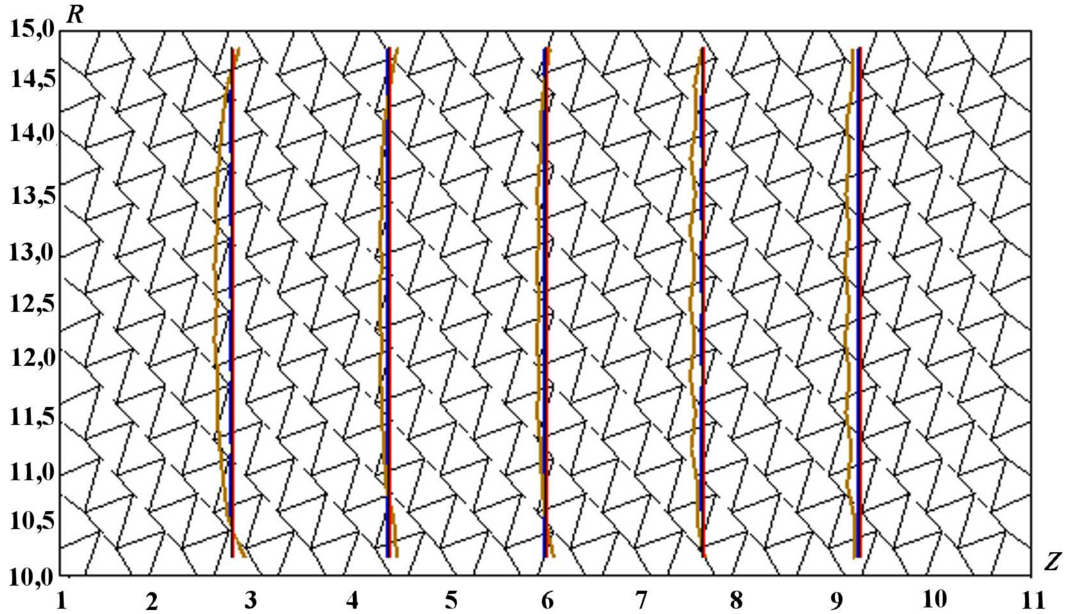

Рис. 5. Изолинии $T(\vec{r}, t)$ на сетке типа *рабица*, $ct = 12$

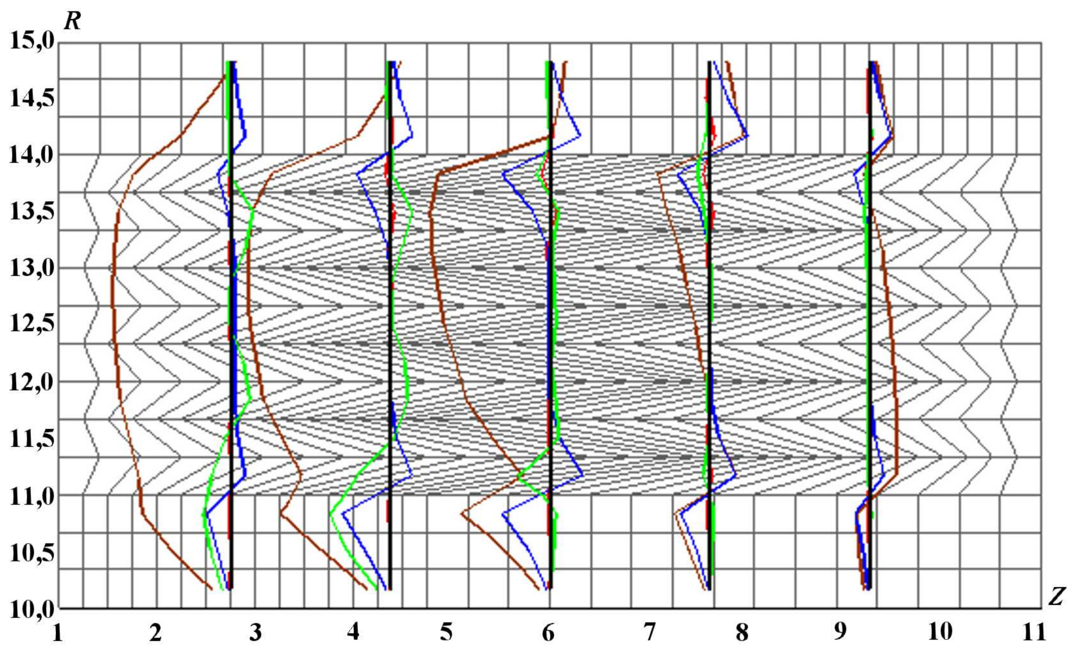

Рис. 6. Изолинии $T(\vec{r}, t)$ на *комбинированной* сетке, $ct = 12$

Заключение

В данной работе реализована неявная схема типа TVD для решения уравнения переноса теплового излучения в двумерной RZ-геометрии на произвольных четырехугольных сетках. В схеме используется ограничитель, который вычисляется явно по известным величинам с предыдущего временного шага на трехточечном шаблоне в каждом направлении. Эта схема сочетает в себе консервативность, монотонность в смысле методологии TVD-схем и второй порядок аппроксимации по пространству, кроме отдельных точек с экстремумами.

Кроме того, предложенная схема TVD обладает следующими достоинствами:

1. Простота реализации — повышение точности достигается при незначительном усложнении алгоритма St-схемы.
2. Сопоставимое с St-схемой число итераций за счет монотонности численного решения и отсутствия переключений.
3. Поскольку TVD-реконструкция производится для неосвещенных сторон в ячейке, то это позволяет дополнительно увеличить точность в ячейках, где освещена только одна сторона.

На основании численных расчетов, приведенных в данной статье, можно сделать вывод, что использование схемы типа TVD дает монотонное решение и порядок аппроксимации заметно выше первого.

Приложение

Рассмотрим порядок аппроксимации предложенной TVD-схемы для линейного уравнения переноса $\dfrac{\partial I}{\partial t} + c\mu\dfrac{\partial I}{\partial x} = 0$, которое получается из системы (1) в вакууме в плоской геометрии. Пусть для упрощения $c\mu = 1$, тогда

$$\frac{I^{n+1}_{i+1/2} - I^{n}_{i+1/2}}{\tau} + \frac{I^{n+1}_{i+1} - I^{n+1}_{i}}{h} = 0.$$

Разложим I в ряд Тейлора в точке $(i+1/2,\, n+1)$, получим

$$\frac{I^{n+1}_{i+1/2} - I^{n}_{i+1/2}}{\tau} = \frac{\partial I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial t} - \left(\frac{\tau}{2!}\frac{\partial^2 I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial t^2} - \frac{\tau^2}{3!}\frac{\partial^3 I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial t^3} + \frac{\tau^3}{4!}\frac{\partial^4 I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial t^4} + O\left(\tau^4\right)\right);$$

