

УДК 517.958:536.2

## МЕТОДЫ ВЫДЕЛЕНИЯ ДИАГОНАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ДЛЯ УСКОРЕНИЯ ИТЕРАЦИЙ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ДИФФУЗИОННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

А. Д. Гаджиев, А. А. Шестаков

(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Рассматриваются численные методы выделения диагонального элемента для ускорения итераций при решении уравнения переноса теплового излучения в диффузионных приближениях. Получены теоретические оценки скорости сходимости итераций этих методов. Основная идея методов заключается в выделении искомой функции в центрах ячеек при сохранении в соседних ячейках значений величин, полученных на предыдущей итерации.

*Ключевые слова:* ускорение итераций, перенос теплового излучения.

### Введение

Система уравнений переноса излучения и уравнения энергии представляет собой сложную нелинейную интегродифференциальную систему, зависящую в общем случае от семи независимых переменных. Поэтому ее часто решают в более простых диффузионных приближениях [1–3]. В  $P_1$ - и квазидиффузионном приближениях это приводит к гиперболической системе уравнений относительно нулевого и первого моментов в разложении интенсивности излучения по сферическим функциям, в диффузионном приближении — к параболической системе уравнений. Если пренебречь временной производной от потока излучения, как в работе [3], то гиперболическая система также перейдет в параболическую систему. В параболическом случае, исключая поток, можно получить одно уравнение относительно плотности излучения.

Классические методы, используемые для решения задач диффузии, ориентированы на трехточечные разностные схемы для параболического уравнения. Если в трехточечной схеме аналогично итерациям Якоби использовать способ выделения искомой функции в центре ячейки из диффузионного члена, оставляя значения величин в соседних ячейках с предыдущей итерации, то можно выразить плотность излучения через функцию Планка в той же точке. Получая явным образом выражения для плотности излучения в центрах ячеек, подставляем их в уравнение энергии и разрешаем это уравнение относительно температуры. Используя полученную температуру, исходную систему можно решить либо прогонкой в одномерном случае, либо итерационными методами в двумерном случае. Такой метод итераций был предложен в работах [4, 5] и в дальнейшем получил название метода выделения диагональных элементов (ВДЭ). Отличие метода ВДЭ от классического метода Якоби заключается в том, что выделение диагонального члена происходит не в полной совместной системе уравнений диффузии и энергии, которую необходимо решить, а только в диффузионных уравнениях.

В двухточечных схемах типа схемы РОМБ [6] для применения такого подхода приходится переходить к эквивалентной трехточечной форме [7–10]. Однако в многомерном случае привести двухточечные схемы к трехточечной форме не всегда удастся, поэтому был предложен метод выделения

диагональной матрицы (ВДМ) [11], в котором предлагается для системы  $P_1$ -уравнений использовать комбинацию плотности и потока излучения с предыдущей итерации на границах счетных ячеек. В качестве комбинации предлагается использовать либо односторонние потоки, либо инварианты Римана, либо счетные псевдоинварианты схемы РОМБ.

В данной работе метод ВДМ обобщается на случай диффузионных и квазидиффузионных уравнений. Рассматривается его применение к двухточечным схемам РОМБ [6, 11] и TVD [12, 13]. Получены теоретические оценки скорости сходимости итераций методов ВДЭ и ВДМ.

Ранее для решения системы квазидиффузионных уравнений по схеме РОМБ использовался метод  $P_1$ -поправок [14], где система поправочных уравнений решалась методом ВДЭ.

### Одномерный случай

**Постановка задачи.** Изложение методов ВДЭ и ВДМ сначала рассмотрим для одномерного случая. Одномерная система переноса лучистой энергии в многогрупповом квазидиффузионном приближении имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial U_g}{\partial t} + \frac{\partial (r^\sigma S_g)}{r^\sigma \partial r} + \alpha_{cg} U_g &= \alpha_{cg} B_g; \\ \frac{\beta}{c} \frac{\partial S_g}{\partial t} + \frac{\partial (D_g U_g)}{\partial r} + \alpha_g S_g + d_g U_g &= 0; \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \sum_{g=1}^G \alpha_{cg} (U_g - B_g) w_g. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $t$  — время;  $r$  — координата;  $U_g = \int_{-1}^1 J_g d\mu$  — плотность излучения группы  $g$  ( $g = \overline{1, G}$ ), умножен-

ная на скорость света  $c$ ;  $S_g = \int_{-1}^1 \mu J_g d\mu$  — поток излучения группы  $g$ ;  $J_g$  — интенсивность излучения

группы  $g$ ;  $\mu$  — косинус угла между направлением полета фотона и осью  $r$ ;  $B_g$  — функция Планка;  $\alpha_{cg}$  — коэффициент поглощения фотонов;  $\alpha_{sg}$  — коэффициент рассеяния фотонов;  $\alpha_g$  — коэффициент ослабления,  $\alpha_g = \alpha_{cg} + \alpha_{sg}$ ;  $E$  — внутренняя энергия вещества;  $w_g$  — вес квадратуры;  $\sigma$  — параметр геометрии:  $\sigma = 0$  — плоская геометрия ( $d_g = 0$ );  $\sigma = 1$  — цилиндрически-симметричная геометрия;  $\sigma = 2$  — сферически-симметричная геометрия;

$\beta = 1$ ;  $D_g = \frac{1}{U_g} \int_{-1}^1 \mu^2 J_g d\mu$ ;  $d_g = \frac{3D_g - 1}{r}$  — квазидиффузионное приближение [1];

$\beta = 1$ ;  $D_g = 1/3$ ;  $d_g = 0$  —  $P_1$ -приближение;

$\beta = 0$ ;  $D_g = \frac{1}{U_g} \int_{-1}^1 \mu^2 J_g d\mu$ ;  $d_g = \frac{3D_g - 1}{r}$  — псевдодиффузионное приближение [3];

$\beta = 0$ ;  $D_g = 1/3$ ;  $d_g = 0$  — диффузионное приближение.

Граничные условия имеют вид:

$$\alpha_{0,g} U_g + \beta_{0,g} S_g = \varphi_{0,g}; \quad \alpha_{1,g} U_g + \beta_{1,g} S_g = \varphi_{1,g},$$

где  $\alpha_{0,g}$ ,  $\beta_{0,g}$ ,  $\varphi_{0,g}$ ,  $\alpha_{1,g}$ ,  $\beta_{1,g}$ ,  $\varphi_{1,g}$  — параметры для задания граничных условий.

