

УДК 517.958:536.2

## ПРИМЕНЕНИЕ TVD-ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОвого ИЗЛУЧЕНИЯ КВАЗИДИФФУЗИОННЫМ МЕТОДОМ

А. Д. Гаджиев, С. А. Грабовенская, В. В. Завьялов, А. А. Шестаков  
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Рассматривается нелинейная схема типа TVD второго порядка аппроксимации для решения уравнения переноса теплового излучения квазидиффузионным методом. Приводятся результаты численных расчетов тестовых задач.

*Ключевые слова:* схема TVD, квазидиффузионный метод.

### Введение

Система уравнений переноса излучения и уравнения энергии представляют собой сложную нелинейную интегродифференциальную систему, зависящую в общем случае от семи независимых переменных. Поэтому ее часто решают в более простом приближении, например, в квазидиффузионной модели [1]. Для нестационарной задачи это приближение приводит к гиперболической системе уравнений относительно нулевого и первого моментов в разложении интенсивности излучения по сферическим функциям. Если пренебречь временной производной от потока излучения, то гиперболическая система перейдет в параболическое уравнение. Если для параболического уравнения нет проблемы, связанной с построением монотонной схемы второго порядка по пространству, то для гиперболической системы она есть, поскольку не существует монотонной схемы второго порядка в классе линейных схем (теорема Годунова).

Для решения данной проблемы одними из самых перспективных являются TVD-схемы, которые позволяют в классе нелинейных схем сочетать монотонность и второй порядок аппроксимации. Однако здесь возникает другая проблема: не удастся построить базовую монотонную схему первого порядка с положительным решением.

Для более простого  $P_1$ -приближения создание положительной разностной схемы рассмотрено в работе [2]. В данной работе речь идет о создании монотонной разностной схемы для квазидиффузионного метода, эквивалентной схеме бегущего счета в инвариантах. На основе этой схемы путем TVD-реконструкции строится схема второго порядка.

Построенная указанным способом схема типа TVD обладает следующими свойствами:

- 1) неаяность, безусловная устойчивость;
- 2) монотонность в смысле принадлежности к классу TVD-схем;
- 3) первый порядок аппроксимации по времени и второй порядок аппроксимации по пространству, кроме отдельных точек с экстремумами;
- 4) консервативность в смысле выполнения разностного аналога интегрального закона сохранения в каждой ячейке.

Используемая в новой схеме TVD-методология приводит к введению в схему ограничителя, который вычисляется явно по известным величинам с предыдущего временного шага на трехточечном шаблоне для инвариантов.

Для совместного решения системы уравнений энергии и переноса излучения рассматривается метод выделения диагональной матрицы (ВДМ) [3].

### Постановка задачи

Рассмотрим одномерную систему переноса теплового излучения в многогрупповом методе квазидиффузии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_g}{c\partial t} + \frac{\partial (r^\eta S_g)}{r^\eta \partial r} + \kappa_g U_g &= \kappa_g B_g; \\ \frac{\partial S_g}{c\partial t} + \frac{\partial (D_g U_g)}{\partial r} + a_g S_g + d_g U_g &= 0; \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \sum_g w_g \kappa_g (U_g - B_g). \end{aligned}$$

Здесь  $U_g(r, t) = \int_{-1}^1 I_g d\mu$  — плотность излучения, умноженная на скорость света  $c$ ;  $g$  — индекс энергетической группы;  $r$  — координата;  $t$  — время;  $I_g(r, \mu, g, t)$  — интенсивность излучения;  $\mu$  — косинус угла между направлением полета фотона и осью  $r$ ;  $S_g(r, t) = \int_{-1}^1 \mu I_g d\mu$  — поток излучения;  $D_g = \frac{1}{U_g} \int_{-1}^1 \mu^2 I_g d\mu$  — коэффициент квазидиффузии;  $B_g(T)$  — функция Планка;  $T$  — температура среды;  $\kappa_g(T)$  — коэффициент поглощения;  $k(r)$  — коэффициент рассеяния;  $a_g = \kappa_g + k$  — коэффициент ослабления;  $E(T)$  — внутренняя энергия вещества;  $w_g$  — вес квадратуры;  $\eta$  — тип геометрии ( $\eta = 0$  — плоская,  $d_g = 0$ ;  $\eta = 2$  — сферически-симметричная,  $d_g = \frac{3D_g - 1}{r}$ ).

Граничные условия имеют вид

$$\alpha_g U_g + \beta_g S_g = \varphi_g, \quad (1)$$

где  $\alpha_g, \beta_g, \varphi_g$  — параметры, определяемые типом граничных условий.

**Разностная аппроксимация.** Введем разностную сетку по пространственной ( $i = 1, \dots, \hat{i}$ ) и временной ( $n$ ) переменным. Тогда система уравнений квазидиффузии примет вид (опуская индексы  $i + 1/2, g$ )

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1}}{c\tau} + \frac{\Delta_i (r^\eta S^{n+1})}{V} + (aU)^{n+1} &= \frac{U^n}{c\tau} + (\kappa B)^{n+1} + kU^{n+1}; \\ \frac{S^{n+1}}{c\tau} + \frac{\Delta_i (DU)^{n+1}}{h} + (aS)^{n+1} + (dU)^{n+1} &= \frac{S^n}{c\tau}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\tau = t^{n+1} - t^n; \quad h_{i+1/2} = r_{i+1} - r_i; \quad V_{i+1/2} = \frac{r_{i+1}^{\eta+1} - r_i^{\eta+1}}{\eta + 1}; \quad \Delta_i(\bullet) = (\bullet)_{i+1} - (\bullet)_i.$$

Для перехода к инвариантам  $\psi_\pm = \sqrt{D}U \pm S$  выделим из первого уравнения системы (2) плоскую дивергенцию  $\frac{\Delta_i S}{h}$ , а из второго — член  $\frac{\sqrt{D}\Delta_i(\sqrt{D}U)}{h}$ :

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1}}{c\tau} + \frac{\Delta_i S^{n+1}}{h} + (aU)^{n+1} + 0,5(1 + \text{sign } \Lambda^{n+1}) \Lambda^{n+1} &= \frac{U^n}{c\tau} + Q^{n+1}; \\ \frac{S^{n+1}}{c\tau} + \frac{\sqrt{D}\Delta_i(\sqrt{D}U)^{n+1}}{h} + (aS)^{n+1} + (dU)^{n+1} + \Lambda_1^{n+1} &= \frac{S^n}{c\tau}; \\ \Lambda = \frac{\Delta_i(r^\eta S)}{V} - \frac{\Delta_i S}{h}; \quad \Lambda_1 = \frac{\Delta_i(DU)}{h} - \frac{\sqrt{D}\Delta_i(\sqrt{D}U)}{h}. \end{aligned} \quad (3)$$