$$\frac{I^{n+1}_{i+1} - I^{n+1}_{i}}{h} = \frac{1}{h}\left(I^{n+1}_{i+1/2} - I^{n+1}_{i-1/2} + \frac{L^{n+1}_{i+1/2} - L^{n+1}_{i-1/2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{\partial I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial x} - \left(\frac{h}{2}\frac{\partial^2 I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial x^2} - \frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial x^3} + O\left(h^3\right)\right) + \frac{L^{n+1}_{i+1/2} - L^{n+1}_{i-1/2}}{2h} = \frac{\partial I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial x} + \widetilde{I}.$$

Возьмем для простоты простейший TVD-ограничитель $L = \min\operatorname{mod}$, в этом случае возможны следующие варианты:

$$L^{n+1}_{i+1/2} = \begin{cases} I^{n+1}_{i+3/2} - I^{n+1}_{i+1/2} = h\dfrac{\partial I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial x} + \dfrac{h^2}{2}\dfrac{\partial^2 I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial x^2} + \dfrac{h^3}{6}\dfrac{\partial^3 I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial x^3} + O\left(h^4\right); \\ I^{n+1}_{i+1/2} - I^{n+1}_{i-1/2} = h\dfrac{\partial I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial x} - \dfrac{h^2}{2}\dfrac{\partial^2 I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial x^2} + \dfrac{h^3}{6}\dfrac{\partial^3 I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial x^3} + O\left(h^4\right); \\ 0; \end{cases}$$

$$L^{n+1}_{i-1/2} = \begin{cases} I^{n+1}_{i+1/2} - I^{n+1}_{i-1/2} = h\dfrac{\partial I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial x} - \dfrac{h^2}{2}\dfrac{\partial^2 I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial x^2} + \dfrac{h^3}{6}\dfrac{\partial^3 I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial x^3} + O\left(h^4\right); \\ I^{n+1}_{i-1/2} - I^{n+1}_{i-3/2} = h\dfrac{\partial I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial x} - \dfrac{3h^2}{2}\dfrac{\partial^2 I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial x^2} + \dfrac{7h^3}{6}\dfrac{\partial^3 I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial x^3} + O\left(h^4\right); \\ 0. \end{cases}$$

