

УДК 519.6

ДВУМЕРНАЯ СКАЛЯРНАЯ ИСКУССТВЕННАЯ ВЯЗКОСТЬ МЕТОДИКИ ЭГАК В СФЕРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Ю. В. Янилкин, О. О. Топорова
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Рассматривается задача о сферическом сжатии оболочки, внутри которой содержится легкий газ. Показано, что при численном решении этой задачи важное значение имеет форма искусственной вязкости. На сферических сетках классическая вязкость Неймана—Рихтмайера может давать большую погрешность, связанную с тем, что в ней не учитывается однородное сжатие вещества при сферическом сжатии. Значительного уменьшения этой погрешности в данной работе удалось добиться применением ранее предложенной авторами вязкости.

Ключевые слова: газодинамика, искусственная вязкость, двумерные течения, разностная схема.

Введение

Начиная с работы Неймана и Рихтмайера [1], в разностных схемах широко используется метод сквозного счета ударных волн (УВ) с помощью искусственной скалярной квадратичной вязкости (порядка $O(h^2)$, где h — линейный пространственный размер ячейки счетной сетки), которая вводится в систему уравнений газодинамики в лагранжевых переменных как аддитивная добавка к давлению. Затем для уменьшения осцилляций, возникающих за фронтом УВ, квадратичная вязкость стала использоваться в комбинации с линейной вязкостью первого порядка малости по пространству (см., например, [2]).

Однако оказалось, что предложенная Нейманом и Рихтмайером форма вязкости в двумерном случае имеет существенные недостатки, приводящие к значительным погрешностям в решении. В [3] приводится обзор работ, посвященных искусственной вязкости и предложена новая форма скалярной вязкости для двумерных течений, реализованная в методике ЭГАК, а также на тестовых расчетах показана ее эффективность при моделировании ряда сложных с точки зрения вязкости течений.

Данная работа является продолжением работы [3]. В ней рассматривается задача о сферическом сжатии оболочки, внутри которой содержится легкий газ. Проблема заключается в

том, что многие методики используют скалярную вязкость типа Неймана—Рихтмайера, обладающую заметной погрешностью моделирования именно сферически-сходящихся слоев. От корректного решения данной проблемы зависит точность моделирования движения сферически-симметричных (в целом) оболочек и слоев, проходящих большие расстояния до максимальных сжатий.

Искусственная вязкость в методике ЭГАК

Методика ЭГАК [4] предназначена для решения уравнений газодинамики в лагранжево-эйлеровых переменных, при этом аппроксимация уравнений производится в два этапа. На первом этапе решаются уравнения газодинамики в лагранжевых переменных, на втором этапе — уравнения адвекции.

При решении уравнений газодинамики для расчета ударно-волновых течений в виде аддитивной добавки к давлению используется скалярная квадратичная искусственная вязкость типа Неймана—Рихтмайера в комбинации с линейной вязкостью, которая имеет вид

$$q^n = \begin{cases} C_1 \rho^n (h^n \operatorname{div} \vec{u}^n)^2 - C_0 \rho^n c h^n \operatorname{div} \vec{u}^n, & \text{если } \operatorname{div} \vec{u}^n < 0; \\ 0, & \text{если } \operatorname{div} \vec{u}^n > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где C_1 и C_0 — коэффициенты; c — скорость звука. Кроме того, в выражение (1) входят характерный размер h и дивергенция скорости $\text{div} \vec{u}$ ячейки, которые должны быть определены.

Ниже будут рассмотрены три типа вязкости, отличающиеся только способом вычисления h и $\text{div} \vec{u}$.

В вязкости 1 (скалярная вязкость) характерный размер h определяется независимо от направления УВ и его значение находится в промежутке между предельными значениями — размером меньшей стороны ячейки, если стороны отличаются, и значением $h/\sqrt{2}$, получающимся в случае квадратной ячейки [3]. Дивергенция скорости аппроксимируется обычным образом [3]:

$$\text{div} \vec{u} = \frac{\Delta V}{V \tau},$$

где ΔV — приращение объема ячейки за счет потоков на ее сторонах; V — объем ячейки; τ — временной шаг.

В вязкости 2 (ориентированная вязкость) характерный размер определяется в направлении УВ, т. е. он фактически равен размеру ячейки в направлении УВ при ее распространении вдоль линий сетки. Дивергенция скорости считается так же, как и для вязкости 1. Формулы определения размера ячейки приводятся в работе [3].

В вязкости 3 (ориентированная вязкость с учетом однородного сжатия) характерный размер ячейки определяется в направлении УВ так же, как для вязкости 2, а из дивергенции скорости вычитается ее безударная часть.¹ Алгоритмы определения безударной части дивергенции также приводятся в работе [3].

