

УДК 517.956.4

## АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ТЕПЛОВЫЕ ВОЛНЫ ОТ СОСРЕДОТОЧЕННОГО ИЛИ ОБЪЕМНОГО ИСТОЧНИКА В СРЕДЕ С НЕОДНОРОДНЫМИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Б. П. Тихомиров  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Обсуждается вопрос о сопряжении на плоской границе раздела сред с разными теплофизическими характеристиками известных автомодельных решений. Поставлена задача об объемном источнике, включающая в себя как частный случай задачу о мгновенном сосредоточенном источнике. Построено точное решение задачи с учетом плотности энергии излучения. Приводятся примеры модельных задач для тестирования методик расчета нелинейной теплопроводности в неоднородной среде без учета и с учетом функции горения.

*Ключевые слова:* сосредоточенный и объемный источники, тепловая волна, граница раздела сред, согласование автомодельных решений, модельные тестовые задачи.

В работах [1, 2] было получено точное решение задачи о распространении в среде с однородными теплофизическими параметрами тепловой волны от мгновенного сосредоточенного источника. В настоящей работе эта задача обобщается на случай мгновенного выделения энергии на границе раздела сред с разными теплофизическими параметрами. Рассматривается также задача об объемном источнике специального вида, включающая в себя как частный случай задачу о мгновенном сосредоточенном источнике. В нелинейное уравнение теплопроводности вводится функция горения, прямо пропорциональная энергии и обратно пропорциональная времени. Уравнение решается в полупространстве с заданным температурным режимом на границе и в неограниченном пространстве с заданным степенным законом возрастания энергии.

Рассматриваемые задачи о сосредоточенном и объемном источниках в среде с распределенными теплофизическими параметрами имеют точные решения. В общем виде их можно найти в справочнике по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса [3].

Работа состоит из трех разделов. В первом разделе приводится автомодельное решение для случая мгновенного выделения энергии на плоской границе полупространства и обсуждается вопрос о сопряжении автомодельных решений на границе раздела сред с разными теплофизическими параметрами. Во втором разделе формулируется задача об объемном источнике, описывается автомодельное решение и рассматривается вопрос о согласовании решений на плоской границе раздела сред. Строится точное решение задачи с учетом плотности энергии излучения в случаях плоской, цилиндрической и сферической симметрий. В последнем разделе приводятся конкретные примеры модельных задач. Эти задачи могут использоваться для тестирования численных методов решения задач нелинейной теплопроводности в неоднородной среде.

## 1. Мгновенное выделение энергии на границе раздела сред с разными теплофизическими параметрами

**Среда с распределенной плотностью. Формулы автомоделного решения.** Будем рассматривать задачу о распространении тепла путем лучистой теплопроводности в неподвижной среде. Процесс описывается уравнением

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\ell c}{3} \frac{\partial \sigma T^4}{\partial x} \right),$$

где  $t$  — время;  $x$  — координата;  $E$  — удельная внутренняя энергия;  $T$  — температура;  $\rho$  — плотность;  $\ell$  — длина свободного пробега фотонов;  $c$  — скорость света;  $\sigma$  — постоянная Стефана.

Предполагаем, что внутренняя энергия подчиняется уравнению состояния вида  $E = c_V T$ , где  $c_V$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме, являющаяся степенной функцией температуры ( $c_V = c_{V_0} T^{k-1}$ ). Плотностью энергии излучения пренебрегаем.

Будем считать, что длина пробега фотонов является степенной функцией температуры и плотности:

$$\ell = \ell_0 \frac{T^\alpha}{\rho^\beta},$$

что плотность не меняется с течением времени и степенным образом зависит от пространственной координаты:

$$\rho = \rho_0 |x|^\mu.$$

Тогда уравнение лучистой теплопроводности можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (b |x|^\mu T^k) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{a}{|x|^\nu} T^n \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где

$$b = \rho_0 c_{V_0}; \quad a = \frac{4}{3} \frac{\ell_0 \sigma c}{\rho_0^\beta}; \quad n = 3 + \alpha; \quad \nu = \mu \beta.$$

На показатель степени  $\mu$  накладывается естественное ограничение  $1 + \mu > 0$ , вытекающее из требования конечности массы в ограниченной области, содержащей точку  $x = 0$ . Кроме того, потребуем, чтобы выполнялись неравенства  $2 + \mu + \nu > 0$ ;  $n + 1 - k > 0$ . Далее уравнение (1) будем рассматривать в полупространстве  $x > 0$ .