**Разностная аппроксимация.** Введем разностную сетку по пространственной ( $i = 1, \dots, \hat{i}$ ) и временной ( $n$ ) переменным, тогда система разностных уравнений примет вид (для упрощения записи

здесь опущены индексы  $i + 1/2, g$ )

$$\begin{aligned} qU^{n+1} + \frac{\Delta_i (r^\eta S^{n+1})}{V} &= \frac{1}{c\tau} U^n + \alpha_c B^{n+1}; \\ q_2 S^{n+1} + \frac{\Delta_i (DU^{n+1})}{h} + (dU)^{n+1} &= \frac{\beta}{c\tau} S^n, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\tau = t^{n+1} - t^n$ ;  $h_{i+1/2} = r_{i+1} - r_i$ ;  $V_{i+1/2} = \frac{r_{i+1}^{\eta+1} - r_i^{\eta+1}}{\eta + 1}$ ;  $\Delta_i(\bullet) = (\bullet)_{i+1} - (\bullet)_i$ ;  $q = \frac{1}{c\tau} + \alpha_c$ ;  
 $q_2 = \frac{\beta}{c\tau} + \alpha_c + \alpha_s$ .

Систему разностных уравнений (2) дополняем соотношениями схемы РОМБ [11], связывающими  $U$  и  $S$  с целыми и полуцелыми индексами:

$$U_{i+1/2} = \frac{U_{i+1} + U_i}{2} + \delta_{i+1/2} \Delta_i S; \quad S_{i+1/2} = \frac{S_{i+1} + S_i}{2} + \theta_{i+1/2} \Delta_i U, \quad (3)$$

где  $\delta = \frac{1}{4m}$ ;  $m = \theta + \frac{D}{q_2 h}$ ;  $\theta = \frac{h}{15(1+5k)} \Lambda(D/q_2)$ ;  $k = \frac{\sqrt{D}}{h\sqrt{qq_2}}$ ;  $\Lambda(q_{i+1/2}) = \frac{q_{i-1/2} - 2q_{i+1/2} + q_{i+3/2}}{h_{i+1/2}^2}$ ,

либо соотношениями схемы TVD

$$\begin{aligned} U_{i+1/2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{U_i}{a_-} + \frac{U_{i+1}}{a_+} \right) + \frac{1}{2\sqrt{D_{i+1/2}}} \left( \frac{S_{i+1}}{a_+} - \frac{S_i}{a_-} \right); \\ S_{i+1/2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{S_i}{a_-} + \frac{S_{i+1}}{a_+} \right) + \frac{\sqrt{D_{i+1/2}}}{2} \left( \frac{U_{i+1}}{a_+} - \frac{U_i}{a_-} \right). \end{aligned}$$

Коэффициенты  $a_{\pm}$  приведены в работах [12, 13].

Подставляя соотношения связи схемы TVD или (3) в систему (2), получаем уравнения

$$\begin{aligned} a_i^0 U_i + b_i^0 U_{i+1} + c_i^0 S_i + d_i^0 S_{i+1} &= f_{i+1/2}^0; \\ a_i^1 U_i + b_i^1 U_{i+1} + c_i^1 S_i + d_i^1 S_{i+1} &= f_{i+1/2}^1, \end{aligned} \quad (4)$$

которые решаются методом потоковой прогонки. Коэффициенты  $a, b, c, d, f$  для обеих схем и формулы прогонки приведены в работах [11–13].

**Метод ВДЭ.** Методы ВДЭ, используемые для решения задач спектральной диффузии, ориентированы на трехточечные разностные схемы с диагональным преобладанием, а схема РОМБ, используемая в работе [6], представляет собой двухточечную схему. Формально применить метод ВДЭ к двухточечным схемам не удастся. Проблема применения методов ВДЭ к двухточечным схемам диффузии излучения впервые рассмотрена в работе [7], где предложено применять метод ВДЭ к двухточечной схеме РОМБ, записанной в эквивалентной трехточечной форме.

Если для применения метода ВДЭ перейти от системы (2), (3) к эквивалентной трехточечной форме относительно плотности  $U$  в рамках одного счетного интервала (рис. 1), то получим разностное уравнение вида

$$-\frac{P_{i+1/2}}{2} U_i^{n+1} + (q_{i+1/2} + P_{i+1/2}) U_{i+1/2}^{n+1} - \frac{P_{i+1/2}}{2} U_{i+1}^{n+1} = \frac{1}{c\tau} U_{i+1/2}^n + (\alpha_c B^{n+1})_{i+1/2}, \quad (5)$$

где  $P = 1/(\delta h)$ . На рис. 1 и последующих рисунках звездочками отмечены точки, в которых находятся искомые функции.

Организуя вычислительный процесс по методу ВДЭ, выделяем диагональное значение плотности  $U_{i+1/2}$  в точке  $i + 1/2$  на искомой итерации аналогично работам [4, 5] и подставляем его в линеаризованное уравнение энергии из системы (1), оставляя остальные значения величины  $U$  с предыдущей итерации. Тогда для схемы (5) получаем явную формулу определения температуры.

К достоинствам этого варианта метода ВДЭ можно отнести то, что он позволяет оставаться в рамках одной ячейки разностной сетки, не нарушая идеологию схемы РОМБ. К недостаткам можно отнести то, что по скорости сходимости этот вариант проигрывает классическим вариантам для трехточечных схем [4, 5].

Второй вариант метода ВДЭ для схемы РОМБ также рассматривается в работе [7]. Эквивалентная трехточечная форма расписывается относительно плотности  $U$  в рамках трех счетных интервалов (рис. 2):

$$\begin{aligned} -(\overline{A}U)_{i-1/2}^{n+1} + \left[ \left( \overline{D} + \frac{qh}{2} \right) U \right]_{i+1/2}^{n+1} - (\overline{C}U)_{i+3/2}^{n+1} = \\ = (A'B)_{i-1/2}^{n+1} + \left[ \left( \frac{\alpha_c h}{2} - D' \right) B \right]_{i+1/2}^{n+1} + (C'B)_{i+3/2}^{n+1} + R_{i+1/2}^n, \end{aligned} \quad (6)$$

где коэффициенты  $\overline{A}$ ,  $\overline{D}$ ,  $\overline{C}$ ,  $A'$ ,  $D'$ ,  $C'$ ,  $R$  приведены в работе [7].