Сферическое схождение оболочки.

Постановка задачи и расчетов

Начальная геометрия задачи показана на рис. 1 (Ox — ось симметрии; $R1 = 1$; $R2 = 0,8$).

В области 1 $\rho_0 = 0,01$; $e_0 = 0$; $U_0 = 0$; УРС — для идеального газа с $\gamma = 5/3$. В области 2 $\rho_0 = 10$; $e_0 = 0$; $U_0^R = -1$; УРС — трехчлен с константами $\rho_0 = 10$, $c_0 = 4$, $n = 5$, $\gamma = 2$, с зану-

¹Понятие безударной части дивергенции (сжатия) используется для обозначения части дивергенции за счет однородного сжатия вещества, когда оно сжимается одинаково в любой точке рассматриваемой локальной области. Подобное сжатие имеет место при сферическом сжатии к центру, цилиндрическом сжатии к оси цилиндра и плоском сжатии к жесткой стенке.

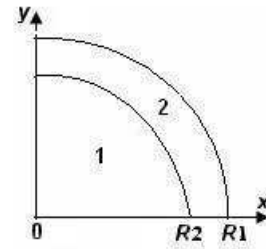


Рис. 1. Геометрия задачи о сферическом сжатии оболочки

лением давлений при $P < 0$. На границе $R1 = 1$ давление $P = 0$.

Расчеты проводились по методике ЭГАК в нескольких постановках:

1. *Квазилагранжева* — сетка сферическая с центром в точке $x = 0$; при этом обе границы оболочки остаются лагранжевыми линиями, а между ними используется интерполяция сетки равномерно по расстоянию. Для столбцов используется равномерное по углу разбиение. Отношение количества строк в областях 1 и 2 берется равным 10, т. е. если оболочке соответствует 40 ячеек, то газу — 4.
2. *Лагранжево-эйлерова* — сетка сферическая; при этом внешняя граница остается лагранжевой линией, а внутри области сетка перестраивается на каждом счетном шаге равномерно по расстоянию вдоль радиуса и равномерно по углу.
3. *Эйлерова* (неподвижная) — квадратная счетная сетка.
4. *Лагранжево-эйлерова на сферической сетке со сдвинутым центром*. Аналогична определенной в п. 2; отличие только в том, что центр системы в этом случае сдвинут на расстояние $x = 0,2$ и остается там до конца расчета.

В расчетах варьировалась вязкость, а именно были использованы три указанные выше типа вязкости. Кроме того, варьировалась сетка, как по радиусу, так и по углу.

Качественная картина поведения вязкости

Рассмотрим качественную картину поведения скалярной вязкости 1 в расчетах на сферических

сетках, условный фрагмент которых показан на рис. 2. На этом рисунке по оси абсцисс отложен радиус системы и на этой оси показаны точки $R1_h$ и $R2_h$, являющиеся условными границами двух областей. В области 1 (при $R > R1_h$) $h_R \ll h_\varphi$ (h_R — размер ячейки в радиальном направлении, h_φ — в угловом), соответственно характерный размер ячейки в скалярной вязкости определяется в радиальном направлении ($h = h_R$). В области 2 (при $R < R2_h$) $h_R \gg h_\varphi$ и $h = h_\varphi$. Между точками $R1_h$ и $R2_h$ находится промежуточная область 3, в которой радиальный и поперечный размеры ячеек сравнимы, т. е. $h_R \sim h_\varphi$.

На том же рис. 2 на прямой OB нанесены точки $R1_{div}$ и $R2_{div}$, являющиеся условными границами двух областей: в одной из них ($R \gg R1_{div}$) полная дивергенция фактически совпадает с дивергенцией с учетом безударной ее части, т. е. она имеет нулевую безударную часть; в другой ($R \ll R2_{div}$) безударная часть дивергенции сравнима с ударной. Между этими областями также имеется переходная область.

Два указанных вида границ довольно условны и не совпадают друг с другом. Дело в том, что граница области, в которой важно учесть безударную часть дивергенции, не зависит от размера конкретной ячейки, а полностью определяется самой задачей и количеством ячеек в этой области в радиальном направлении, в то время как границы области для характерного размера ячейки зависят только от сетки.

При таком разделении счетной области в целом по задаче будем иметь три области. В первой области ($R > R1_{div}$ & $R > R1_h$) и характерный размер ячейки, и дивергенция скорости вычисляются корректно. Во второй области ($R < R2_{div}$ & $R < R2_h$) и то, и другое вычисляется некорректно. В третьей, промежуточной области возможны разные ситуации в зависимости от положения граничных точек. На рис. 2 изображен один из возможных случаев.