Точное решение задачи о распространении тепла в неограниченной среде при мгновенном выделении энергии  $Q$  в точке  $x = 0$  было построено в работах [1, 2] для случаев плоской ( $\mu = \nu = 0$ ), цилиндрической ( $\mu = 1, \nu = -1$ ) и сферической ( $\mu = 2, \nu = -2$ ) симметрий.

Приведем формулы точного решения для произвольных показателей степеней  $\mu, \nu$ , удовлетворяющих указанным выше неравенствам.

По постановке задачи температура, кроме уравнения (1), удовлетворяет также условию сохранения энергии

$$\int_0^\infty b x^\mu T^k dx = Q.$$

Введем следующие обозначения:

$$A = \left( \frac{Q^{2+\mu+\nu}}{a^{1+\mu} b^{1+\nu}} \right)^{\frac{1}{(1+\mu)(n+1)+(1+\nu)k}}; \quad B = \left[ \left( \frac{a}{Q} \right)^k \left( \frac{Q}{b} \right)^{n+1} \right]^{\frac{1}{(1+\mu)(n+1)+(1+\nu)k}}; \quad (2)$$

$$q = \frac{-(1+\mu)}{(1+\mu)(n+1) + (1+\nu)k}; \quad \delta = \frac{k}{(1+\mu)(n+1) + (1+\nu)k}.$$

Решение задачи зависит от параметров  $a$ ,  $b$ ,  $Q$  и, очевидно, является автомодельным, так как из определяющих параметров и независимых переменных можно составить единственную безразмерную комбинацию

$$\xi = \frac{x}{Bt^\delta}.$$

Решение можно представить в виде

$$T(x, t) = At^q f(\xi), \quad (3)$$

где функция  $f(\xi)$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{f^n}{\xi^\nu} \frac{df}{d\xi} \right) + \delta \frac{d}{d\xi} \left( \xi^{1+\mu} f^k \right) = 0$$

и условию сохранения энергии

$$\int_0^{\xi_0} \xi^\mu f^k(\xi) d\xi = 1.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение с учетом равенства нулю температуры и потока на фронте тепловой волны, получаем

$$f(\xi) = \left\{ \delta \frac{n+1-k}{2+\mu+\nu} \xi_0^{2+\mu+\nu} \left[ 1 - \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right)^{2+\mu+\nu} \right] \right\}^{\frac{1}{n+1-k}}, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0. \quad (4)$$

Из условия сохранения энергии можно найти постоянную интегрирования

$$\xi_0 = \left\{ \left[ \frac{2+\mu+\nu}{\delta(n+1-k)} \right]^k \left[ \frac{(1+\mu) \Gamma \left( 1 + \frac{1+\mu}{2+\mu+\nu} + \frac{k}{n+1-k} \right)}{\Gamma \left( 1 + \frac{1+\mu}{2+\mu+\nu} \right) \Gamma \left( 1 + \frac{k}{n+1-k} \right)} \right]^{n+1-k} \right\}^{\frac{1}{(1+\mu)(n+1)+(1+\nu)k}}, \quad (5)$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция. Постоянная интегрирования определяет положение фронта тепловой волны

$$x_\Phi = \xi_0 B t^\delta.$$

Итак, решение поставленной задачи описывается соотношениями (3), (4). При  $\mu = \nu = 0$  и  $k = 1$  оно переходит в решение классической задачи о мгновенном плоском источнике, рассмотренной в работе [1].

Структура решения в окрестности точки  $x = 0$  зависит от показателей степеней  $\mu$ ,  $\nu$ . Нетрудно проверить, что поток тепла в точке  $x = 0$  равен нулю. Производная обращается в нуль, когда  $1 + \mu + \nu > 0$ ; принимает некоторое конечное значение, отличное от нуля, если  $1 + \mu + \nu = 0$ ; обращается в бесконечность при  $1 + \mu + \nu < 0$ .

**Сопряжение решений на плоской границе раздела сред.** Пусть среда в левом полупространстве имеет теплофизические параметры  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $k_1$ ,  $n_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\nu_1$ , а в правом —  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $k_2$ ,  $n_2$ ,  $\mu_2$ ,  $\nu_2$ . Требуется определить температурное поле после мгновенного выделения энергии  $Q$  в плоскости  $x = 0$ .