Заметим, что в трехточечном аналоге схемы РОМБ (6) для одномерного случая участвует не только плотность излучения  $U$  в трех точках, но и функция Планка в тех же точках. Для классических трехточечных схем функция Планка берется только в центральной точке. Следует заметить, что схема (6) является полностью исключенной относительно  $U$  только в диффузионном приближении при  $\beta = 0$ . В  $P_1$ -приближении полностью исключенную схему получить не удастся. Однако это не влияет на организацию итерационного процесса, так как неисключенные члены (поток излучения) в формуле для  $R$  берутся с предыдущего шага.

Выделяя диагональное значение плотности в (6), из линеаризованного уравнения энергии в общем случае получаем трехточечную систему для температуры:

$$-\left(a^k T^{k+1}\right)_{i-1/2} + \left(b^k T^{k+1}\right)_{i+1/2} - \left(d^k T^{k+1}\right)_{i+3/2} = f_{i+1/2}^k, \quad (7)$$

которую решаем прогонкой. Коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $f$  приведены в работе [7]. При выборе параметра  $\delta$  по формуле  $\delta = 1/(4m)$  коэффициенты  $a$ ,  $d$  зануляются и из уравнения (7) получается явная формула для температуры. В этом случае решение уравнения энергии упрощается.

Коэффициенты при внедиагональных членах  $U_{i-1/2}^\nu$ ,  $U_{i+3/2}^\nu$  в схеме (6) меньше коэффициентов в схеме (5). Это и обеспечивает более быструю сходимость схемы (6).

К достоинствам этого варианта можно отнести то, что по скорости сходимости он сравним с классическими методами [4, 5]. К недостаткам можно отнести то, что исключенная схема, в отличие от исходной, не остается в рамках одной ячейки разностной сетки, функция Планка берется не только в центральной точке, но и в соседних, и схема является полностью исключенной относительно  $U$  только в диффузионном приближении при  $\beta = 0$ .

Если параметр  $\delta$  выбирать по формуле  $\delta = \frac{1}{4m} - \frac{1}{qh}$ , то в исключенной схеме (6) зануляются внедиагональные коэффициенты  $A$  и  $C$ . В этом случае вместо итерационного алгоритма в методе ВДЭ получается явная формула для вычисления плотности излучения в каждой точке. Подставляя ее в линеаризованное уравнение энергии, получаем явную формулу для нахождения температуры. Однако такой метод хорош только в оптически-плотных средах, так как в оптически-прозрачных средах при  $\alpha \rightarrow 0$  может нарушаться условие положительности параметра  $\delta$ , что приводит к неустойчивости вычислительного алгоритма.

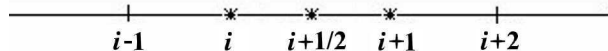


Рис. 1. Разностный шаблон для схемы (5)

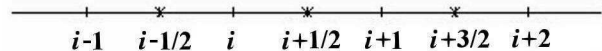


Рис. 2. Разностный шаблон для схемы (6)

Третий вариант метода ВДЭ для схемы РОМБ рассматривается в работе [10]. При выборе параметра  $\delta$  по формуле  $\delta = 1/(4m)$  коэффициенты  $A'$ ,  $C'$  в уравнении (6) обращаются в нуль и уравнение можно записать в эквивалентной трехточечной форме относительно плотности  $U$  в рамках пяти счетных интервалов (рис. 3):

$$\begin{aligned} -(\overline{A}U)_{i-3/2}^{n+1} + \left[ \left( \overline{D} + \frac{qh}{2} \right) U \right]_{i+1/2}^{n+1} - (\overline{C}U)_{i+5/2}^{n+1} = \\ = (A''B)_{i-1/2}^{n+1} + \left[ \left( \frac{\alpha_c h}{2} - D'' \right) B \right]_{i+1/2}^{n+1} + (C''B)_{i+3/2}^{n+1} + \overline{R}_{i+1/2}^n. \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициенты  $\overline{A}$ ,  $\overline{D}$ ,  $\overline{C}$ ,  $A''$ ,  $D''$ ,  $C''$ ,  $\overline{R}$  приведены в работе [10]. Коэффициенты при внедиагональных членах  $U_{i-3/2}$ ,  $U_{i+5/2}$  в схеме (8) при  $\delta h > 1/8$  меньше коэффициентов в схеме (6). Это и обеспечивает более быструю сходимость схемы (8).

К достоинствам этого варианта можно отнести то, что по скорости сходимости он превосходит предыдущие варианты и сравним с многодиагональным методом [15]. К недостаткам можно отнести то, что расширение шаблона до пяти ячеек разностной сетки усложняет схему (например, в многомерном случае или при аппроксимации у границ) и схема является полностью исключенной относительно  $U$  только при  $\delta = 1/(4m)$ .

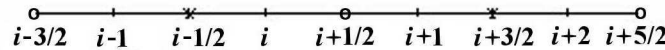


Рис. 3. Разностный шаблон для схемы (8)

**Метод ВДМ.** Метод ВДМ был предложен для схемы РОМБ в  $P_1$ -приближении в работе [11], для TVD-схемы в  $P_1$ -приближении — в работе [12], для TVD-схемы в квазидиффузионном приближении — в работе [13]. Метод был создан потому, что в общем случае для двухточечных схем не удается получить эквивалентную исключенную форму относительно плотности  $U$ . Также он позволяет оставаться в рамках одной ячейки разностной сетки без ограничений на выбор параметра  $\delta$ .

Аналогично методу ВДЭ будем обсчитывать ячейку разностной сетки независимо от соседних интервалов. В качестве граничного условия будем использовать некоторые комбинации плотности и потока излучения  $(\varphi_0)_{g,i}$ ,  $(\varphi_1)_{g,i+1}$  с предыдущей итерации на границах счетных ячеек (рис. 4).

Систему линейных уравнений (4) будем решать внутри данной ячейки методом встречной прогонки. В результате получим явную формулу для плотности излучения

$$U_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{q_{i+1/2}} \left[ \left( \alpha_c - \frac{a_{11}}{h} \right) B^{n+1} + \frac{1}{c\tau} U^n - \frac{a_{12}}{h} \right]_{i+1/2},$$

которую подставим в линеаризованное уравнение энергии и получим выражение для нахождения температуры. Коэффициенты  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  приведены в работах [11–13].