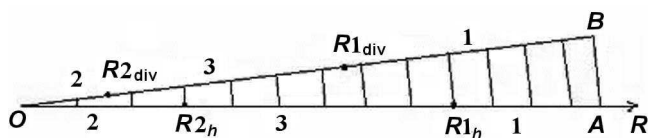


Рис. 2. Иллюстрация областей определения дивергенции скорости и характерного размера ячейки для скалярной вязкости

В зависимости от положения указанных границ и границ слоев возможны следующие сценарии их сжатия при сферическом однородном схождении (рассматриваются только вязкости 1 и 2, так как для вязкости 3 результат не зависит от этих параметров):

1. Слои находятся в области 1. В этом случае счет будет выполняться совершенно корректно по любой из двух вязкостей.
2. Слои находятся в области 2. В этом случае при счете по скалярной вязкости 1 можно получить неконтролируемый результат. Сжатия могут меняться от заниженных до завышенных в зависимости от соотношения количества строк и столбцов сетки, так как в этой области характерный размер занижается, а дивергенция, наоборот, завышается. При использовании ориентированной вязкости 2 сжатия будут занижены из-за того, что один сомножитель в вязкости (дивергенция скорости) будет завышен.
3. В области 3 при достаточно больших радиусах в расчетах с вязкостью 1 сжатия будут завышены, так как в этом случае дивергенция считается корректно, а характерный размер занижается, а при использовании вязкости 2 счет будет корректен. При обратной ситуации, т. е. при достаточно малых радиусах, но сетках, вытянутых в поперечном направлении, в расчетах с использованием обеих вязкостей сжатия будут занижены, так как здесь характерный размер определяется корректно, а дивергенция скорости завышена. Остальные случаи могут дать неконтролируемые результаты по сжатиям, различающиеся для разных вязкостей.

В общем случае авторы затрудняются назвать конкретные критерии для определения указанных границ областей. Цель данного анализа — указать на сложность оценки результатов расчетов с точки зрения корректности определения каждой из двух величин, входящих в формулу для вязкости.

Прежде чем приступить к обсуждению результатов расчетов данной задачи, отметим, что на общей точности расчетов в лагранжево-эйлеровой и эйлеровой постановках, кроме формы вязкости, сказываются и такие обстоятельства, как условия замыкания уравнений газодинамики в смешанных ячейках, точность аппроксимации уравнения адвекции, соотношения

размеров ячеек на стыке разноплотных веществ, распределение вязкости ячейки между компонентами и др.

Введем некоторые обозначения для сокращения текста статьи. Ниже для расчетов на сгущающихся в обоих направлениях сетках будем использовать обычно принятое понятие и термин *сходимость* при сравнении результатов с точным решением. Кроме того, будем использовать также специальный термин (введенный в работе [5]) *численная сходимость* (или *сходимость*, когда это не вызывает разночтений) для серий расчетов на сгущающихся сетках без привязки к точному решению. При этом для сферической сетки используем термины *R-сходимость* при вариации сетки в радиальном направлении и постоянном количестве столбцов и *Rφ-сходимость* — при пропорциональном изменении количества строк и столбцов (*φ-сходимость* при вариации сетки в угловом направлении и постоянном количестве строк в данной задаче не имеет смысла и поэтому не рассматривается).

Хочется также обратить внимание на то обстоятельство, что применение ориентированной вязкости фактически соответствует использованию *одномерной вязкости* в *двумерной методике* (далее, если не оговорено особо, именно это понимается под *одномерной методикой*).

Результаты расчетов

Для некоторых расчетов в квазилагранжевой постановке были сосчитаны дисбалансы полной энергии системы. Так как разностная схема методики ЭГAK не балансна по полной энергии, необходимо было оценить эти дисбалансы с точки зрения влияния их на результаты расчетов. Авторы сделали подобные оценки для типичных расчетов: здесь дисбалансы энергии составляют десятые доли процента, практически не зависят от количества строк и столбцов сетки и, естественно, не сказываются на тех выводах, которые будут сформулированы ниже.

Основные результаты расчетов — это максимальные плотности газа. *Точное* значение максимальной плотности газа получено Ю. А. Бондаренко в численных расчетах на сходимость по одномерной методике [5] и равно ~ 25 ; решение получено с использованием тензорной вязкости с учетом безударной части сжатия. Отметим, что для целей настоящей работы знание точного решения даже не требуется, так как все выводы

касаются лишь качественного поведения получаемых решений.

Ниже, если не оговорено особо, на всех рисунках приводятся значения максимальной плотности газа.

Расчеты на квазилагранжевых сетках.

Из анализа результатов расчетов задачи в данной постановке можно сформулировать несколько утверждений, которые справедливы для расчетов и в других постановках для любой сферической (цилиндрической) системы с преимущественно сферическим (цилиндрическим) движением без ударно-волнового сжатия.