Пусть $L^{n+1}_{i+1/2} = 0$ (аналогично рассматривается случай $L^{n+1}_{i-1/2} = 0$), тогда $\operatorname{sign}\left(I^{n+1}_{i+3/2} - I^{n+1}_{i+1/2}\right) \neq$ $\neq \operatorname{sign}\left(I^{n+1}_{i+1/2} - I^{n+1}_{i-1/2}\right)$ и, пренебрегая членами $O\left(h^3\right)$, получаем $\left|\dfrac{\partial I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial x}\right| < \left|\dfrac{h}{2}\dfrac{\partial^2 I^{n+1}_{i+1/2}}{\partial x^2}\right|$ и

$\tilde{I} < \left| \dfrac{h}{2} \dfrac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} \right| + O\left(h^2\right)$. Заметим, что при линейном решении производные выше первой равны нулю и даже при $L_{i+1/2}^{n+1} = 0$, $L_{i-1/2}^{n+1} = 0$, $L_{i+1/2} = L_{i-1/2}$ имеем точную аппроксимацию $\dfrac{I_{i+1}^{n+1} - I_i^{n+1}}{h} = \dfrac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x}$. В случае строго монотонно возрастающей или строго монотонно убывающей функции получаем второй порядок аппроксимации. Далее в таблице приведены девять практически возможных ситуаций.

Порядок аппроксимации для различных случаев поведения решения

Номер ситуации	$\dfrac{L_{i+1/2}^{n+1} - L_{i-1/2}^{n+1}}{h}$	Остаточный член $\widetilde{I}$	Порядок аппроксимации
1	$h\dfrac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O\left(h^2\right)$	$\dfrac{h^2}{6}\dfrac{\partial^3 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^3} + O\left(h^3\right)$	$O\left(h^2\right)$
2	$2h\dfrac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O\left(h^2\right)$	$-\dfrac{h}{2}\dfrac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O\left(h^2\right)$	$O\left(h\right)$
3	$\dfrac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x} + \dfrac{h}{2}\dfrac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O\left(h^2\right)$	$\dfrac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{2\partial x} - \dfrac{h}{4}\dfrac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O\left(h^2\right)$	$O\left(h\right)$
4	0	$-\dfrac{h}{2}\dfrac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O\left(h^2\right)$	$O\left(h^2\right)$
5	$h\dfrac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O\left(h^2\right)$	$-\dfrac{h^2}{6}\dfrac{\partial^3 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^3} + O\left(h^3\right)$	$O\left(h^2\right)$
6	$\dfrac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x} - \dfrac{h}{2}\dfrac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O\left(h^2\right)$	$\dfrac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{2\partial x} - \dfrac{3h}{4}\dfrac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O\left(h^2\right)$	$O\left(h\right)$
7	$-\dfrac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x} + \dfrac{h}{2}\dfrac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O\left(h^2\right)$	$-\dfrac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{2\partial x} - \dfrac{h}{4}\dfrac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O\left(h^2\right)$	$O\left(h\right)$
8	$-\dfrac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x} + \dfrac{3h}{2}\dfrac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O\left(h^2\right)$	$-\dfrac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{2\partial x} + \dfrac{h}{4}\dfrac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O\left(h^2\right)$	$O\left(h\right)$
9	0	$-\dfrac{h}{2}\dfrac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O\left(h^2\right)$	$O\left(h^2\right)$

Список литературы

1. *Басс Л. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А.* Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. М.: ИПМ АН СССР, 1986.

2. *Гаджиев А. Д., Селезнев В. Н., Шестаков А. А.* DS_n-метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 2. С. 33—46.

3. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.

4. *Гаджиев А. Д., Завьялов В. В., Шестаков А. А.* Применение TVD-подхода к DS_n-методу решения уравнения переноса теплового излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 37—48.

5. *Osher S., Chakravarthy S.* High resoultion schemes and the entropy condition // SIAM J. Numer. Anal. 1984. Vol. 21(5). P. 955—984.

6. *Fleck J. A., Cummings J. D.* An implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8. P. 313—342.

7. *Zaviyalov V. V., Gusev V. Y., Vershinskaya A. S.* Exact solutions of radiation and energy transfer equations in 3D spherically non-symmetric geometry // J. Comp. and Appl. Math. 2006. Vol. 189. P. 635—642.

Статья поступила в редакцию 24.09.09.