В методе ВДМ для разных приближений рассматривались следующие варианты:

1. Односторонний поток. То есть функция  $\varphi$  выбиралась в виде

$$(\varphi_0)_{g,i} = \frac{1}{4}U_{g,i} + \frac{1}{2}S_{g,i}; \quad (\varphi_1)_{g,i} = \frac{1}{4}U_{g,i} - \frac{1}{2}S_{g,i}.$$



Рис. 4. Ячейка разностной сетки

2. Инвариант Римана:

$$(\varphi_0)_{g,i} = \frac{1}{\sqrt{3}}U_{g,i} + S_{g,i}; \quad (\varphi_1)_{g,i} = \frac{1}{\sqrt{3}}U_{g,i} - S_{g,i}.$$

3. Счетный псевдоинвариант:

$$(\varphi_0)_{g,i} = (X^+U)_{g,i} + (Y^+S)_{g,i}; \quad (\varphi_1)_{g,i} = (X^-U)_{g,i} - (Y^-S)_{g,i},$$

где  $X_i^+$ ,  $Y_i^+$ ,  $X_i^-$ ,  $Y_i^-$  — прогоночные коэффициенты.

4. Квазидиффузионный инвариант:

$$(\varphi_0)_{g,i} = (\sqrt{D}U)_{g,i} + S_{g,i}; \quad (\varphi_1)_{g,i} = (\sqrt{D}U)_{g,i} - S_{g,i}.$$

Наиболее простыми являются первые два варианта. В третьем варианте обязательно должна быть реализована встречная прогонка (в первом и втором достаточно потоковой прогонки), а также необходима дополнительная оперативная память для хранения массивов  $X^+$ ,  $Y^+$ ,  $X^-$ ,  $Y^-$ ,  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$  со второго этапа для всех групп этапа, ускоряющего сходимость итераций (на котором вычисляется температура). В четвертом варианте необходимо использовать интерполяционные формулы для вычисления коэффициента квазидиффузии в узлах разностной сетки.

К достоинствам ВДМ-метода можно отнести то, что по скорости сходимости он не проигрывает классическим методам [4, 5] и варианту (6) метода ВДЭ. ВДМ-метод позволяет оставаться в рамках одной ячейки разностной сетки без ограничений на выбор параметра  $\delta$ , не нарушая идеологию двухточечных схем. Это позволяет также использовать алгоритм, при котором плотность излучения находится не прогонкой, а по явным формулам, когда появляется возможность распараллеливания счета по всем ячейкам разностной сетки.

**Метод выделения многодиагональной матрицы.** Аналогично варианту метода ВДЭ (8) можно расширить шаблон для метода ВДМ. Будем обсчитывать две или несколько ячеек разностной сетки независимо от соседних интервалов. В этом случае получается многодиагональная матрица и соответственно имеем метод *выделения многодиагональной матрицы* (ВММ). В общем случае при построении метода ВММ рассматриваются  $L + M + 1$  узлов разностной сетки (рис. 5).

Суть метода состоит в следующем. В окрестности заданной точки  $i + 1/2$  выделяется система  $L + M + 1$  уравнений ( $L$  уравнений *вперед* и  $M$  уравнений *назад*). В качестве граничного условия на левой границе ячейки в точке  $i - M$  будем рассматривать некоторую комбинацию искомого функций  $\alpha_0^\nu U_{i-M}^{\nu+1} + \beta_0^\nu S_{i-M}^{\nu+1} = \varphi_0^\nu$ , где  $\varphi_0^\nu = \alpha_0^\nu U_{i-M}^\nu + \beta_0^\nu S_{i-M}^\nu$ . В качестве граничного условия на правой границе ячейки в точке  $i + L$  будем рассматривать аналогичную комбинацию  $\alpha_1^\nu U_{i+L+1}^{\nu+1/2} - \beta_1^\nu S_{i+L+1}^{\nu+1/2} = \varphi_1^\nu$ , где  $\varphi_1^\nu = \alpha_1^\nu U_{i+L+1}^\nu - \beta_1^\nu S_{i+L+1}^\nu$ .

Далее, разрешая систему  $L + M + 1$  уравнений методом встречной прогонки, выражаем плотность излучения в точке  $i + 1/2$  через функции Планка в  $L + M + 1$  точках. Подставляя полученное выражение в уравнение энергии после линеаризации, получаем матричное уравнение для определения температуры. При  $M = 0$ ,  $L = 1$  получаем метод ВДМ. При  $M = 1$ ,  $L = 2$  матрица будет трехдиагональной. Как показывают расчеты [15], именно этот вариант обеспечивает наибольший скачок в сокращении числа итераций, если рассматривать число итераций в зависимости от параметров  $M$ ,  $L$ . При достаточно больших  $M$ ,  $L$  ( $M + L + 1 = I$ , где  $I$  — число узлов разностной сетки) рассматриваемый метод непрерывно переходит в метод Райбки [16].

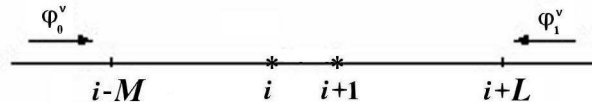


Рис. 5. Ячейка разностной сетки

**Оценка скорости сходимости итераций.** Оценим скорость сходимости итераций в простейшем случае без рассеяния при  $E = AB$ , постоянном коэффициенте поглощения, постоянном шаге по сетке  $h = \Delta r_i$  и постоянном коэффициенте квазидиффузии  $D = 1/3$ . В линейном случае вышеперечисленные исключенные схемы имеют наиболее простой вид при  $\theta = 0$ . Тогда  $m = \frac{1}{3q_2h}$ ,

$P = \frac{1}{\delta h} = \frac{4}{3q_2h^2}$  и исключенные схемы принимают следующий вид:

– для первого варианта ВДЭ

$$-\frac{2}{3q_2h^2}U_i + \left(q + \frac{4}{3q_2h^2}\right)U_{i+1/2} - \frac{2}{3q_2h^2}U_{i+1} = \frac{1}{c\tau}U_{i+1/2}^n + (\alpha_c B)_{i+1/2};$$

– для второго варианта ВДЭ

$$-\frac{1}{3q_2h^2}U_{i-1/2} + \left(q + \frac{2}{3q_2h^2}\right)U_{i+1/2} - \frac{1}{3q_2h^2}U_{i+3/2} = \frac{1}{c\tau}U_{i+1/2}^n + (\alpha_c B)_{i+1/2}$$

(как подвариант второго варианта при  $\delta = \frac{1}{4m} - \frac{1}{qh}$  можно рассмотреть явное вычисление

плотности  $qU_{i+1/2} = \frac{1}{c\tau}U_{i+1/2}^n + (\alpha_c B)_{i+1/2} + \frac{\alpha_c}{3qq_2h^2}(B_{i-1/2} - B_{i+1/2} + B_{i+3/2})$ , но в оценках скорости сходимости он не рассматривался из-за ограничения  $\frac{4}{3qq_2h^2} < 1$ );