1. *Скалярная вязкость 1 на сферических сетках в двумерных методиках завышает сжатия по сравнению с одномерной методикой.* Данное утверждение следует из того, что при сжатии к центру, начиная с какого-то расстояния, характерный размер ячейки определяется не в радиальном направлении, а в поперечном, так как этот размер становится меньше радиального размера, а в пределе (при бесконечном количестве столбцов сетки) он стремится к нулю. Соответственно вязкость также стремится к нулю. Отсюда следует, что в сферических течениях на сферических сетках скалярная вязкость в двумерных методиках занижается по сравнению с вязкостью одномерной методики. И также естественно, что степень уменьшения вязкости коррелирует с количеством строк сетки, так как от этого зависит количество ячеек, в которых характерный размер определяется в поперечном направлении.

2. *С использованием скалярной вязкости 1 в расчетах на Rφ-сходимость на сферических сетках можно получить различающиеся результаты по сжатиям слоев при изменении соотношения количества строк и столбцов.* Данный вывод можно сделать из рис. 3, на котором приводятся максимальные значения плотности газа для трех серий расчетов в квазилагранжевой постановке. Каждая из приведенных на рисунке кривых представляет собой кривую сходимости при одновременном изменении количества строк (N) и столбцов (M). Кривые отличаются соотношением количества строк и столбцов (в номинальных расчетах $N_0 \times M_0 = 44 \times 12, 44 \times 24, 44 \times 48$).

При увеличении количества столбцов в номинальном расчете погрешность вязкости, связанная с выбором характерного размера ячейки поперек течения, играет все большую роль, соот-

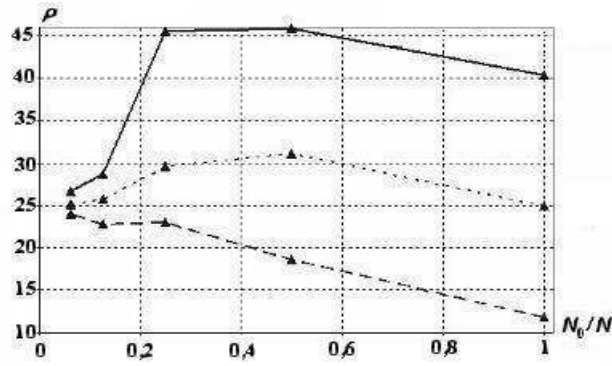


Рис. 3. Расчеты на $R\varphi$ -сходимость в квазилагранжевой постановке (вязкость 1, $N_0 = 44$): —▲— — $M_0 = 12$; - - ▲ - - $M_0 = 24$; —▲— — $M_0 = 48$

ответственно все больше завышая сжатия. При этом кривые сходимости имеют нелинейный характер, что затрудняет получение сходящегося решения, которое обычно получается экстраполяцией нескольких точек (как правило, трех) на сгущающихся сетках. В данной задаче такая оценка по первым трем точкам дает значительно различающиеся (на десятки процентов) решения. Поэтому в расчетах подобных задач на *плотных* сетках, вообще говоря, ни в один момент нельзя быть уверенным, что получается сходящееся решение.

В то же время из рис. 3 видно, что при подходящем выборе количества строк и столбцов (нижняя кривая с $M_0 = 12$) кривая сходимости близка к линейной, что позволяет получать сходящееся решение практически по первым трем точкам этой кривой. Однако заметим, что в проведенных расчетах при малом количестве столбцов сжатия газа ниже точного решения, что может объясняться разными причинами (см. выше). Исследованием возможных причин и их влиянием на решение авторы не занимались, так как для основных выводов работы это не принципиально.

Таким образом, с достаточной степенью общности можно сказать, что в расчетах двумерных задач со скалярной вязкостью 1 сжатия сферических слоев будут завышены по сравнению с полученными по одномерной методике, что особенно будет заметно при относительно большом количестве ячеек с радиальными размерами, сравнимыми с радиусами слоев (т. е. при малом количестве строк, приходящихся на исследуемый слой). Этот эффект тем больше, чем дальше происходит однородное сжатие слоев при движении к центру.

Расчеты на $R\varphi$ -сходимость показывают, что с использованием вязкости 1 можно получать вполне приемлемые по точности результаты. При этом при подходящем выборе числа строк и столбцов сетки имеет место практически линейный характер кривой сходимости. Однако надо иметь в виду, что заранее это соотношение в реальных расчетах не известно. А при неудачном его выборе сходимость имеет нелинейный характер, при этом степень нелинейности коррелирует со степенью отличия сетки от *хорошей*.