Правая часть первого уравнения всегда положительна и равна  $Q^{n+1} = (\kappa B)^{n+1} + kU^{n+1} - 0,5 \times \times (1 - \text{sign } \Lambda^{n+1}) \Lambda^{n+1}$ . Для плоской геометрии  $\Lambda = 0$ . Для сферически-симметричной геометрии

$$\Lambda = 3 \frac{(r^2 S)_{i+1} - (r^2 S)_i}{r_{i+1}^3 - r_i^3} - \frac{S_{i+1} - S_i}{h} = \frac{(r_{i+1} + r_i)(S_{i+1} + S_i) + r_{i+1}S_{i+1} + r_iS_i}{r_i^2 + r_{i+1}r_i + r_{i+1}^2} = x_i S_i + y_i S_{i+1},$$

$$x_i = \frac{r_{i+1} + 2r_i}{r_i^2 + r_{i+1}r_i + r_{i+1}^2}, \quad y_i = \frac{2r_{i+1} + r_i}{r_i^2 + r_{i+1}r_i + r_{i+1}^2}.$$

Коэффициенты квазидиффузии  $D$  будем определять в узлах сетки, чтобы обеспечить непрерывность инвариантов в этих точках. Если предположить  $\sqrt{D_{i+1/2}} = 0,5 (\sqrt{D_i} + \sqrt{D_{i+1}})$ , то

$$\Lambda_1 = \hat{x}_i U_i + \hat{y}_{i+1} U_{i+1},$$

$$\hat{x}_i = -\frac{D_i - \sqrt{D_{i+1/2}}\sqrt{D_i}}{h} = -\frac{\sqrt{D_i}(\sqrt{D_i} - \sqrt{D_{i+1/2}})}{h} = \frac{\sqrt{D_i}(\sqrt{D_{i+1}} - \sqrt{D_i})}{2h},$$

$$\hat{y}_{i+1} = \frac{D_{i+1} - \sqrt{D_{i+1/2}}\sqrt{D_{i+1}}}{h} = \frac{\sqrt{D_{i+1}}(\sqrt{D_{i+1}} - \sqrt{D_{i+1/2}})}{h} = \frac{\sqrt{D_{i+1}}(\sqrt{D_{i+1}} - \sqrt{D_i})}{2h}.$$

Систему (3) будем решать итерационно:

$$\frac{U^{\nu+1}}{c\tau} + \frac{\Delta_i S^{\nu+1}}{h} + a^\nu U^{\nu+1} + 0,5 (1 + \text{sign } \Lambda^{\nu+1}) \Lambda^{\nu+1} = \frac{U^n}{c\tau} + Q^{\nu+1/2};$$

$$\frac{S^{\nu+1}}{c\tau} + \frac{\sqrt{D^{\nu+1}}\Delta_i (\sqrt{D}U)^{\nu+1}}{h} + a^\nu S^{\nu+1} + (dU)^{\nu+1} + \Lambda_1^{\nu+1} = \frac{S^n}{c\tau},$$
(4)

где  $Q^{\nu+1/2} = \kappa^\nu B^{\nu+1/2} + kU^\nu - 0,5 (1 - \text{sign } \Lambda^\nu) \Lambda^\nu$ , а организация итераций будет такой, чтобы решение системы (4) происходило с известной правой частью.

Запишем (3) в инвариантах:

$$\frac{\psi_\pm^{\nu+1}}{c\tau} \pm \frac{\sqrt{D^{\nu+1}}\Delta_i \psi_\pm^{\nu+1}}{h} + a^\nu \psi_\pm^{\nu+1} + \lambda_\pm^{\nu+1} = \frac{\psi_\pm^n}{c\tau} + \sqrt{D^{\nu+1}}Q^{\nu+1/2},$$
(5)

где  $\lambda_\pm^{\nu+1} = \frac{\sqrt{D^{\nu+1}}}{2} (1 + \text{sign } \Lambda^\nu) \Lambda^{\nu+1} \pm (dU)^{\nu+1} \pm \Lambda_1^{\nu+1}$ . Видоизменим (5), оставляя слева только положительное слагаемое  $\lambda_\pm$ :

$$\frac{\psi_\pm^{\nu+1}}{c\tau} \pm \frac{\sqrt{D^{\nu+1}}\Delta_i \psi_\pm^{\nu+1}}{h} + a^\nu \psi_\pm^{\nu+1} + (1 + \text{sign } \lambda_\pm^\nu) \frac{\lambda_\pm^{\nu+1}}{2} = \frac{\psi_\pm^n}{c\tau} + \sqrt{D^{\nu+1}}Q^{\nu+1/2} - (1 - \text{sign } \lambda_\pm^\nu) \frac{\lambda_\pm^{\nu+1}}{2}.$$

При данном преобразовании правые части этих уравнений при  $\psi_\pm^n \geq 0$  остаются всегда положительными.

Приведем левые части этих уравнений к зависимости только от  $\psi_-^{\nu+1}$  или от  $\psi_+^{\nu+1}$ , заменив соответственно выражение  $\lambda_\pm^{\nu+1}$  на  $\frac{\lambda_\pm^\nu}{\psi_\pm^\nu} \psi_\pm^{\nu+1}$ , а справа у  $\lambda_\pm^{\nu+1}$  понизим индекс:

$$\frac{\psi_\pm^{\nu+1}}{c\tau} \pm \frac{\sqrt{D^{\nu+1}}\Delta_i \psi_\pm^{\nu+1}}{h} + a^\nu \psi_\pm^{\nu+1} + (1 + \text{sign } \lambda_\pm^\nu) \frac{\lambda_\pm^\nu}{2\psi_\pm^\nu} \psi_\pm^{\nu+1} = \frac{\psi_\pm^n}{c\tau} + \sqrt{D^{\nu+1}}Q^{\nu+1/2} - \frac{(1 - \text{sign } \lambda_\pm^\nu) \lambda_\pm^\nu}{2}. \quad (6)$$

При  $\psi_\pm^\nu = 0$  полагаем  $\frac{\lambda_\pm^\nu}{\psi_\pm^\nu} \psi_\pm^{\nu+1} = 0$ .

Для решения системы в инвариантах (6) можно применять бегущий счет, как и для уравнения переноса. Для этого уравнения при положительной правой части можно построить монотонную схему первого порядка точности с соотношениями

$$(\psi_+)_{i+1/2} = (\psi_+)_{i+1}; \quad (\psi_-)_{i+1/2} = (\psi_-)_i.$$

Для повышения порядка аппроксимации рассматриваемой схемы первого порядка перейдем к нелинейной схеме. Представим  $\psi$  на интервале  $r_i \leq r \leq r_{i+1}$  в кусочно-линейной форме:

$$\psi(r) = \psi_{i+1/2} + \frac{\partial \psi_{i+1/2}}{\partial r} (r - r_{i+1/2}), \quad r_{i+1/2} = 0,5 (r_i + r_{i+1}).$$

В соответствии с TVD-методологией в качестве производных  $\frac{\partial \psi_{i+1/2}}{\partial r}$  берутся некоторые ограничители  $L(\psi)$ , использующие односторонние производные. Применим следующие нелинейные соотношения для системы (6):

$$\begin{aligned} (\psi_-)_i^{\nu+1} &= a_- (\psi_-)_{i+1/2}^{\nu+1}, & (\psi_+)_{i+1}^{\nu+1} &= a_+ (\psi_+)_{i+1/2}^{\nu+1}, \\ a_{\pm} &= 1 \pm \frac{L(\Delta \psi_{\pm})_{i+1/2}^n}{2(\psi_{\pm})_{i+1/2}^n}, & L(\Delta \psi_{\pm})_{i+1/2}^n &= L\left((\psi_{\pm})_{i+1/2}^n - (\psi_{\pm})_{i-1/2}^n, (\psi_{\pm})_{i+3/2}^n - (\psi_{\pm})_{i+1/2}^n\right). \end{aligned}$$

Так как функция-ограничитель  $a_{\pm}$  имеет дробно-линейный характер, можно ожидать, что она слабо меняется за один шаг  $\tau$ . Таким образом, можно взять ее с  $n$ -го шага, внося при этом погрешность  $O(\tau)$ . В работе [4] для некоторых ограничителей были получены оценки максимальных значений  $a_{\pm}$  в кинетическом приближении. В квазидиффузионном методе из-за знакопеременности  $\psi_{\pm}$  они, к сожалению, не применимы.