– для третьего варианта ВДЭ

$$-\left(\frac{1}{3q_2h^2}\right)^2 U_{i-3/2} + \left[q^2 + \frac{4q}{3q_2h^2} + 2\left(\frac{1}{3q_2h^2}\right)^2\right]U_{i+1/2} - \left(\frac{1}{3q_2h^2}\right)^2 U_{i+5/2} = R_{i-1/2}^1 + R_{i+1/2}^2 + R_{i+3/2}^3.$$

Введем в рассмотрение поправки  $\Delta Z^k = Z_{i+1/2}^{n+1} - Z_{i+1/2}^k$ , где в качестве  $Z$  фигурируют искомые функции  $U$ ,  $B$ ;  $k$  – соответствующий итерационный индекс. Пусть

$$\delta B^{k+1} = \max_i \left| \Delta B_{i+1/2}^{k+1} \right|, \quad \delta U^{k+1} = \max_i \left| \Delta U_{i+1/2}^{k+1} \right|,$$

тогда с учетом принятых допущений справедливы оценки

$$\delta U^{k+1} \leq q_1 \delta U^k; \quad \delta B^{k+1} \leq q_2 \delta U^k,$$

где коэффициенты  $q_1$  и  $q_2 = q_1 \frac{\alpha}{A/\tau + \alpha}$  зависят от итерационного метода.

Коэффициенты  $q_1$  для разных методов приведены в табл. 1. Также в табл. 1 для сравнения приведены коэффициенты  $q_1$  для метода Якоби и простой итерации.

Для наглядности на рис. 6, 7 изображена зависимость коэффициента  $q_1$  от оптической толщины  $\alpha h$  для разных методов из табл. 1 при  $h = 2$ ,  $c = 3000$ ,  $\tau = 0,002$ ,  $A = 1/c$  и  $A = 1$ . Из рисунков видно, что скорость сходимости ВДМ-метода находится между скоростями сходимости второго и третьего вариантов ВДЭ-метода.

Рассмотрим сходимость методов ВДЭ и ВДМ в предельных случаях.

В случае оптически плотной среды при  $\alpha_s = \text{const}$ ,  $\alpha_c \rightarrow \infty$  следует, что  $q_1 \rightarrow 0$ ,  $q_2 \rightarrow 0$ . То есть скорость сходимости ВДЭ- и ВДМ-методов бесконечна в оптически плотной среде. В случае оптически прозрачной среды при  $\alpha_s = \text{const}$ ,  $\alpha_c \rightarrow 0$  следует, что  $q_1 \rightarrow 0$ ,  $q_2 \rightarrow 0$ . То есть скорость сходимости ВДЭ- и ВДМ-методов бесконечна в оптически прозрачной среде.

Скорость сходимости ВДЭ-метода зависит от шага по пространственной сетке. При  $h \rightarrow 0$  получаем  $q_1 \rightarrow q_* = \frac{\alpha^2}{\left(\frac{A}{\tau} + \alpha\right)\left(\frac{1}{c\tau} + \alpha\right)}$ . То есть в оптически прозрачной среде при  $\alpha_c \rightarrow 0$  скорость сходимости

Коэффициенты  $q_1$  для различных методов

Метод	$q_1$
Простая итерация	$\frac{\alpha^2}{\left(\frac{A}{\tau} + \alpha\right) \left(\frac{1}{c\tau} + \alpha\right)}$
Метод Якоби	$\frac{\frac{P}{2} \left(\frac{A}{\tau} + \alpha\right)}{\left(\frac{A}{\tau} + \alpha\right) \left(\frac{1}{c\tau} + \alpha + \frac{P}{2}\right) - \alpha^2}$
Первый вариант ВДЭ	$\frac{\alpha^2 P}{\left(\frac{1}{c\tau} + \alpha\right) \left[\left(\frac{A}{\tau} + \alpha\right) \left(\frac{1}{c\tau} + \alpha + P\right) - \alpha^2\right]}$
Второй вариант ВДЭ	$\frac{\alpha^2 \frac{P}{2}}{\left(\frac{1}{c\tau} + \alpha\right) \left[\left(\frac{A}{\tau} + \alpha\right) \left(\frac{1}{c\tau} + \alpha + \frac{P}{2}\right) - \alpha^2\right]}$
Третий вариант ВДЭ	$\frac{\alpha^2 \left(\frac{P}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{c\tau} + \alpha\right) \left\{ \left(\frac{A}{\tau} + \alpha\right) \left[ 8 \left(\frac{1}{c\tau} + \alpha\right) \left(\frac{1}{c\tau} + \alpha + \frac{P}{2}\right) + \left(\frac{P}{2}\right)^2 \right] - 8\alpha^2 \left(\frac{1}{c\tau} + \alpha + \frac{P}{2}\right) \right\}}$
ВДМ	$\frac{\alpha^2 P}{\left[ 2h \left(\frac{1}{c\tau} + \alpha\right) + P \right] \left[ \frac{A}{\tau} \left(\frac{1}{c\tau} + \alpha\right) + \frac{\alpha}{c\tau} \right] + \alpha^2 P}$

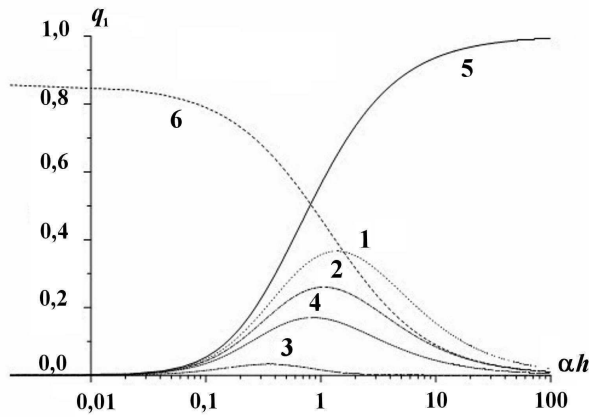


Рис. 6. Зависимость коэффициента  $q_1$  от оптической толщины  $\alpha h$  при  $A = 1/c$ : 1 — первый вариант ВДЭ; 2 — второй вариант ВДЭ; 3 — третий вариант ВДЭ; 4 — метод ВДМ; 5 — простая итерация; 6 — метод Якоби