Решение этой задачи легко построить с помощью решений двух вспомогательных задач о мгновенном плоском источнике. В первой задаче рассматривается левая половина геометрии исходной задачи, во второй — правая. Плоскость  $x = 0$ , в которой мгновенно выделяется энергия  $Q_i$ , где  $i$  — номер вспомогательной задачи, является теплоизолированной стенкой. Она разделяет температурное поле на не связанные друг с другом температурные поля левого и правого полупространств. Эти поля описываются точным решением, представленным в предыдущем подразделе. В формулы

точного решения подставляются теплофизические параметры  $i$ -й вспомогательной задачи, энерговыделение берется равным  $Q_i$ .

Чтобы построить точное решение основной задачи, нужно согласовать температурные поля так, чтобы на границе  $x = 0$  были непрерывны температура и тепловой поток. Непрерывность потока обеспечена автоматически, так как тепловой поток, как уже отмечалось, обращается на границе в нуль.

Для согласования температур на границе нужно прежде всего потребовать, чтобы зависимость температуры от времени слева и справа от плоскости энерговыделения была одинаковой. Это требование выполняется, когда показатели степени, в которую возводится время в формуле (3) слева и справа от границы, совпадают:

$$\frac{1 + \mu_1}{(1 + \mu_1)(n_1 + 1) + (1 + \nu_1)k_1} = \frac{1 + \mu_2}{(1 + \mu_2)(n_2 + 1) + (1 + \nu_2)k_2}. \quad (6)$$

Из условия непрерывности температуры имеем

$$\begin{aligned} & \left( \delta_1 \frac{n_1 + 1 - k_1}{2 + \mu_1 + \nu_1} \xi_{01}^{2 + \mu_1 + \nu_1} \right)^{\frac{1}{n_1 + 1 - k_1}} \left( \frac{Q_1^{2 + \mu_1 + \nu_1}}{a_1^{1 + \mu_1} b_1^{1 + \nu_1}} \right)^{\frac{1}{(1 + \mu_1)(n_1 + 1) + (1 + \nu_1)k_1}} = \\ & = \left( \delta_2 \frac{n_2 + 1 - k_2}{2 + \mu_2 + \nu_2} \xi_{02}^{2 + \mu_2 + \nu_2} \right)^{\frac{1}{n_2 + 1 - k_2}} \left( \frac{Q_2^{2 + \mu_2 + \nu_2}}{a_2^{1 + \mu_2} b_2^{1 + \nu_2}} \right)^{\frac{1}{(1 + \mu_2)(n_2 + 1) + (1 + \nu_2)k_2}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\xi_{01}$ ,  $\xi_{02}$  — константы, определяемые по формуле (5). Они характеризуют положение фронта тепловой волны соответственно в левом и правом полупространствах.

Присоединяя к соотношению (7) уравнение баланса энергии

$$Q_1 + Q_2 = Q, \quad (8)$$

получаем замкнутую систему для определения неизвестных величин  $Q_1$ ,  $Q_2$ . Нетрудно убедиться, что эта система имеет единственное положительное решение.

Таким образом, задача о мгновенном выделении энергии на плоской границе сред с разными теплофизическими параметрами имеет точное решение, если показатели степени, входящие в уравнение теплопроводности (1), удовлетворяют соотношению (6). В каждом полупространстве точное решение задачи описывается формулами (3), (4), в которых в качестве констант берутся соответствующие данному полупространству теплофизические параметры, а величина  $Q$  заменяется на энерговыделение в полупространстве. Энерговыделение в каждом полупространстве определяется из системы уравнений (7), (8).

В частном случае  $\mu_i = \nu_i = 0$ ,  $k_i = 1$  имеем  $n_i = n$ ,  $\xi_{0i} = \xi_0$ . Соотношение (7) переходит в выражение

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \sqrt{\frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}},$$

показывающее, что отношение энергий в левом и правом полупространствах равно квадратному корню из произведения отношений коэффициентов теплопроводности и коэффициентов объемных теплоемкостей. Выделившаяся в  $i$ -м полупространстве энергия находится по формуле

$$Q_i = \frac{\sqrt{a_i b_i}}{\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2}} Q, \quad i = 1, 2.$$

Отношение размеров прогретых зон слева и справа от плоскости энерговыделения в этом частном случае не зависит от времени и определяется соотношением

$$\frac{x_{\Phi}^{(1)}}{x_{\Phi}^{(2)}} = \sqrt{\frac{a_1}{a_2} \frac{b_2}{b_1}}.$$