По формулам обратного перехода  $U = \frac{\psi_+ + \psi_-}{2\sqrt{D}}$ ,  $S = \frac{\psi_+ - \psi_-}{2}$  получим

$$U = \frac{1}{2} \left( \frac{U_{i+1}}{a_+} + \frac{U_i}{a_-} \right) + \frac{1}{2\sqrt{D}} \left( \frac{S_{i+1}}{a_+} - \frac{S_i}{a_-} \right); \quad S = \frac{1}{2} \left( \frac{S_{i+1}}{a_+} + \frac{S_i}{a_-} \right) + \frac{\sqrt{D}}{2} \left( \frac{U_{i+1}}{a_+} - \frac{U_i}{a_-} \right).$$

Эти соотношения связи дают схему квазивторого порядка точности при сохранении положительности решения. При  $a_{\pm} = 1$  получим схему первого порядка точности.

С новыми соотношениями связи можно считать либо исходную систему (2), либо согласованную, которую получаем из (6) по формулам обратного перехода:

$$\begin{aligned} \frac{U^{\nu+1}}{c\tau} + \frac{\Delta_i S^{\nu+1}}{h} + a^{\nu} U^{\nu+1} + W_1^{\nu+1} &= \frac{U^n}{c\tau} + Q^{\nu+1/2} + F_1^{\nu}; \\ \frac{S^{\nu+1}}{c\tau} + \frac{\sqrt{D^{\nu+1}} \Delta_i (\sqrt{D} U)^{\nu+1}}{h} + a^{\nu} S^{\nu+1} + W_2^{\nu+1} &= \frac{S^n}{c\tau} + F_2^{\nu}, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} W_1^{\nu+1} &= \frac{1}{4\sqrt{D^{\nu+1}}} \left[ (1 + \text{sign } \lambda_-^{\nu}) \frac{\lambda_-^{\nu}}{\psi_-^{\nu}} \psi_-^{\nu+1} + (1 + \text{sign } \lambda_+^{\nu}) \frac{\lambda_+^{\nu}}{\psi_+^{\nu}} \psi_+^{\nu+1} \right] = \delta_1^{\nu} U^{\nu+1} + \theta_1^{\nu} S^{\nu+1}; \\ W_2^{\nu+1} &= \frac{1}{4} \left[ - (1 + \text{sign } \lambda_-^{\nu}) \frac{\lambda_-^{\nu}}{\psi_-^{\nu}} \psi_-^{\nu+1} + (1 + \text{sign } \lambda_+^{\nu}) \frac{\lambda_+^{\nu}}{\psi_+^{\nu}} \psi_+^{\nu+1} \right] = \delta_2^{\nu} U^{\nu+1} + \theta_2^{\nu} S^{\nu+1}; \\ F_1^{\nu} &= - \frac{(1 - \text{sign } \lambda_-^{\nu}) \lambda_-^{\nu} + (1 - \text{sign } \lambda_+^{\nu}) \lambda_+^{\nu}}{4\sqrt{D^{\nu+1}}}; \quad F_2^{\nu} = \frac{(1 - \text{sign } \lambda_-^{\nu}) \lambda_-^{\nu} - (1 - \text{sign } \lambda_+^{\nu}) \lambda_+^{\nu}}{4}; \\ \theta_1^{\nu} &= \frac{1}{4\sqrt{D^{\nu+1}}} \left[ - (1 + \text{sign } \lambda_-^{\nu}) \frac{\lambda_-^{\nu}}{\psi_-^{\nu}} + (1 + \text{sign } \lambda_+^{\nu}) \frac{\lambda_+^{\nu}}{\psi_+^{\nu}} \right]; \\ \theta_2^{\nu} = \delta_1^{\nu} &= \frac{1}{4} \left[ (1 + \text{sign } \lambda_-^{\nu}) \frac{\lambda_-^{\nu}}{\psi_-^{\nu}} + (1 + \text{sign } \lambda_+^{\nu}) \frac{\lambda_+^{\nu}}{\psi_+^{\nu}} \right]; \quad \delta_2^{\nu} = D\theta_1^{\nu}. \end{aligned}$$

Подставляя соотношения связи в систему (7), получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} a_i^0 U_i + b_i^0 U_{i+1} + c_i^0 S_i + d_i^0 S_{i+1} &= f_i^0; \\ a_i^1 U_i + b_i^1 U_{i+1} + c_i^1 S_i + d_i^1 S_{i+1} &= f_i^1, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_i^0 &= \frac{1}{a_-} \left( 1 - \frac{\theta_1 \sqrt{D}}{q_1} \right)^\nu; & b_i^0 &= \frac{1}{a_+} \left( 1 + \frac{\theta_1 \sqrt{D}}{q_1} \right)^\nu; & c_i^1 &= \frac{1}{a_-} \left( 1 - \frac{\delta_2}{q_2 \sqrt{D}} \right)^\nu; & d_i^1 &= \frac{1}{a_+} \left( 1 + \frac{\delta_2}{q_2 \sqrt{D}} \right)^\nu; \\
 a_i^1 &= \left( -\frac{\sqrt{D}}{a_-} - \frac{2\sqrt{D}\sqrt{D}_i}{q_2 h} + \frac{\delta_2}{q_2 a_-} \right)^\nu; & b_i^1 &= \left( \frac{\sqrt{D}}{a_+} + \frac{2\sqrt{D}\sqrt{D}_{i+1}}{q_2 h} + \frac{\delta_2}{q_2 a_+} \right)^\nu; \\
 c_i^0 &= \left( -\frac{1}{\sqrt{D} a_-} - \frac{2}{q_1 h} + \frac{\theta_1}{q_1 a_-} \right)^\nu; & d_i^0 &= \left( \frac{1}{\sqrt{D} a_+} + \frac{2}{q_1 h} + \frac{\theta_1}{q_1 a_+} \right)^\nu; & q_1 &= q_2 = \hat{a} + \delta_1 = \hat{a} + \theta_2; \\
 \hat{a} &= \frac{1}{c\tau} + a; & f_i^0 &= \frac{2}{q_1^\nu} \left( \frac{U^n}{c\tau} + Q^{\nu+1/2} + F_1^\nu \right); & f_i^1 &= \frac{2}{q_2^\nu} \left( \frac{S^n}{c\tau} + F_2^\nu \right).
 \end{aligned}$$

Для  $P_1$ -приближения  $d = \Lambda_1 = F_2^\nu = 0$ , и в сферически-симметричном случае

$$\theta_1 = -3\theta; \quad \lambda_\pm^\nu = \frac{(1 + \text{sign } \Lambda^\nu) \Lambda^\nu}{2\sqrt{3}}; \quad \delta_1^\nu = \frac{\lambda_\pm^\nu (1 + \text{sign } \lambda_\pm^\nu)}{2\psi_1^\nu}; \quad F_1^\nu = \frac{\sqrt{3}\lambda_\pm^\nu (\text{sign } \lambda_\pm^\nu - 1)}{2}.$$

В плоском случае  $\Lambda = \lambda_\pm^\nu = \delta_1^\nu = F_1^\nu = 0$ .