Примечание. Один из возможных способов определения приемлемого соотношения строк и столбцов — проведение расчетов на φ -сходимости. При удачном выборе этого соотношения вариация сетки в угловом направлении результат меняет незначительно.

Из сказанного, вообще говоря, можно также сделать следующий вывод: расчеты со скалярной вязкостью 1 на $R\varphi$ -сходимость на малом количестве вариаций сетки проводить надо осторожно, так как схождение к нужному результату в этом случае вовсе не гарантировано из-за нелинейного характера кривой сходимости.

3. На малом количестве вариаций сферической сетки с использованием скалярной вязкости 1 сходящийся результат надежно можно получить в расчетах на R -сходимость. Такой странный, на первый взгляд, вывод противоречит общепринятому способу получения сходящегося результата при расчетах на $R\varphi$ -сходимость. Однако он следует из анализа рис. 4, на котором приводятся зависимости максимальной плотности газа в расчетах на R -сходимость при фиксированном количестве столбцов.

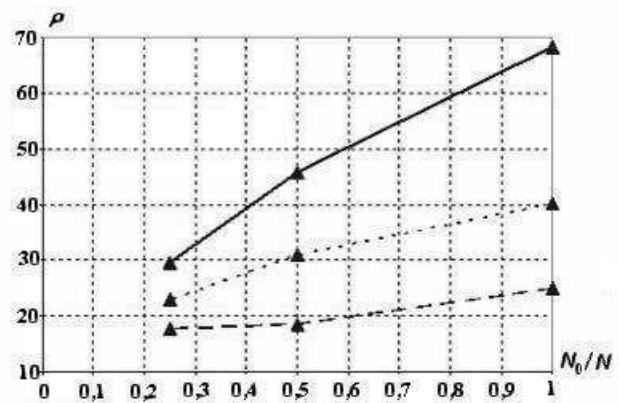


Рис. 4. Расчеты на R -сходимость в квазилагранжевой постановке (вязкость 1, $N_0 = 44$): —▲— — $M = 24$; - - ▲ - - $M = 48$; —▲— — $M = 96$

Как видно из рис. 4, при фиксированном количестве столбцов сетки результаты всех расчетов сходятся к одному и тому же значению плотности практически по линейному закону. Объясняется это тем, что только при таком подходе можно обеспечить уменьшение отношения количества строк, в которых характерный размер выбирается в поперечном направлении, к общему количеству строк в задаче при увеличении количества строк.

На рис. 5 приводятся результаты расчетов на $R\varphi$ -сходимости для вязкостей 2 и 3. Расчеты показывают, что с использованием этих вязкостей имеет место монотонная сходимость результатов; при этом для обеих вязкостей результаты расчетов, как это и должно быть, практически не зависят от соотношения количества строк и столбцов (в отличие от вязкости 1). Отсюда следует, что результат на сгущающихся сетках не изменится и при фиксированном числе столбцов, что имело место и для вязкости 1.

Из анализа рис. 4 и 5 следуют также выводы 4 и 5.

4. Ориентированная вязкость 2 в расчетах на сферических сетках в двумерных методиках занижает сжатия слоев, но позволяет получать сходящийся результат на малом количестве вариаций сетки.

Как видно из сравнения рис. 4 и 5, сжатие газа в расчете с вязкостью 2 значительно меньше рассчитанного с вязкостью 1. Таким образом, учет направления УВ при вычислении характерного размера ячейки меняет результат (и значи-

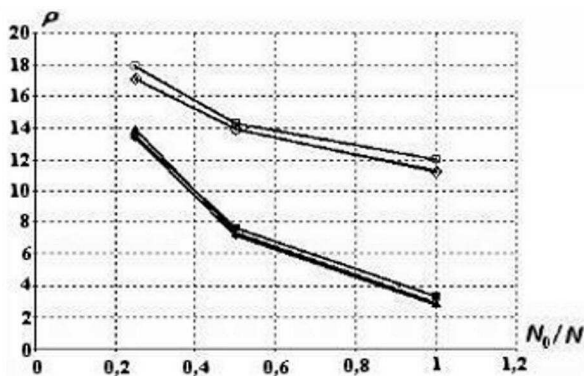


Рис. 5. Расчеты на $R\varphi$ -сходимости в квазилагранжевой постановке с вязкостями 2 и 3: —◆— — вязкость 2, $M_0 = 12$; —▲— — вязкость 2, $M_0 = 24$; —■— — вязкость 2, $M_0 = 48$; —◇— — вязкость 3, $M_0 = 12$; —△— — вязкость 3, $M_0 = 24$; —□— — вязкость 3, $M_0 = 48$

тельно) по сравнению с использованием скалярной вязкости. Видно, что с увеличением числа строк сетки значение плотности газа увеличивается, тем не менее оно значительно меньше точного решения, т. е. при кажущемся более правильным счете результат получается хуже.