## 2. Задача об объемном источнике

**Распространение тепла при степенном температурном режиме на границе.** Рассмотрим в полупространстве уравнение нелинейной теплопроводности с объемным источником, мощность которого является однородной функцией температуры:

$$\frac{\partial}{\partial t} (bx^\mu T^k) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{a}{x^\nu} T^n \frac{\partial T}{\partial x} \right) + F(x, t, T). \quad (9)$$

В начальный момент времени температура равна нулю:

$$T(x, 0) = 0, \quad x > 0.$$

На левой границе задан закон изменения температуры:

$$T(0, t) = T_0 t^q.$$

Решение данной задачи зависит от размерных параметров  $T_0$ ,  $a$ ,  $b$  и от размерных констант, входящих в функцию источника. Выберем эту функцию так, чтобы решение рассматриваемой задачи было автомодельным и представлялось в конечной замкнутой форме.

Анализ условий автомодельности задачи и структуры обыкновенного дифференциального уравнения, которому удовлетворяет безразмерная функция автомодельной переменной, показывает, что функцию источника можно взять в виде

$$F(x, t, T) = sb \frac{x^\mu}{t} T^k, \quad (10)$$

где

$$s = \frac{1 + \mu + q \left[ (1 + \mu)(n + 1) + (1 + \nu)k \right]}{2 + \mu + \nu}.$$

Действительно, очевидно, что задача без источника автомодельна. Включение в уравнение теплопроводности указанной функции источника не приводит к появлению дополнительных размерных констант и, следовательно, не нарушает условий автомодельности задачи.

В качестве независимой переменной возьмем безразмерную комбинацию

$$\xi = \frac{1}{\left( \frac{a}{b} T_0^{n+1-k} \right)^{\frac{1}{2+\mu+\nu}}} \frac{x}{t^\delta}, \quad \delta = \frac{1 + q(n + 1 - k)}{2 + \mu + \nu}$$

и будем искать автомодельное решение в виде

$$T(x, t) = T_0 t^q f(\xi), \quad (11)$$

где безразмерная функция  $f(\xi)$  удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{f^n}{\xi^\nu} \frac{df}{d\xi} \right) + \delta \frac{d}{d\xi} (\xi^{1+\mu} f^k) &= 0; \\ f(0) = 1; \quad f(\xi_0) = 0; \quad \left. \frac{f^n}{\xi^\nu} \frac{df}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_0} &= 0. \end{aligned}$$

Если показатели степени  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $n$ ,  $k$  удовлетворяют указанным в первом разделе неравенствам, решение данной краевой задачи существует и имеет вид

$$f(\xi) = \left[ 1 - \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right)^{2+\mu+\nu} \right]^{\frac{1}{n+1-k}} \quad \text{при } 0 \leq \xi \leq \xi_0,$$

где

$$\xi_0 = \left[ \frac{2 + \mu + \nu}{(n + 1 - k)\delta} \right]^{\frac{1}{2 + \mu + \nu}}.$$

Эта константа определяет положение фронта тепловой волны

$$x_\Phi = \xi_0 \left( \frac{a}{b} T_0^{n+1-k} \right)^{\frac{1}{2 + \mu + \nu}} t^\delta.$$

Итак, решение уравнения (9) с функцией источника (10) при заданной температуре на границе представимо в конечной замкнутой форме (11). Энергия находится по формуле

$$\int_0^{x_\Phi} b x^\mu T^k dx = Q t^s,$$

где

$$Q = \frac{1}{1 + \mu} b T_0^k \left[ \frac{2 + \mu + \nu}{(n + 1 - k)\delta} \frac{a}{b} T_0^{n+1-k} \right]^{\frac{1 + \mu}{2 + \mu + \nu}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1 + \mu}{2 + \mu + \nu}\right) \Gamma\left(1 + \frac{k}{n + 1 - k}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1 + \mu}{2 + \mu + \nu} + \frac{k}{n + 1 - k}\right)}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть  $\mu = w$ ,  $\nu = -w$ . Предположим, что объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности не содержат явной зависимости от координаты. Тогда уравнение (9) описывает распространение тепла для плоской, цилиндрической и сферической симметрий соответственно при  $w = 0, 1, 2$ .