### Итерационные методы

**Метод простой итерации.** Если в системе (8) функцию Планка брать с предыдущей итерации,  $B^{\nu+1/2} = B^\nu$ , то получается метод простой итерации, и система линейных уравнений (8) решается методом потоковой прогонки. Предполагаем связь между  $U_i$  и  $S_i$  в виде

$$X_i U_i + Y_i S_i = Z_i, \quad X_i + Y_i = 1,$$

где  $X_i, Y_i, Z_i$  — прогоночные коэффициенты, которые вычисляются по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned}
 X_{i+1} &= N_i (\langle cb \rangle_i X_i + \langle ba \rangle_i Y_i); & Y_{i+1} &= N_i (\langle cd \rangle_i X_i + \langle da \rangle_i Y_i); \\
 Z_{i+1} &= N_i (\langle cf \rangle_i X_i + \langle fa \rangle_i Y_i + \langle ac \rangle_i Z_i); & N_i^{-1} &= (\langle cb \rangle_i + \langle cd \rangle_i) X_i + (\langle ba \rangle_i + \langle da \rangle_i) Y_i; \\
 X_0 &= \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \beta_0}; & Y_0 &= \frac{\beta_0}{\alpha_0 + \beta_0}; & Z_0 &= \frac{\varphi_0}{\alpha_0 + \beta_0}; & \langle ab \rangle &= a^1 b^0 - a^0 b^1; & \langle ca \rangle &= c^1 a^0 - c^0 a^1; \dots
 \end{aligned} \tag{9}$$

Формулы обратной прогонки:

$$\begin{aligned}
 U_i &= N_i Y_{i+1}^{-1} (\langle bd \rangle_i Y_i U_{i+1} + \langle df \rangle_i Y_i + \langle cd \rangle_i Z_i); \\
 U_i &= \frac{\beta_i Z_i - \varphi_i Y_i}{\beta_i X_i - \alpha_i Y_i}; & S_i &= \frac{\varphi_i X_i - \alpha_i Z_i}{\beta_i X_i - \alpha_i Y_i}; \\
 S_i &= Y_i^{-1} (Z_i - X_i U_i).
 \end{aligned} \tag{10}$$

В формулах (9), (10)  $\alpha_0, \beta_0, \varphi_0, \alpha_i, \beta_i, \varphi_i$  — параметры из граничных условий (1).

Совместно с уравнениями (9), (10) решается уравнение энергии. Линеаризуя по температуре внутреннюю энергию и функцию Планка, подставляем полученные значения  $U_g^{\nu+1}$  в уравнение энергии. Тогда выражение для нахождения температуры ( $m$  — ньютоновские итерации по температуре) принимает вид

$$T^{m+1} = T^m + \frac{E^n - E^m + \tau \sum_g w_g \kappa_g^\nu (U_g^{\nu+1} - B_g^m)}{\left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)^m + \tau \sum_g w_g \kappa_g^\nu \left( \frac{\partial B_g}{\partial T} \right)^m}. \tag{11}$$

При сходимости ньютоновских итераций получаем температуру  $T^{\nu+1} = T^{m+1}$  и далее решаем уравнения переноса. Внешние итерации  $\nu$  заканчиваются при сходимости  $T^{\nu+1}$ .

Отметим, что температуру по формуле (11) можно находить до вычисления  $U_g^{\nu+1}$ , используя значения  $U_g^\nu$ .

**Метод ВДМ.** Будем обсчитывать ячейку разностной сетки независимо от соседних интервалов. Это делается для определения нового значения температуры в данной ячейке, а зная температурное поле, можно решать и сами уравнения переноса.

Рассмотрим некоторую комбинацию искомых функций в качестве внутренних граничных условий для ячейки  $i + 1/2$  ( $i = 2, \dots, \hat{i} - 2$ ):

$$(\alpha_0)_i U_i^{\nu+1/2} + (\beta_0)_i S_i^{\nu+1/2} = (\varphi_0^\nu)_i; \quad (\alpha_1)_i U_{i+1}^{\nu+1/2} - (\beta_1)_i S_{i+1}^{\nu+1/2} = (\varphi_1^\nu)_i,$$

где  $\alpha_{0\div 1}, \beta_{0\div 1}, \varphi_{0\div 1}$  — некоторые параметры для задания комбинации искомых функций.

Для функции  $\varphi$  можно рассматривать следующие варианты:

- 1) односторонний поток:  $(\varphi_0)_i = \frac{1}{4}U_i + \frac{1}{2}S_i, \quad (\varphi_1)_i = \frac{1}{4}U_i - \frac{1}{2}S_i;$
- 2) псевдоинвариант:  $(\varphi_0)_i = \sqrt{D_i}U_i + S_i, \quad (\varphi_1)_i = \sqrt{D_i}U_i - S_i.$

Оба варианта показали практически одинаковые результаты на тестовых задачах.

Формула для нахождения температуры в ВДМ-методе имеет вид

$$T^{m+1} = T^m + \frac{E^n - E^m + \tau \sum_g w_g \kappa_g^\nu (U_g^m - B_g^m)}{\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)^m + \tau \sum_g w_g \kappa_g^\nu b_g^\nu \left(\frac{\partial B_g}{\partial T}\right)^m},$$

где коэффициент  $b_g^\nu$  приведен в работе [2].

### Граничные условия

При формировании граничных условий для квазидиффузии приходится записывать граничные условия для уравнения переноса через входящие и выходящие величины. Этот переход неоднозначен, поэтому рассмотрим различные типы граничных условий. Обычно переход осуществляют, представляя полные величины на границе в виде суммы входящих и выходящих величин.