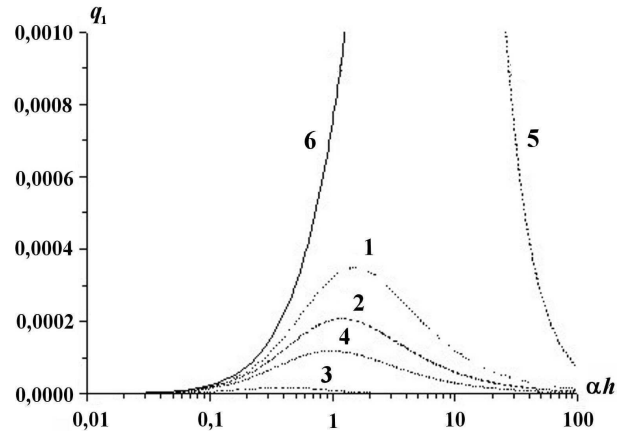


Рис. 7. Зависимость коэффициента  $q_1$  от оптической толщины  $\alpha h$  при  $A = 1$ : 1 — первый вариант ВДЭ; 2 — второй вариант ВДЭ; 3 — третий вариант ВДЭ; 4 — метод ВДМ; 5 — простая итерация; 6 — метод Якоби

димости метода максимальна, а в оптически плотной среде при  $\alpha_c \rightarrow \infty$  — минимальна и зависит от коэффициента  $q_1$ , который, в свою очередь, зависит от шага по времени и коэффициента поглощения. Наихудшая сходимость наступает в оптически плотной среде при очень мелких шагах по



пространственной сетке. Выходом из этой ситуации является измельчение шага по времени, так как при  $\tau \rightarrow 0$  получаем  $q_* \rightarrow 0$ .

Скорость сходимости ВДМ-метода также зависит от шага по пространственной сетке. При  $h \rightarrow 0$  получаем  $q_1 \rightarrow q_{**} = \frac{\alpha^2}{\frac{A}{\tau} \left( \frac{1}{c\tau} + \alpha \right) + \frac{\alpha}{c\tau} + \alpha^2}$ . При  $\tau \rightarrow 0$  получаем  $q_{**} \rightarrow 0$ . Значения коэффициента

$q_1$  в предельных случаях приведены в табл. 2.

В диффузионном и псевдодиффузионном случаях при  $\beta = 0$  в оценках сходимости меняется только параметр  $P = \frac{4}{3q_2 h^2} = \frac{4c\tau}{3h^2}$  в сторону увеличения, но так как он присутствует как в числителе, так и в знаменателе формулы для  $q_1$ , то это практически не влияет на скорость сходимости.

Таблица 2

Значения коэффициента  $q_1$  в предельных случаях

Метод	$\alpha \rightarrow 0$	$\alpha \rightarrow \infty$	$h \rightarrow 0$	$h \rightarrow \infty$
Простая итерация	0	1	$q_*$	$q_*$
Метод Якоби	1	0	1	0
Первый вариант ВДЭ	0	0	$q_*$	0
Второй вариант ВДЭ	0	0	$q_*$	0
Третий вариант ВДЭ	0	0	$q_*$	0
ВДМ	0	0	$q_{**}$	0

### Двумерный случай

**Постановка задачи.** Рассмотрим двумерную систему переноса лучистой энергии в многогрупповом квазидиффузионном приближении для осесимметричной геометрии в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial U_g}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \left( r \left( \vec{\Phi}_g \right)_r \right)}{\partial r} + \frac{\partial \left( \vec{\Phi}_g \right)_z}{\partial z} + \alpha_{cg} U_g &= \alpha_{cg} B_g; \\ \frac{\beta}{c} \frac{\partial \vec{\Phi}_g}{\partial t} + D_g \text{grad } U_g + \alpha_g \vec{\Phi}_g + \vec{P}_g U_g &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $r, z$  — цилиндрические координаты;  $\vec{z}$  — ось симметрии;  $U_g = \int_{\Omega} J_g d\vec{\Omega}$  — плотность излучения группы  $g$  ( $g = \overline{1, G}$ ), умноженная на скорость света  $c$ ;  $\vec{\Phi}_g = \int_{\Omega} \vec{\Omega} J_g d\vec{\Omega}$  — поток излучения группы  $g$ ;  $J_g$  — интенсивность излучения группы  $g$ ;

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_r \\ \Phi_z \end{pmatrix}, \quad \Phi_r = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \xi J d\mu d\psi, \quad \Phi_z = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mu J d\mu d\psi;$$

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & D_3 \\ D_3 & D_2 \end{pmatrix}, \quad D_1 = U^{-1} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \xi^2 J d\mu d\psi, \quad D_2 = U^{-1} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mu^2 J d\mu d\psi, \quad D_3 = U^{-1} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \xi \mu J d\mu d\psi;$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \frac{1}{r} (2D_1 + D_2 - 1) + \frac{\partial D_1}{\partial r} + \frac{\partial D_3}{\partial z}, \quad P_2 = \frac{1}{r} D_3 + \frac{\partial D_3}{\partial r} + \frac{\partial D_2}{\partial z};$$

$\xi = \cos \psi \sqrt{1 - \mu^2}$ ;  $\mu = \cos \theta$ ,  $\theta$  — угол между  $\vec{\Omega}$  и осью  $\vec{z}$ ;  $\psi$  — угол между  $\vec{r}$  и проекцией  $\vec{\Omega}$  на плоскость, перпендикулярную оси  $\vec{z}$ .

Совместно с системой (9) решается уравнение энергии в следующем виде:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \sum_{g=1}^G \alpha_{cg} (U_g - B_g) w_g.$$

Граничные условия имеют вид

$$\alpha_g U_g + \beta_g (\vec{\Phi}_g \vec{n}) = \varphi_g,$$

где  $\alpha_g, \beta_g, \varphi_g$  — параметры для задания граничных условий;  $n$  — внешняя нормаль.

**Метод ВДЭ.** Двумерный вариант метода ВДЭ для схемы РОМБ рассматривался в работе [8] для  $P_1$ -приближения. Для применения метода ВДЭ переходили к эквивалентной исключенной форме относительно плотности  $U$ . Эквивалентную исключенную форму относительно плотности  $U$  на девятиточечном шаблоне (рис. 8) можно получить только в диффузионном случае при  $\delta = 1/(4m)$ ,  $\beta = 0$ .