Точное решение находится по формулам

$$T(x, t) = T_0 t^q \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_\Phi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{n+1-k}}, \quad x_\Phi = \left[ \frac{2}{(n + 1 - k)\delta} \frac{a}{b} T_0^{n+1-k} \right]^{0,5} t^\delta, \quad \delta = \frac{1 + q(n + 1 - k)}{2}.$$

Константа, входящая в функцию источника, равна

$$s = \frac{1}{2} \left\{ 1 + w + q \left[ (1 + w)(n + 1) + (1 - w)k \right] \right\}.$$

2. Пусть  $q = 0$ , т. е. на левой границе поддерживается постоянная температура. В этом случае расчетные формулы упрощаются, особенно при дополнительном условии  $\mu = w$ ,  $\nu = -w$ .
3. Пусть  $s = 0$  (отсутствует источник). Этот случай реализуется, когда на границе задан температурный режим

$$q = - \frac{1 + \mu}{(1 + \mu)(n + 1) + (1 + \nu)k}.$$

Нетрудно убедиться, что в такой постановке задача эквивалентна задаче о мгновенном плоском источнике, рассмотренной в первом разделе.

Таким образом, постановка задачи о тепловом источнике, действующем в прогретой области, включает в себя как частный случай постановку задачи о мгновенном плоском источнике.

**Задача об объемном источнике в неограниченном пространстве.** Связь между задачами о сосредоточенном и объемном источниках становится еще очевиднее, если сформулировать последнюю в другой, эквивалентной форме, что всегда можно сделать, так как в задаче об объемном источнике поток в точке  $x = 0$  равен нулю. Это означает, что с момента времени  $t > 0$ , когда уже

произошло *зажигание* топлива, т. е. включился тепловой источник, задавать температуру на границе совершенно не обязательно. Она автоматически будет поддерживаться на требуемом уровне за счет действия источника.

Рассмотрим задачу об объемном источнике в неограниченном пространстве. Распространение тепла описывается уравнением (9), в которое введен источник вида (10). Будем предполагать, что константа  $Q$  в законе возрастания энергии

$$\int_0^{\infty} b x^{\mu} T^k dx = Q t^s,$$

соответствующем заданному источнику, известна и что источник включается в начальный момент времени в точке  $x = 0$ .

В силу симметрии относительно плоскости  $x = 0$  интегрирование производится по полупространству. В задачах с плоской симметрией интеграл дает половину энергии прогретой области.

Решение данной задачи автомодельное. Оно зависит от параметров  $a, b, Q$ , строится по той же схеме, что и в первом разделе, и совпадает с формулами (3), (4), в которых вместо констант (2) следует взять величины

$$q = \frac{(2 + \mu + \nu) s - (1 + \mu)}{(1 + \mu)(n + 1) + (1 + \nu)k}, \quad \delta = \frac{k + (n + 1 - k) s}{(1 + \mu)(n + 1) + (1 + \nu)k}. \quad (12)$$

Легко проверить, что данное решение совпадает с решением (11), если в качестве констант взять величины (5), (12) и положить

$$T_0 = \left( \delta \frac{n + 1 - k}{2 + \mu + \nu} \xi_0^{2 + \mu + \nu} \right)^{\frac{1}{n + 1 - k}} A.$$

Рассмотрим теперь задачу об объемном источнике в случае, когда левое и правое полупространства имеют разные теплофизические параметры.

Будем считать, что имеет место энергетическое соотношение

$$\int_{-\infty}^0 b_1 |x|^{\mu_1} T^{k_1} dx + \int_0^{\infty} b_2 x^{\mu_2} T^{k_2} dx = Q t^s, \quad s \geq 0. \quad (13)$$

Построим в каждом полупространстве точное решение, взяв в качестве энергетических констант пока неизвестные величины  $Q_i$ :

$$\int_0^{\infty} b_i x^{\mu_i} T^{k_i} dx = Q_i t^s, \quad i = 1, 2.$$

Из условия непрерывности температуры в точке  $x = 0$  и соотношения (13) следуют уравнения (7), (8) и правило согласования показателей степени, гарантирующее существование составного автомодельного решения:

$$\frac{(2 + \mu_1 + \nu_1) s - (1 + \mu_1)}{(1 + \mu_1)(n_1 + 1) + (1 + \nu_1)k_1} = \frac{(2 + \mu_2 + \nu_2) s - (1 + \mu_2)}{(1 + \mu_2)(n_2 + 1) + (1 + \nu_2)k_2}.$$

Уравнения (7), (8) образуют систему для определения энергетических констант. Эта система имеет единственное положительное решение.