Введем обозначения

$$U^+ = \int_0^1 Id\mu; \quad U^- = \int_{-1}^0 Id\mu; \quad S^+ = \int_0^1 \mu Id\mu; \quad S^- = \int_{-1}^0 \mu Id\mu.$$

Рассмотрим три типа граничных условий ( $C$  — граничный квазидиффузионный коэффициент):

- 1) из работы [1]:

$$\int_{\mu>0} \mu Id\mu = C (U - U^-), \quad -CU + S = -CU^- + S^-, \quad C = \frac{S^+}{U^+}, \quad 0 \leq C \leq 1;$$

- 2) из работы [5]:

$$\int_{\mu>0} \mu Id\mu = C (0,25U + 0,5S), \quad -0,25CU + (1 - 0,5C)S = S^-, \quad C = \frac{S^+}{0,25U + 0,5S} \geq 0;$$

3) из работы [6]:

$$\int_{\mu>0} \mu I d\mu = CU, \quad -CU + S = S^-, \quad C = \frac{S^+}{U}, \quad 0 \leq C \leq 1.$$

Рассмотрим, как выглядят данные условия в  $P_1$ -приближении. Если справедливо  $P_1$ -приближение, т. е.  $I = 0,5U + 1,5\mu S$ , то

$$S^+ = 0,25U + 0,5S; \quad S^- = -0,25U + 0,5S; \quad U^+ = 0,5U + 0,75S; \quad U^- = 0,5U - 0,75S.$$

Отсюда получаем значение коэффициента  $C$  в  $P_1$ -приближении. В формуле для граничных условий типа 1

$$C = \frac{0,25U + 0,5S}{0,25U + 0,75S} = \frac{U + 2S}{2U + 3S}.$$

Для граничных условий типа 2  $C = 1$ , для граничных условий типа 3  $C = 0,25 + \frac{S}{2U}$ , и очевидно, что в  $P_1$ -приближении эти способы задания граничных условий совпадают.

К сожалению, ограничение сверху для граничного квазидиффузионного коэффициента в граничных условиях типа 2 получить не удастся, так как знаменатель может быть сколь угодно малой величиной, поэтому сверху его можно ограничить константой, например, равной 2.

### Численные расчеты

Рассматриваемые схемы исследовались на трех задачах в плоской и сферически-симметричной геометриях. Для задач 1 и 2 существуют аналитические решения, задача 3 представляет собой вторую задачу Флека [7] в сферически-симметричной геометрии.

Задача 1 построена на остывании вакуумной плоской области, заполненной только фотонами. На ней исследовались различные типы граничных условий.

Задача 2 описывает стационарный режим в вакууме для сферически-симметричной системы и интересна тем, что излучение на выходе сосредоточено в узком угловом диапазоне по  $\mu$ . Как показано в [8], даже в стационарных задачах поток в центрах ячеек для некоторых разностных схем, аппроксимирующих кинетическое уравнение, может вести себя немонотонно, т. е. может не выполняться условие  $S = \text{const}$ . В этом тесте рассматривается влияние данного эффекта на коэффициенты квазидиффузии, которые также вычисляются в центрах ячеек, и зависимость получаемых коэффициентов квазидиффузии от сетки по угловой переменной.

Задача 3 характеризуется большим числом итераций из-за резких отличий оптических толщин в соседних областях. В ней анализируются профиль теплового фронта и скорость сходимости итераций, а также монотонность и точность решения. Сравняются решения, полученные в кинетическом,  $P_1$ - и квазидиффузионном приближениях.

В данной работе для аппроксимации по  $\mu$  уравнения переноса и коэффициентов квазидиффузии рассматривались квадратуры Гаусса (индекс  $\hat{j}$ ). Для интегрирования по энергии групп  $g$  в спектральных задачах использовалась формула прямоугольников. Все расчеты уравнений квазидиффузии проводились (где это не оговаривается отдельно) по TVD-схеме с ограничителем Чакравати—Ошера и граничными условиями типа 2 (см. предыдущий раздел). Для расчетов коэффициентов квазидиффузии использовалась аппроксимация уравнения переноса TVD-схемой [7] с ограничителем Чакравати—Ошера.

**Задача 1.** Задача построена на остывании вакуумной плоской области  $r_L = 0 \leq r \leq r_R = 3$ , заполненной только фотонами. Начальное распределение поля излучения  $I^0 = B (T^0 = 1)$ . Граничные условия на правой границе —  $I_{\mu<0} = 0$ , на левой — условия отражения. Параметры расчета:  $\Delta r = \frac{3}{2000}$ ;  $\hat{j} = 500$ ;  $\tau = 2 \cdot 10^{-6}$ . Максимальное значение величины  $\frac{c\tau}{h} \sqrt{D}$  равно 4. Конечное время —  $t = 4 \cdot 10^{-3}$ .

Точное решение имеет вид

$$U(r, t) = \begin{cases} U_0, & ct < r_R - r; \\ 0,5U_0(\mu_0 + 1), & r_R - r \leq ct < r_R + r, \\ 0,5U_0(\mu_0 - \mu_1), & ct \geq r_R + r; \end{cases} \quad \mu_0 = \frac{r_R - r}{ct}, \quad \mu_1 = -\frac{r_R + r}{ct};$$

$$D(r, t) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & ct < r_R - r; \\ \frac{1}{3} \frac{\mu_0^3 + 1}{\mu_0 + 1}, & r_R - r \leq ct < r_R + r; \\ \frac{1}{3} \frac{\mu_0^3 - \mu_1^3}{\mu_0 - \mu_1}, & ct \geq r_R + r. \end{cases}$$

Профили коэффициента квазидиффузии  $D$ , полученные по TVD-схеме [4] на разные моменты времени, приводятся на рис. 1. Из рисунка видно хорошее согласие коэффициента квазидиффузии с точным решением.

Профили температуры фотонов, полученные по TVD- и базовой схемам (базовой схемой называется монотонная схема первого порядка), с граничными условиями типа 3 приводятся на рис. 2. Из рисунка видно, что базовая схема сильнее "размазывает" решение, чем TVD-схема.

На рис. 3, 4 приводятся профили температуры фотонов по TVD-схеме с другими типами граничных условий (профили температуры фотонов, полученные по базовой схеме, не приводятся). Из рисунков видно, что наилучшие результаты дают граничные условия типа 2.

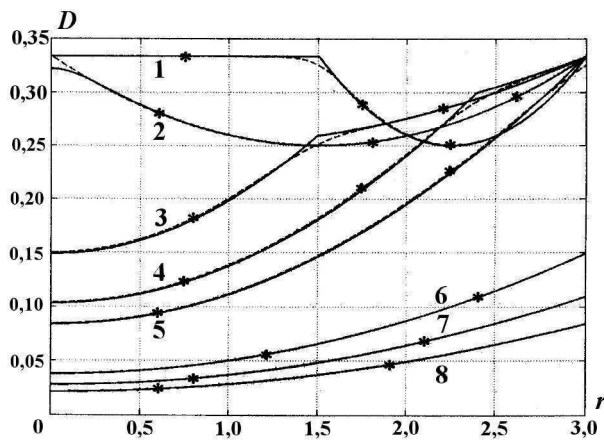


Рис. 1. Задача 1. Профили  $D(r, t)$ : 1 —  $t = 0,0005$ ; 2 —  $t = 0,001$ ; 3 —  $t = 0,0015$ ; 4 —  $t = 0,0018$ ; 5 —  $t = 0,002$ ; 6 —  $t = 0,003$ ; 7 —  $t = 0,0035$ ; 8 —  $t = 0,004$ ; — — точное решение; - - - - TVD-схема