Причиной этого парадоксального, на первый взгляд, результата является дивергенция скорости ячейки, которая также входит в формулу для вязкости. Здесь как раз сказывается тот факт, что в общую дивергенцию входит и ее часть, связанная с однородным сжатием вещества за счет сферического схождения. Поэтому расчеты с ориентированной вязкостью 2 дают заниженные сжатия слоев. А вот расчеты со скалярной вязкостью 1 могут дать более правильный результат за счет того, что один из множителей в формуле для вязкости (характерный размер ячейки) занижен. Конечно, этот результат, достигнутый неконтролируемыми средствами (так как степени завышения дивергенции скорости и занижения характерного размера ячейки не обязательно совпадают), может не повториться в других случаях, например, в расчетах на квадратных сетках. Таким образом, при использовании скалярной вязкости 1 получаются большие значения сжатий по сравнению с расчетами с ориентированной вязкостью 2 при одной и той же дивергенции скорости.

Однако необходимо отметить, что результат, полученный в расчетах на $R\varphi$ -сходимости с использованием вязкости 2, может отличаться от точного решения, так как в это решение входит и безударная часть сжатия.

5. Ориентированная вязкость 3 с учетом однородного сжатия позволяет получать физически более корректные сжатия слоев по сравнению с использованием как вязкости 2, так и вязкости 1. Вязкость 3 минимизирует обе погрешности скалярной вязкости 1, а именно вычисляет характерный размер в нужном направлении и учитывает однородное сжатие при определении дивергенции скорости. Результаты расчетов с этой вязкостью дают большие сжатия, чем при вязкости 2 (см. рис. 5) и мало зависят от соотношения количества строк и столбцов сетки. Отметим, что этот результат получен математически корректным путем (в отличие от вязкости 1, с которой тоже можно получать подобные результаты; но в ней при том, что один множитель завышен, а другой занижен, степени завышения и занижения не обязательно сов-

падают), поэтому он должен повториться в любом другом случае, что и подтверждают расчеты других задач (см. [3]).

Расчеты на лагранжево-эйлеровых сетках. Все вышесказанное в целом справедливо и для расчетов в лагранжево-эйлеровой постановке. Для примера на рис. 6 приводятся результаты расчетов на сходимость при фиксированном количестве столбцов $M = 24$ и $N_0 = 30$. Видно, что имеется сходимость к одному и тому же результату для всех рассмотренных вязкостей. При этом вязкости 1, 2 дают сходимость снизу, а вязкость 3 дает значение плотности, практически "лежащее на полочке".

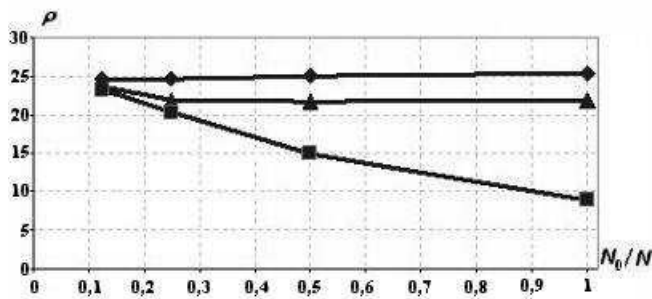


Рис. 6. Расчеты на R -сходимость в лагранжево-эйлеровой постановке при количестве столбцов $M = 24$ ($N_0 = 30$): \blacktriangle — вязкость 1; \blacksquare — вязкость 2; \blacklozenge — вязкость 3

Расчеты на эйлеровых квадратных сетках. Прежде чем рассмотреть результаты этих расчетов, отметим одно обстоятельство, связанное с определением вязкости в расчетах на квадратных сетках. В таких расчетах характерный размер ячейки для вязкостей 2 и 3 вычисляется одинаково и фактически равен размеру стороны ячейки h (с точностью до аппроксимации), для вязкости 1 он равен $h/\sqrt{2}$ (см. [3]). Это означает, что соответствующая квадратичная вязкость 1 будет меньше вязкостей 2 и 3 ровно в 2 раза, так как в вязкости используется h^2 .

При расчетах на несферических сетках всегда возникает вопрос о сохранении сферической симметрии задачи. На рис. 7 приводятся значения средней плотности в зависимости от радиуса, полученные для всех ячеек в расчете с вязкостью 3 на эйлеровой квадратной сетке 120×120 на момент времени $t = 0,35$. Этот рисунок дает наглядное свидетельство того, что сферическая симметрия задачи на такой сетке сохраняется с приемлемой точностью.