Рассмотрим теперь общий случай. Предположим, что выполняются следующие энергетические соотношения:

$$\int_{-\infty}^0 b_1 |x|^{\mu_1} T^{k_1} dx = Q_1 t^{s_1}, \quad s_1 \geq 0; \quad \int_0^{\infty} b_2 x^{\mu_2} T^{k_2} dx = Q_2 t^{s_2}, \quad s_2 \geq 0.$$

Тогда решение в каждом полупространстве описывается формулами (3), (4). Решение существует, если выполняется равенство (7) и показатели степени удовлетворяют соотношению

$$\frac{(2 + \mu_1 + \nu_1) s_1 - (1 + \mu_1)}{(1 + \mu_1)(n_1 + 1) + (1 + \nu_1)k_1} = \frac{(2 + \mu_2 + \nu_2) s_2 - (1 + \mu_2)}{(1 + \mu_2)(n_2 + 1) + (1 + \nu_2)k_2}.$$

**Учет плотности энергии излучения в задаче о тепловом источнике.** Рассмотрим уравнение теплопроводности с учетом плотности энергии излучения в случаях плоской, цилиндрической и сферической симметрий:

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{x^w} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^w a T^n \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1+w}{2} \rho \frac{E}{t}, \quad x \geq 0, \quad w = 0, 1, 2; \quad E = c_V T^k + \frac{\sigma T^4}{\rho}.$$

Уравнение содержит размерные константы, из которых можно образовать комбинацию с размерностью температуры, а вместе с независимыми переменными и безразмерную комбинацию. Поэтому для автономности решения нужно потребовать, чтобы при задании начальных данных и граничного условия не появлялись константы с независимыми размерностями.

Пусть в начальный момент времени температура равна нулю, а на границе  $x = 0$  задана температура  $T_0 = \left( \frac{\rho c_V}{\sigma} \right)^{\frac{1}{4-k}}$ . Введем автономную переменную  $\xi = \frac{x}{Bt^{0,5}}$ , где  $B = \left[ \frac{a}{\rho c_V} \left( \frac{\rho c_V}{\sigma} \right)^{\frac{n+1-k}{4-k}} \right]^{0,5}$ , и будем искать решение задачи в виде

$$T(x, t) = T_0 f(\xi).$$

После подстановки этого выражения в исходное уравнение получаем для определения функции  $f(\xi)$  обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\xi} \left( \xi^w f^n \frac{df}{d\xi} \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^{w+1} (f^k + f^4) \right) = 0$$

с краевыми условиями

$$f(0) = 1; \quad f|_{\xi=\xi_0} = 0; \quad \xi^w f^n \frac{df}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} = 0.$$

Однократное интегрирование с учетом условий на фронте тепловой волны приводит к уравнению

$$\frac{f^{n-k} df}{1 + f^{4-k}} + \frac{1}{4} d(\xi^2) = 0.$$

Оно легко интегрируется. Простые выражения получаются, например, в следующих случаях:

1.  $n = 3$ .

$$T(x, t) = T_0 \left\{ \exp \left( \ln 2 \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_\Phi} \right)^2 \right] \right) - 1 \right\}^{\frac{1}{4-k}}, \quad x_\Phi = \left( \frac{4}{4-k} \ln 2 \right)^{0,5} Bt^{0,5}. \quad (14)$$

2.  $n = 6; \quad k = 1$ .

$$T(x, t) = T_0 f \left( \frac{x}{x_\Phi} \right), \quad 0 \leq x \leq x_\Phi, \quad x_\Phi = \left( 4 \frac{1 - \ln 2}{3} \right)^{0,5} Bt^{0,5}.$$

3.  $n = 9; \quad k = 1$ .

$$T(x, t) = T_0 f \left( \frac{x}{x_\Phi} \right), \quad 0 \leq x \leq x_\Phi, \quad x_\Phi = \left( 2 \frac{2 \ln 2 - 1}{3} \right)^{0,5} Bt^{0,5}. \quad (15)$$



Значения функций  $f\left(\frac{x}{x_\Phi}\right)$  в случаях 2, 3 находятся соответственно из нелинейных уравнений

$$f^3 - \ln(1 + f^3) = (1 - \ln 2) \left[ 1 - \left(\frac{x}{x_\Phi}\right)^2 \right];$$

$$f^6 - 2f^3 + 2 \ln(f^3 + 1) = (2 \ln 2 - 1) \left[ 1 - \left(\frac{x}{x_\Phi}\right)^2 \right].$$