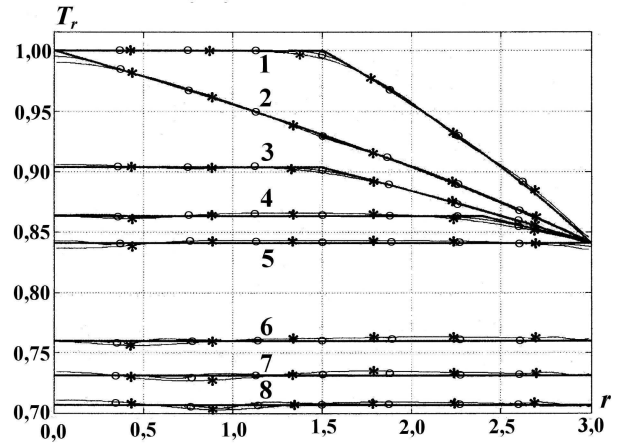


Рис. 2. Задача 1. Профили  $T_r(r, t)$  с граничными условиями типа 3: 1 —  $t = 0,0005$ ; 2 —  $t = 0,001$ ; 3 —  $t = 0,0015$ ; 4 —  $t = 0,0018$ ; 5 —  $t = 0,002$ ; 6 —  $t = 0,003$ ; 7 —  $t = 0,0035$ ; 8 —  $t = 0,004$ ; — — точное решение; -o- — TVD-схема; -\*- — базовая схема

**Задача 2.** В данной задаче рассматривается перенос излучения в вакууме в сфере  $r_L = 0,4 \leq r \leq r_R = 4$ . Задача построена на проверке метода квазидиффузии, когда излучение на выходе из системы сосредоточено в узком угловом диапазоне по  $\mu$ . В этом случае при применении квадратурных формул для вычисления коэффициента квазидиффузии решение может сильно отличаться от точного. Поэтому приходится использовать достаточно подробную сетку в пространстве направлений. В задаче исследовалась зависимость решения и коэффициента квазидиффузии от числа направлений.



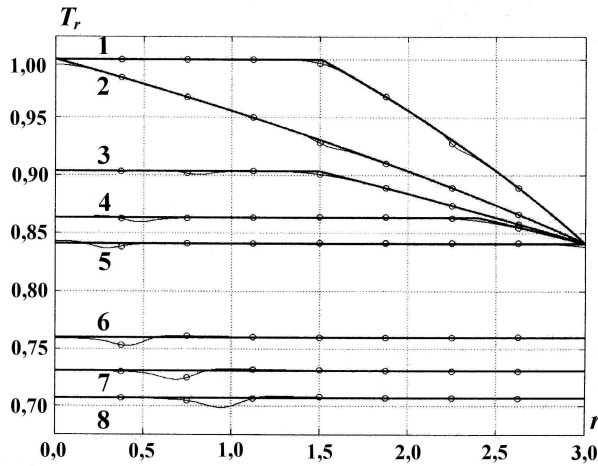


Рис. 3. Задача 1. Профили  $T_r(r, t)$  с граничными условиями типа 1: 1 —  $t = 0,0005$ ; 2 —  $t = 0,001$ ; 3 —  $t = 0,0015$ ; 4 —  $t = 0,0018$ ; 5 —  $t = 0,002$ ; 6 —  $t = 0,003$ ; 7 —  $t = 0,0035$ ; 8 —  $t = 0,004$ ; — — точное решение; -o- — TVD-схема

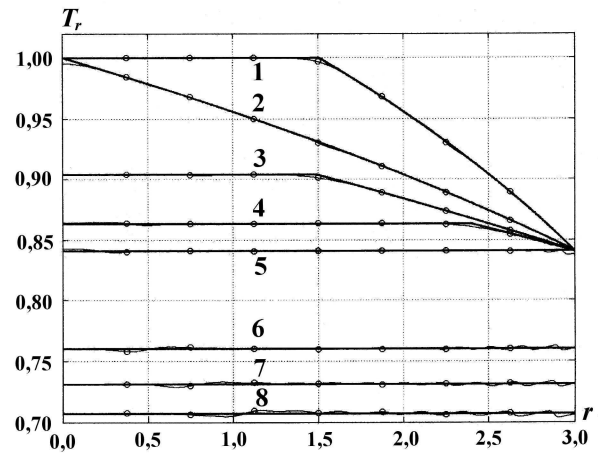


Рис. 4. Задача 1. Профили  $T_r(r, t)$  с граничными условиями типа 2: 1 —  $t = 0,0005$ ; 2 —  $t = 0,001$ ; 3 —  $t = 0,0015$ ; 4 —  $t = 0,0018$ ; 5 —  $t = 0,002$ ; 6 —  $t = 0,003$ ; 7 —  $t = 0,0035$ ; 8 —  $t = 0,004$ ; — — точное решение; -o- — TVD-схема

По пространству берется неравномерная сетка. Вблизи внутренней и внешней границ интервал равен  $10^{-4}$ . К середине системы размер ячейки увеличивается по геометрической прогрессии. Всего 133 пространственных интервала. В пространстве направлений — квадратура Гаусса с числом интервалов от 2 до 32. Шаг по времени —  $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$ . Максимальное значение величины  $\frac{c\tau}{h}\sqrt{D}$  равно 6 000. Конечное время —  $t = 0,008$ .

На левой границе задано  $I_{\mu>0} = I_L = 2055$ , на правой — условие свободной поверхности:  $I_{\mu<0} = 0$ .

В вакууме стационарное решение дает постоянное значение для полного потока через всю поверхность,  $S = \text{const}$ , и кусочно-постоянную по  $\mu$  интенсивность излучения  $I(r, \mu) = \begin{cases} 0, & -1 \leq \mu < \mu_0; \\ I_L, & \mu_0 \leq \mu \leq 1. \end{cases}$

Параметр  $\mu_0$  выбирается из условия равенства потоков на внешней и внутренней поверхностях:

$$S(r_L) = \int_0^1 \mu r_L^2 I d\mu = \frac{r_L^2 I_L}{2} = 164,4; \quad S(r_R) = \int_{-1}^1 \mu r_R^2 I d\mu = r_R^2 I_L \int_{\mu_0}^1 \mu d\mu = \frac{r_R^2 I_L}{2} (1 - \mu_0^2); \quad \mu_0^2 = 1 - \frac{r_L^2}{r_R^2}.$$

Таким образом, температура фотонов и коэффициент квазидиффузии равны

$$T_r(r) = T_L^4 \sqrt{0,5 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{r_L^2}{r^2}} \right)};$$

$$D(r) = \frac{\int_{\mu_0}^1 \mu^2 d\mu}{\int_{\mu_0}^1 d\mu} = \frac{1 - \mu_0^3}{3(1 - \mu_0)} = \frac{1}{3} (1 + \mu_0 + \mu_0^2) = \frac{1}{3} \left( 2 - \frac{r_L^2}{r^2} + \sqrt{1 - \frac{r_L^2}{r^2}} \right),$$

где  $\mu_0^2 = 1 - r_L^2/r^2$ . При  $r_R = 10r_L$  получаем, что на правой границе излучение сосредоточено в очень узком интервале  $\Delta\mu \approx 0,005$ .