В общем случае для любых параметров  $\delta, \beta$  эквивалентную исключенную форму относительно плотности  $U$  получить не удастся, поэтому часть величин на гранях и в центрах соседних ячеек приходится брать с предыдущей итерации. В зависимости от этого можно получить методы ВДЭ с различной скоростью сходимости итераций. Можно построить двумерный аналог первого варианта ВДЭ-метода в рамках одной счетной ячейки (рис. 9, а) или аналог второго варианта ВДЭ-метода в рамках пяти счетных ячеек (рис. 9, б).

Счетные формулы в двумерном случае намного сложнее, поэтому в данной работе приведены только шаблоны, используемые в методах ВДЭ и ВДМ.

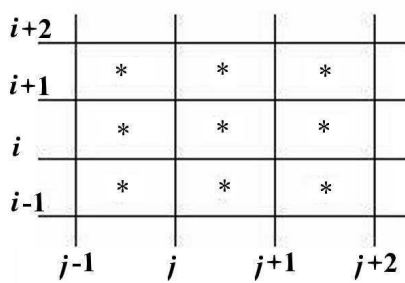


Рис. 8. Разностный шаблон при  $\delta = 1/(4m)$ ,  $\beta = 0$

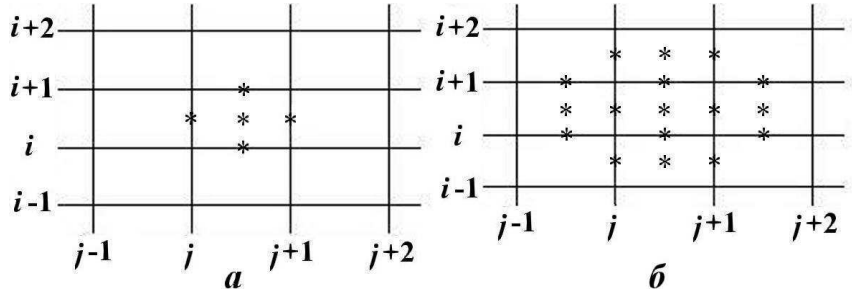


Рис. 9. Разностный шаблон в рамках одной (а) и пяти (б) счетных ячеек

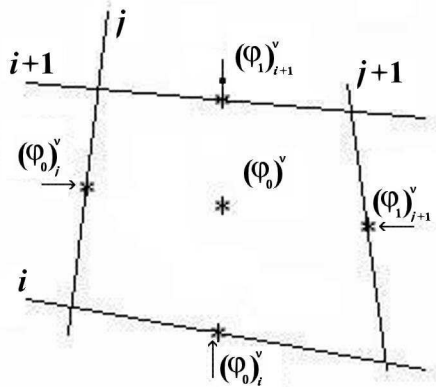


Рис. 10. Разностный шаблон для построения метода ВДМ

**Метод ВДМ.** Двумерный вариант метода ВДМ для схемы РОМБ в диффузионном и  $P_1$ -приближениях рассматривался в работе [11]. В двумерном методе ВДМ плотность излучения в центрах счетных ячеек выражается через комбинации плотности и потока излучения с предыдущей итерации на четырех границах ячейки  $\varphi^\nu$ . Разностный шаблон для построения ускоряющего метода приведен на рис. 10.

Исходя из заданных значений  $\varphi^\nu$  на гранях данной ячейки в работе [11] получена формула связи плотности излучения с функцией Планка в каждой ячейке непосредственно на основе разностных формул схемы РОМБ. Подставляя это выражение в линейаризованное уравнение энергии, получаем формулу для определения температуры. Аналогичные формулы можно получить для TVD-схем.

**Метод ВММ.** В итерационном методе ВММ предлагается использовать комбинацию плотности и потока излучения с предыдущей итерации на границах счетных подобластей, состоящих из произвольного числа ячеек. При рассмотрении одноячеечного шаблона на разностной сетке получаем метод уровня 1 для диагональной матрицы, при рассмотрении пятиячеечного шаблона получаем метод уровня 2 для пятидиагональной матрицы. В этом случае для разрешения двумерной системы можно использовать метод расщепления. В каждом направлении получается потоковая прогонка по трем ячейкам. При рассмотрении  $4L + 1$  узлов разностной сетки получаем метод уровня  $L$  на крестообразном шаблоне. Двумерную систему разрешаем методом расщепления. Для метода уровня  $L$  получаются две потоковые прогонки в каждом направлении.

По-видимому, уже метод уровня 2 может давать хорошую сходимость итераций [15]. Тогда достаточно будет остановиться на этом уровне.

На рис. 11 приведены разностные шаблоны методов ВММ уровней 1, 2 и  $L$ . Заметим, что метод ВММ уровня 1 эквивалентен методу ВДМ.

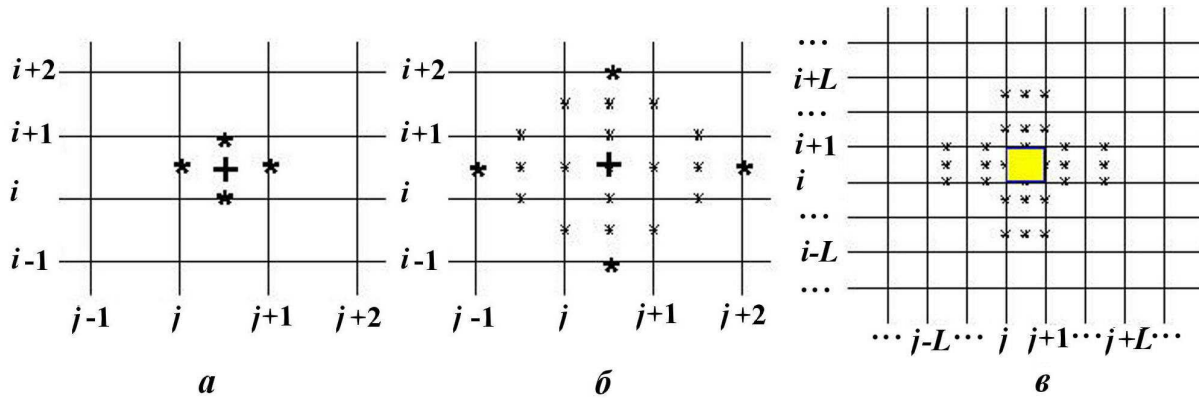


Рис. 11. Шаблоны метода ВММ уровней 1 (а), 2 (б),  $L$  (в)

### Численные расчеты

Отработка рассмотренных итерационных методов проводилась на различных задачах в различных приближениях. В данной работе приведены только одна задача, построенная по аналогии со второй задачей Флека [17], и результаты, полученные в  $P_1$ -приближении для методов ВДЭ и ВДМ.