Закон выделения энергии с точностью до множителя, зависящего от типа симметрии, описывается формулой

$$J = \sigma T_0^4 (\xi_0 B)^{1+w} Q_n^w t^{\frac{1+w}{2}}, \quad Q_n^w = \int_0^1 (f(z) + f^4(z)) z^w dz.$$

Индекс  $w$  указывает тип симметрии; индекс  $n$  совпадает со значением показателя степени температуры (3, 6, 9) в коэффициенте теплопроводности. Значения интегралов приведены в таблице.

**Значения константы  $Q_n^\omega$  для разных коэффициентов теплопроводности**

Показатель степени	Тип симметрии		
	0	1	2
3	1,37573	0,54101	0,30418
6	1,60673	0,69833	0,42095
9	1,71405	0,77610	0,48216

### 3. Примеры модельных задач

**Мгновенный плоский источник. Теплоемкость зависит от температуры.** Уравнения:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T^2 \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad -2 \leq x < 0;$$

$$\frac{\partial T^{1,5}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{75}{16} T^{1,5} \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad 0 < x \leq 5.$$

Расчетная область:  $-2 \leq x \leq 5$ .

В момент времени  $t = 0$  в плоскости  $x = 0$  выделяется энергия  $Q = 1,4375\pi$ . Закон распространения тепловых волн:  $x_\Phi^{(1)} = -2t^{0,25}$ ;  $x_\Phi^{(2)} = 5t^{0,375}$ . В качестве начальных данных берется распределение температуры в момент времени  $t = 0,00065536$  ( $-0,32 \leq x \leq 0,32$ ).

Задача решается до момента времени  $t = 1$ . Решение описывается формулой

$$T(x, t) = t^{-0,25} f\left(\frac{x}{x_\Phi}\right), \quad f\left(\frac{x}{x_\Phi}\right) = \begin{cases} \left[ 1 - \left(\frac{x}{x_\Phi^{(1)}}\right)^2 \right]^{0,5}, & x_\Phi^{(1)} \leq x \leq 0, \\ 1 - \left(\frac{x}{x_\Phi^{(2)}}\right)^2, & 0 < x \leq x_\Phi^{(2)}. \end{cases}$$

Распределение энергии по областям:  $Q_1 = 0,5\pi$ ;  $Q_2 = 0,9375\pi$ .

**Объемный источник. Плоская, цилиндрическая и сферическая геометрии.** Уравнение:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{x^w} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^w T^4 \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1+w}{2} \frac{T}{t}, \quad x > 0, \quad w = 0, 1, 2.$$

Решение ищется в области  $0 \leq x \leq 10$ .

Возможны две идентичные постановки задачи. В первой постановке на левой границе расчетной области поддерживается постоянная температура, равная единице. В качестве начальных данных задается нулевой профиль температуры. Во второй постановке задачи на левой границе задается нулевой поток тепла. Горение инициируется заданием на участке  $[0; 0,1]$  отличного от нуля профиля температуры, который берется на момент времени  $t = 0,01$  из формулы точного решения. Закон распространения тепловой волны:  $x_\phi = \sqrt{t}$ .

Задача решается до момента времени  $t = 100$ . Точное решение описывается формулой

$$T(x, t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{t}\right)^{0,25} & \text{при } x \leq \sqrt{t}; \\ 0 & \text{при } x > \sqrt{t}. \end{cases}$$

Энергия системы изменяется с течением времени по закону  $J = Qt^{\frac{1+w}{2}}$ . Для плоской геометрии  $Q = 0,87402$ . В случае цилиндрической симметрии  $Q = 0,4$ , сферической —  $Q = 0,24972$ . Заметим, что в случае цилиндрической (сферической) геометрии энергия приведена на один радиан (стерадиан).

**Объемный источник. Две области. Плоская геометрия.** Уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( 2T^8 \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{T}{t}, & -1 \leq x < 0; \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( T^4 \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{T}{t}, & 0 < x \leq 1. \end{aligned}$$

Расчетная область:  $-1 \leq x \leq 1$ .

Горение инициируется путем задания в момент времени  $t = 0,01$  ( $-0,1 \leq x \leq 0,1$ ) отличного от нуля профиля температуры, взятого в соответствии с формулой точного решения. Тепловые волны распространяются вправо и влево с одинаковой скоростью ( $x_\phi = \pm\sqrt{t}$ ).