Профили коэффициента квазидиффузии  $D(r)$  и температуры фотонов  $T_r(r)$  на момент времени  $t = 0,008$  с числом интервалов квадратуры Гаусса от 2 до 32 приводятся на рис. 5, 6. Из рисунков

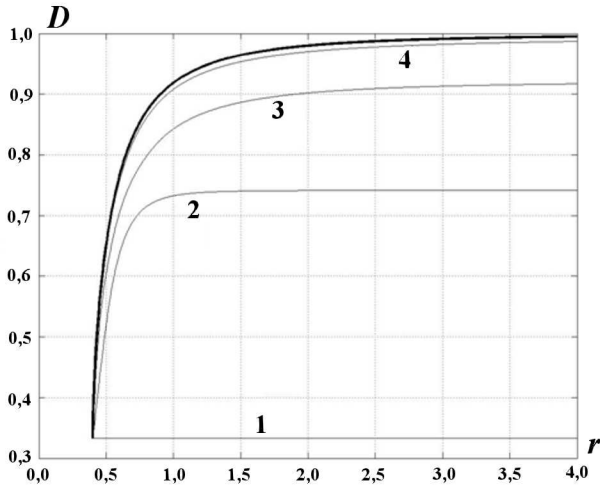


Рис. 5. Задача 2. Профили  $D(r, t = 0,008)$ : 1 —  $\hat{j} = 2$ ; 2 —  $\hat{j} = 4$  и т. д.; ——— — точное решение;

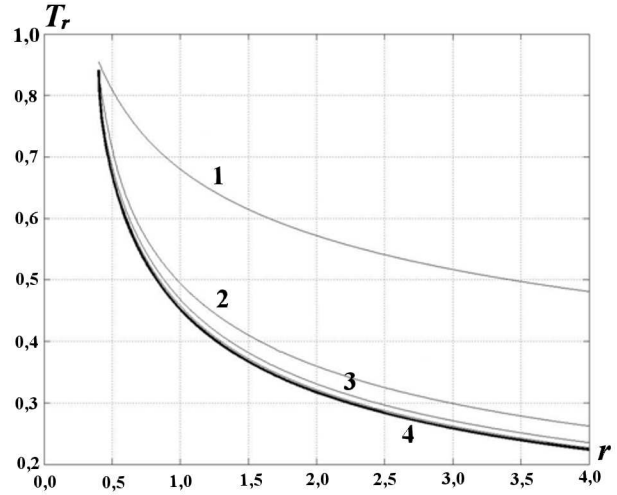


Рис. 6. Задача 2. Профили  $T_r(r, t = 0,008)$ : 1 —  $\hat{j} = 2$ ; 2 —  $\hat{j} = 4$  и т. д.; ——— — точное решение;

видно хорошее согласие коэффициента квазидиффузии и температуры фотонов с точным решением при числе интервалов квадратуры Гаусса, равном 32. Немонотонные эффекты, появляющиеся в потоках в центрах ячеек [8], на коэффициентах квазидиффузии не проявляются.

**Задача 3.** Рассматривается вторая задача Флека в сферически-симметричной геометрии [7]. На левой границе задано излучение планковского источника температуры  $B_\nu(T = 1)$ , на правой — условие свободной поверхности. В областях 1 и 3 ( $1 \leq r \leq 3$ ;  $3,4 \leq r \leq 5$ ) коэффициент поглощения равен  $\kappa_g = 27(1 - e^{-\varepsilon_g/T})/\varepsilon_g^3$ , в области 2 ( $3 \leq r \leq 3,4$ )  $\kappa_g = 10\,000(1 - e^{-\varepsilon_g/T})/\varepsilon_g^3$ . Всюду  $E = 0,81T$ ,  $k = 0$  и  $T^0 = 0,001$ . Критерий сходимости:  $|T^{\nu+1} - T^\nu| \leq 10^{-4}(1 + T^{\nu+1})$ .

Использовались следующие сетки:

- 1) по пространству:  $r_1 = 1; 1,004; 1,04; r_4 = 1,1; \dots; r_{22} = 2,9 (\Delta r = 0,1); r_{23} = 2,987; 2,999; 3; 3,001; 3,004; 3,013; r_{29} = 3,04; \dots; r_{37} = 3,36 (\Delta r = 0,04); r_{38} = 3,396; 3,4; 3,404; 3,44; r_{42} = 3,5; \dots; r_{57} = 5 (\Delta r = 0,1)$ ;
- 2) по группам,  $\hat{g} = 15$ :  $g_{1\dots 15} = 0; 0,3; 0,6; 0,8; 1,2; 1,5; 1,8; 2,4; 2,7; 3; 4; 5; 7; 9; 11; 15$ ;
- 3)  $\tau = 0,0002; \hat{j} = 12$ .

Максимальное значение величины  $\frac{c\tau}{h}\sqrt{D}$  равно 600. В качестве *точного* решения использовался результат, полученный в расчетах на сходимость по кинетическому уравнению.

На рис. 7–9 приведены профили температуры вещества на три момента времени. Выбраны характерные моменты движения тепловой волны:  $t = 0,004$  — прогрев области 1 (кривые 1);  $t = 0,028$  — вхождение и начало распространения излучения в плотном веществе (кривые 2);  $t = 0,15$  — прогрев области 2 и выход на стационарный режим (кривые 3).

На рис. 7 приводятся решения, полученные по TVD-схеме с разными ограничителями по сравнению с базовой схемой. Сравнивались три ограничителя:

- 1)  $\min \text{ mod}$ :  $L(a, b) = 0,5(\text{sign}(a) + \text{sign}(b)) \min(|a|, |b|)$ ;
- 2) Чакравати—Ошера:  $L(a, b) = 0,5(1 - \theta) \min \text{ mod}(a, \beta b) + 0,5(1 + \theta) \min \text{ mod}(\beta a, b)$ ,  $\theta = \frac{1}{3}$ ,  $\beta = 3$ ;
- 3) Ван Альбада:  $L(a, b) = \frac{(a^2 + \varepsilon)b + (b^2 + \varepsilon)a}{a^2 + b^2 + 2\varepsilon}$ ,  $\varepsilon = 10^{-18}$ .

Из рис. 7 видно, что ограничитель Ван Альбада дает результаты лучше ограничителя  $\min \text{ mod}$ , ограничитель Чакравати—Ошера — лучше ограничителя Ван Альбада, а базовая схема — хуже всех.

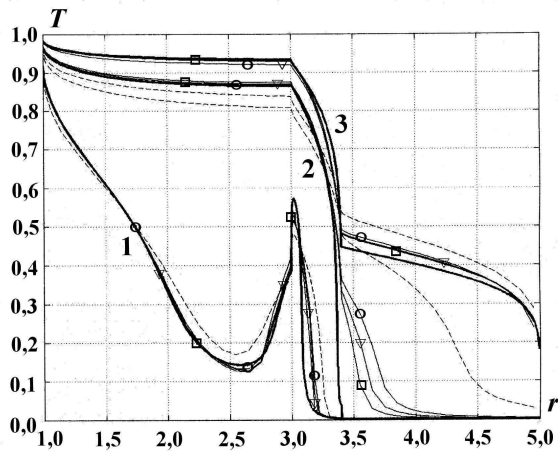


Рис. 7. Профили  $T(r, t)$ : - - - базовая схема;  $\circ$  — ограничитель min mod;  $\square$  — ограничитель Чакравати—Ошера;  $\nabla$  — ограничитель Ван Альбада; — — точное решение