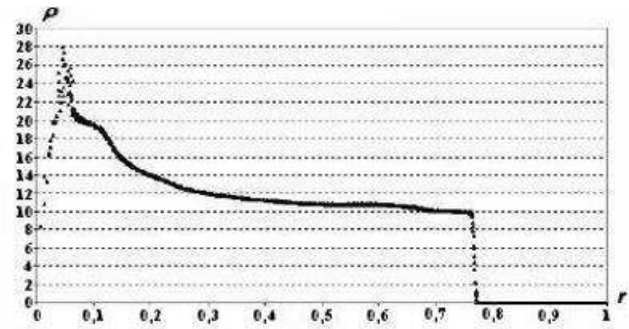


Рис. 7. Профили плотности по всем ячейкам в расчете с вязкостью 3 на эйлеровой квадратной сетке 120×120 , $t = 0,35$

На рис. 8 приводятся зависимости максимальных значений плотности газа от числа ячеек для расчетов на эйлеровых сетках. Из рисунка видно, что расчеты для всех вязкостей дают сходящийся результат, уже полученный выше в расчетах на лагранжево-эйлеровых сетках.

Отметим, что в расчетах со скалярной вязкостью 1 и ориентированной вязкостью 2 имеет место сходимость снизу, причем плотности газа в расчетах со скалярной вязкостью выше, чем с ориентированной. Это совершенно естественно, если учесть, что в скалярной вязкости характерный размер меньше по сравнению с ориентированной вязкостью даже в случае квадратной сетки (см. выше). Отсюда следуют и меньшее значение вязкости, и увеличение плотности газа.

И, наконец, следующий вывод: на квадратных сетках, как и на сферических, расчеты с вязкостью 3 дают более точные результаты, чем с вязкостью 2.

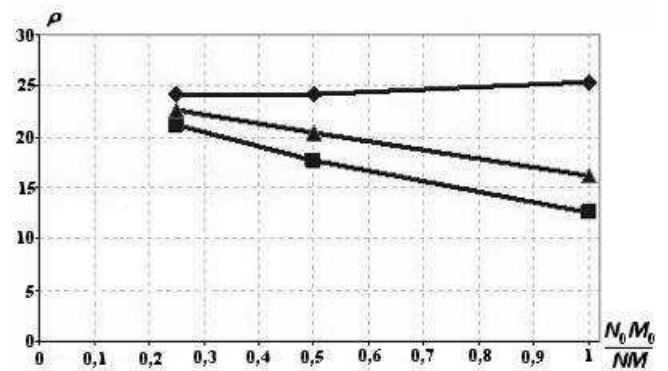


Рис. 8. Расчеты на сходимость на эйлеровых квадратных сетках (в номинальном расчете $N_0 = M_0 = 60$): \blacksquare — вязкость 2; \blacktriangle — вязкость 1; \blacklozenge — вязкость 3

Расчеты в лагранжево-эйлеровой постановке на сферических сетках со сдвинутым центром. В данной постановке проведено лишь три расчета на одной и той же сетке с использованием всех трех вязкостей. В этих расчетах были получены следующие максимальные значения плотности газа: вязкость 1 — 17,5; вязкость 2 — 14,1; вязкость 3 — 22.

На рис. 9 приводятся растровые картины объемных концентраций газа из расчета с вязкостью 3 на моменты времени $t = 0,35$ и $t = 0,366$, близкие к моменту достижения его максимального сжатия. На этих же рисунках приводится счетная сетка. Видно, что сферическая симметрия течения сохраняется с приемлемой точностью.

На рис. 10 приводятся профили плотности по всем ячейкам для вязкостей 1 и 3, которые наглядно показывают как степень сохранения сферической симметрии течения, так и степень сжатия газа для двух вязкостей.

Таким образом, и на сетках со сдвинутым центром вязкость 3 позволяет получать более точные результаты по сравнению с вязкостями 1 и 2, сохраняя при этом сферическую симметрию течения на приемлемом уровне.