Задача решается до момента времени  $t = 1$ . Точное решение описывается формулой

$$T(x, t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{t}\right)^{0,125} & \text{при } -\sqrt{t} \leq x \leq 0; \\ \left(1 - \frac{x^2}{t}\right)^{0,25} & \text{при } 0 \leq x \leq \sqrt{t}; \\ 0 & \text{при } x < -\sqrt{t} \text{ и } x > \sqrt{t}. \end{cases}$$

Энергия в системе выделяется по закону  $J = Q\sqrt{t}$ ,  $Q = Q_1 + Q_2$ . В первой области  $Q_1 = 0,93088$ , во второй —  $Q_2 = 0,87402$ .

**Объемный источник. Теплоемкость зависит от температуры.** Уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( 2T^4 \frac{\partial T}{\partial x} \right) + 1,25 \frac{T}{t}, & -1 \leq x < 0; \\ \frac{\partial T^{1,5}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( 2T^{4,5} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + 1,375 \frac{T^{1,5}}{t}, & 0 < x \leq 1. \end{aligned}$$

Расчетная область:  $-1 \leq x \leq 1$ .

В качестве начальных данных берется распределение температуры из точного решения на момент времени  $t = 0,1$  ( $-0,1 \leq x \leq 0,1$ ). Тепловые волны распространяются влево и вправо с постоянной скоростью, равной единице.

Задача решается до момента времени  $t = 1$ . Точное решение описывается формулой

$$T(x, t) = t^{0,25} f\left(\frac{x}{t}\right),$$

где

$$f\left(\frac{x}{t}\right) = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{x}{t}\right)^2\right]^{0,25} & \text{при } -t \leq x \leq t; \\ 0 & \text{при } x < -t \text{ и } x > t. \end{cases}$$

В левом полупространстве выделяется энергия  $J_1 = 0,87402 t^{1,25}$ , в правом —  $J_2 = 0,82624 t^{1,375}$ .

**Объемный источник. Идеальный газ с излучением.** Уравнение:

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\ell c}{3} \frac{\partial \sigma T^4}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \rho \frac{E}{t}, \quad E = c_V T + \frac{\sigma T^4}{\rho}, \quad \ell = \ell_0 T^\alpha, \quad \sigma = 1,37, \quad c = 3000.$$

Расчетная область:  $-1,1 \leq x \leq 1,1$ .

Слева от точки  $x = 0$  плотность равна 0,1, справа — 10. Параметры уравнения состояния и пробега излучения:  $c_V = 13,7$ ,  $\ell_0 = 2,70505 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha = 0$  при  $x < 0$  и  $c_V = 0,137$ ,  $\ell_0 = 9,70762 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha = 6$  при  $x > 0$ .

В начальный момент времени ( $t_0 = 0,0004$ ) температура равна 0,85107 в интервале  $-0,02 < x < 0$  и 0,93845 при  $0 < x < 0,02$ ; в остальных точках температура равна нулю. Тепловые волны распространяются вправо и влево с одинаковой скоростью ( $x_\Phi = \pm \sqrt{t}$ ).

Задача решается до момента времени  $t = 1$ . Точное решение описывается формулами (14) ( $n = 3$ ) и (15) ( $n = 9$ ) соответственно слева и справа от точки  $x = 0$ .

В левом полупространстве выделяется энергия  $J_1 = 1,88475 t^{0,5}$ , в правом —  $J_2 = 2,34825 t^{0,5}$ .

Заметим, что в данной задаче в качестве начальных данных берутся средние значения температур, соответствующие величине энергии, поступившей в систему к моменту времени  $t_0$ . Аналогичным образом можно поступить и в предыдущих задачах, уменьшив начальный момент времени. Например, в первой задаче удобно взять  $t_0 = 10^{-8}$  или  $t_0 = 2,56 \cdot 10^{-6}$ , во второй и третьей задачах —  $t_0 = 10^{-4}$ , в четвертой задаче —  $t_0 = 10^{-2}$ .

### Список литературы

1. Зельдович Я. Б., Компанеев А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный 70-летию академика А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 61–67.
2. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 67–78.
3. Полянин А. Д., Вязьмин А. В., Журов А. И., Казенин Д. А. Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса. М.: Факториал, 1998.

Статья поступила в редакцию 19.10.09.