На внутреннюю поверхность сферического слоя толщиной 4 см падает планковский поток излучения, соответствующий температуре вещества  $T = 1$ . Радиус внутренней сферы 100 см, внешней — 104 см. Слой состоит из трех физических областей.

Спектральные граничные условия на верхней границе имеют вид  $\frac{1}{4}U_g - \frac{1}{2}S_g = 0$ . На нижней границе  $\frac{1}{4}U_g + \frac{1}{2}S_g = \frac{1}{4}B_g(T = 1)$ . На боковых границах областей, которые лежат на оси симметрии, задаются теплоизолированные стенки:  $S_g = 0$ . Коэффициент поглощения вычисляется по формуле  $\alpha_c = \frac{\chi(1 - e^{-\epsilon/T})}{\epsilon^3}$ ,  $\chi = 27$  в областях 1, 3 ( $100 \leq r \leq 102$ ;  $102,4 \leq r \leq 104$ ),  $\chi = 10\,000$  в области 2 ( $102 \leq r \leq 102,4$ ). Коэффициент рассеяния  $\alpha_s = 0$ .

Начальная температура в областях  $T_{1,2,3} = 0,000\,01$ ; уравнение состояния вещества  $E_{1,2,3} = 0,81T$ ; плотность вещества  $\rho_{1,2,3} = 1$ .

По энергетической переменной расчеты выполнены на сетке  $\epsilon_g = 15,0; 12,0; 10,0; 8,0; 7,0; 6,0; 5,5; 5,0; 4,5; 4,0; 3,5; 3,0; 2,6; 2,2; 1,8; 1,4; 1,0; 0,7; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,15; 0,1; 0,08; 0,06; 0,04; 0,02; 0,0$  (число групп 28). Пространственная сетка — равномерная в каждой области: по радиусу — 28, 16, 24 интервала в областях 1, 2, 3 соответственно; по углу — 80 интервалов во всех областях. Шаг по времени  $\tau = 0,000\,2$ . Итерационный пересчет решения на каждом временном шаге проводился до вычисления температуры вещества с точностью 0,001% ( $\epsilon_{сх} = 0,000\,01$ ).

В задаче сравнивалось среднее число внешних итераций за 20 первых временных шагов по различным вариантам методов ВДЭ и ВДМ. После 20 первых временных шагов число внешних итераций значительно уменьшается. Первый вариант метода ВДЭ дает 15 итераций, второй вариант дает 11 итераций, третий вариант — 7 итераций. Метод ВДМ с комбинацией  $U/4 \pm S/2$  дает 15 итераций, с комбинацией  $U/\sqrt{3} \pm S$  — 16 итераций, с комбинацией  $XU \pm YS$  — 11 итераций. Метод простой итерации дает 455 итераций.

В результате проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

1. Методы ВДЭ и ВДМ являются высокоэффективными методами ускорения итераций при решении уравнения переноса теплового излучения. Результаты расчета задачи согласуются с теоретическими оценками. Скорости сходимости всех вариантов примерно одинаковы и в 30 раз выше скорости сходимости простой итерации.
2. К достоинствам методов ВДЭ и ВДМ можно отнести простоту реализации и независимость от типа геометрии. К достоинствам алгоритма, при котором плотность излучения находится не прогонкой, а по явным формулам, можно отнести возможность распараллеливания по всем ячейкам разностной сетки.
3. К недостаткам методов ВДЭ и ВДМ можно отнести зависимость скорости сходимости от пространственной сетки.

### Список литературы

1. Гольдин В. Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1964. Т. 4, № 6. С. 1078—1087.
2. Четверушкин Б. Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985.
3. Антоненко Э. М., Долголева Г. В., Крупина С. Н. Программа расчета одномерных задач лазерного термоядерного синтеза (SND) // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1994. Вып. 3. С. 3—9.
4. Зуев А. И., Карлыханов Н. Г. Метод решения уравнений радиационно-кондуктивного теплопереноса // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1983. Т. 23, № 4. С. 910—921.
5. Гусев В. Ю., Козманов М. Ю., Рачилов Е. Б. Метод решения неявных разностных уравнений, аппроксимирующих системы уравнений переноса и диффузии излучения // Там же. 1984. Т. 24, № 12. С. 1842—1849.
6. Гаджиев А. Д., Писарев В. Н. Неявный конечно-разностный метод РОМБ для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью // Там же. 1979. Т. 19. С. 1288—1303.
7. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. О двух подходах к ускорению итераций при численном решении уравнений переноса излучения методом "Ромб" // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3. С. 56—65.
8. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Методика "Ромб" для численного решения двумерного уравнения переноса излучения в многогрупповом  $P_1$ -приближении // Там же. 1990. Вып. 1. С. 41—47.
9. Шестаков А. А. Об одном варианте метода выделения диагонального элемента // Там же. 1990. Вып. 2. С. 71—75.
10. Шестаков А. А. Сравнение некоторых методов ускорения итераций при совместном решении уравнения переноса излучения в  $P_1$ -приближении и уравнения энергии // Там же. 1993. Вып. 2. С. 10—16.
11. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Метод выделения диагональной матрицы для численного решения уравнения переноса излучения в  $P_1$ -приближении по схеме РОМБ // Там же. 2006. Вып. 1. С. 3—13.

12. *Вершинская А. С., Гаджиев А. Д., Грабовенская С. А., Шестаков А. А.* Применение TVD-подхода к решению уравнения переноса теплового излучения в  $P_1$ -приближении // Там же. 2009. Вып. 2. С. 21—36.
13. *Гаджиев А. Д., Грабовенская С. А., Завьялов В. В., Шестаков А. А.* Применение TVD-подхода к решению уравнения переноса теплового излучения квазидиффузионным методом // См. настоящий вып. С. 3—14.
14. *Гаджиев А. Д., Романова Е. М., Селезнев В. Н., Шестаков А. А.* Методика ТОМ4-КД для математического моделирования двумерных уравнений переноса излучения в многогрупповом квазидиффузионном приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2001. Вып. 4. С. 48—59.
15. *Карлыханов Н. Г.* Построение оптимальных многодиагональных методов решения задач переноса излучения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1997. Т. 37, № 4. С. 494—498.
16. *Михалас Д.* Звездные атмосферы. М: Мир, 1982.
17. *Fleck J. A., Jr. and Cummings J. D.* An implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8(3). P. 313—342.

Статья поступила в редакцию 24.09.09.

---