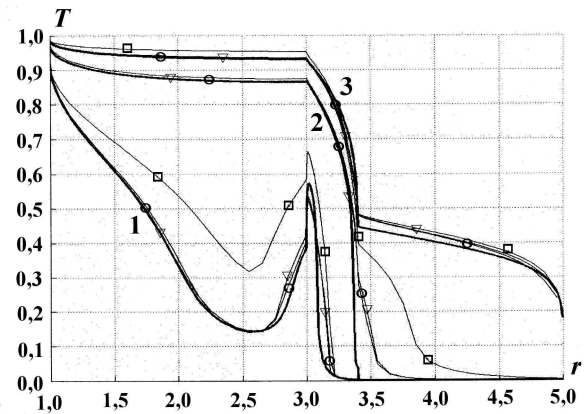


Рис. 8. Профили  $T(r, t)$ :  $\circ$  — кинетическое приближение;  $\square$  —  $P_1$ -приближение;  $\nabla$  — метод квазидиффузии; — — точное решение

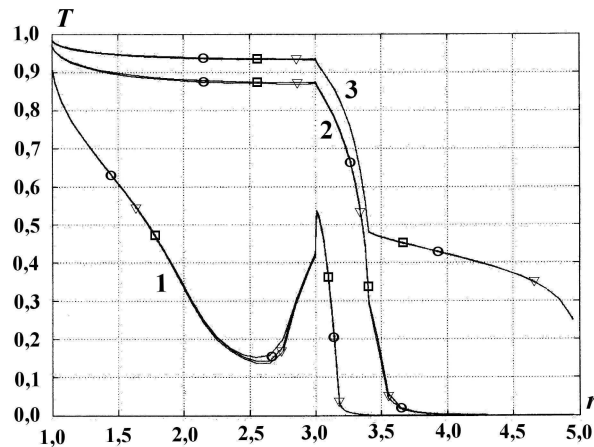


Рис. 9. Профили  $T(r, t)$ :  $\circ$  — тип 1 граничных условий;  $\square$  — тип 2;  $\nabla$  — тип 3

Сравнение результатов расчетов по TVD-схеме и по базовой схеме первого порядка показывает, что для последней требуется сетка значительно более подробная, чем для TVD-схемы, чтобы получить тот же результат.

На рис. 8 приведены профили температуры вещества, посчитанной с использованием метода квазидиффузии, в кинетическом и  $P_1$ -приближениях. Из рисунка видно, что метод квазидиффузии и кинетическое приближение дают близкие результаты, а  $P_1$ -приближение ускоряет прогрев системы.

На рис. 9 приводятся профили температуры, посчитанной по TVD-схеме с разными типами граничных условий (профили температуры, полученные по базовой схеме, не приводятся). Видно, что все типы граничных условий дают на данной задаче близкие результаты.

На рис. 10, 11 приводятся профили коэффициента квазидиффузии для всех групп на моменты времени  $t = 0,004$  и  $t = 0,15$  соответственно. Из рисунков видно, что коэффициенты квазидиффузии для всех групп ведут себя немонотонно и на протяжении всего времени счета задачи находятся в интервале  $(0,3; 1)$ .

Среднее число внешних итераций в варианте с применением ВДМ-метода ускорения за 20 первых временных шагов для базовой схемы составляет 13, а для TVD-схемы — 15, т. е. последняя сходится несколько медленнее. После 20 первых временных шагов число внешних итераций значительно уменьшается. При счете без ускорения число итераций на первых шагах исчисляется тысячами.

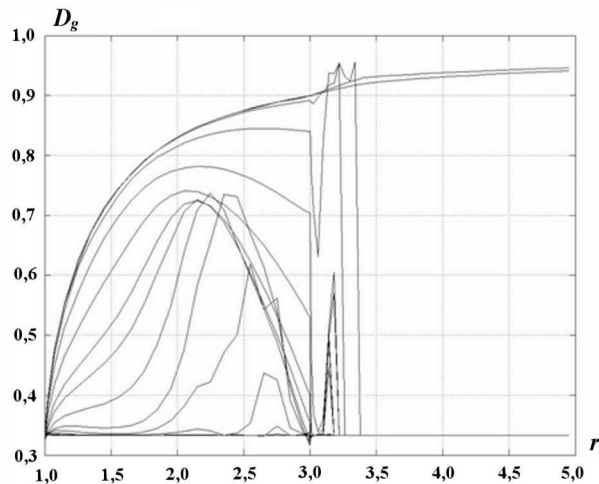


Рис. 10. Профили  $D_g(r, t = 0,004)$

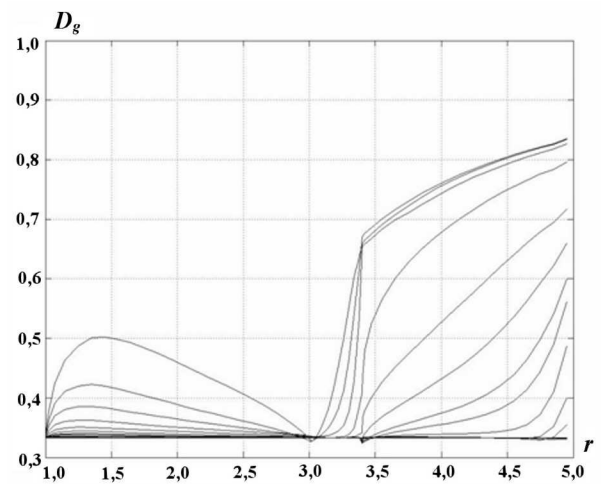


Рис. 11. Профили  $D_g(r, t = 0,15)$

Во всех задачах проводилось также сравнение времени счета в кинетическом и квазидиффузионном приближениях. На основании численных расчетов можно сделать вывод, что метод квазидиффузии показывает результаты, близкие к кинетическому приближению, при значительно меньших вычислительных затратах.

### Список литературы

1. Гольдин В. Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1964. Т. 4, № 6. С. 1078—1087.
2. Вершинская А. С., Гаджиев А. Д., Грабовенская С. А., Шестаков А. А. Применение TVD-подхода к решению уравнения переноса теплового излучения в  $P_1$ -приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 21—36.
3. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Метод выделения диагональной матрицы для численного решения уравнения переноса излучения в  $P_1$ -приближении по схеме РОМБ // Там же. 2006. Вып. 1. С. 3—13.
4. Гаджиев А. Д., Завьялов В. В., Шестаков А. А. Применение TVD-подхода к  $DS_n$ -методу решения уравнения переноса теплового излучения // Там же. 2009. Вып. 2. С. 37—48.
5. Гаджиев А. Д., Селезнев В. Н., Романова Е. М., Шестаков А. А. Методика ТОМ4-КД для математического моделирования двумерных уравнений переноса излучения в многогрупповом квазидиффузионном приближении // Там же. 2001. Вып. 4. С. 48—59.
6. Зуев А. И., Карлыханов Н. Г. Об одном методе решения уравнений радиационной газодинамики // Там же. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1983. Вып. 1(12). С. 57—60.
7. Fleck J. A., Cummings J. D. An implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8. P. 313—342.
8. Завьялов В. В., Шестаков А. А. О поведении потока для некоторых разностных схем решения задач теплового излучения в кинетическом приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2008. Вып. 2. С. 21—30.