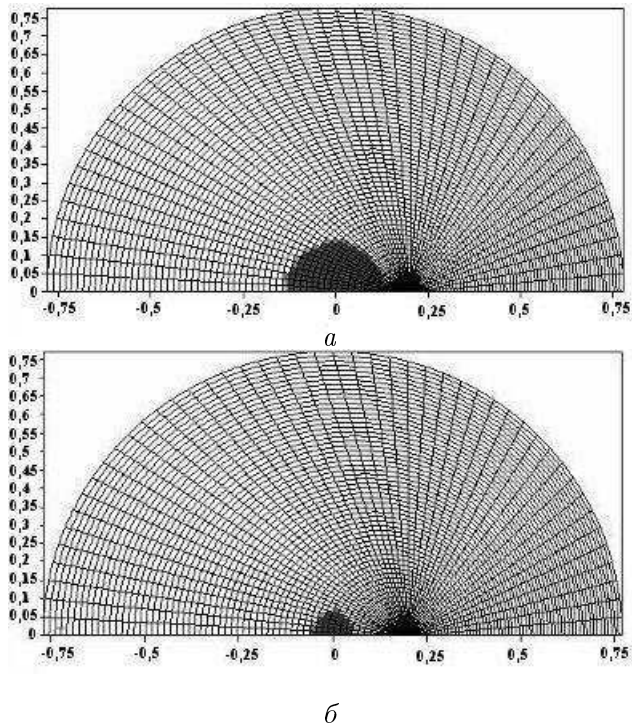


Рис. 9. Растровые картины объемных концентраций (сетка со сдвинутым центром, вязкость 3); а — $t = 0,35$; б — $t = 0,366$

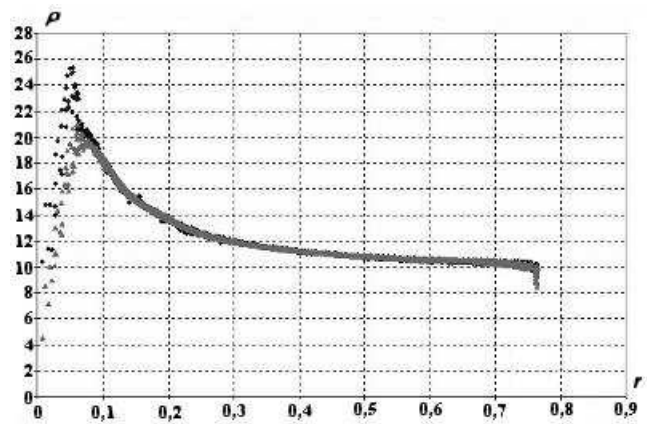


Рис. 10. Профили плотности по всем ячейкам в расчетах на сетке со сдвинутым центром; $t = 0,366$: \blacklozenge — вязкость 3; \blacktriangle — вязкость 1

Выводы

В работе проведено исследование влияния трех форм скалярной вязкости на результаты моделирования одной одномерной сферической задачи на двумерных сетках разного типа по методике ЭГАК.

Показано, что в расчетах сферических систем на сферических сетках с использованием вязкости типа Неймана—Рихтмайера со скалярным размером счетной ячейки могут завышаться сжатия слоев по сравнению с расчетами по одномерной методике. Сравнение с точным решением показывает, что скалярная вязкость в зависимости от количества строк и столбцов расчетной сетки может дать различные сжатия слоев (как большие, так и меньшие). При этом увеличение числа ячеек не всегда приводит к повышению точности расчетов, все зависит от отношения числа ячеек по радиусу к числу ячеек по углу, точнее говоря, от количества ячеек, размеры которых сравнимы с их расстояниями от центра системы.

Показано, что вязкость 2 с ориентированным размером счетной ячейки занижает сжатия, но все же позволяет получать сходящийся результат на сгущающихся сетках.

Разработанная в рамках методики ЭГАК вязкость 3 по сравнению с широко используемыми вязкостями типа Неймана—Рихтмайера (как скалярной, так и ориентированной) обладает повышенной точностью моделирования сферических течений.

В заключение — два замечания. Во-первых, хотя исследование проблем вязкости проведено для двумерного случая по методике ЭГАК, в трехмерных расчетах указанные проблемы приобретают еще большую остроту и тем более требуют своего решения (в настоящее время авторы продолжают свои исследования по трехмерной методике ТРЭК [4]). Во-вторых, в данной работе исследование проведено для четырехугольной сетки и для вязкости, записанной через дивергенцию скорости, однако сформулированные в ней выводы на качественном уровне справедливы для любой другой двумерной или трехмерной методики, использующей вязкости типа Неймана—Рихтмайера (скалярную или ориентированную).

Авторы выражают искреннюю благодарность Ю. А. Бондаренко, С. С. Соколову и В. Ф. Спиридонову за полезные обсуждения и ряд критических замечаний, учет которых значительно улучшил содержание статьи.

Список литературы

1. *Von Neumann J., Richtmyer R. D.* A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks // *J. Appl. Phys.* 1950. Vol. 21, No 3. P. 232—237.
2. *Noh W. F.* Errors for calculation of strong shocks using artificial viscosity and artificial heat flux // *J. Comp. Phys.* 1987. Vol. 72, No 1. P. 78—120.
3. *Янилкин Ю. В., Топорова О. О., Колобянин В. Ю., Фирсова Г. С.* Об одной форме искусственной вязкости // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 2009. Вып. 1. С. 30—41.
4. *Янилкин Ю. В., Беляев С. П., Бондаренко Ю. А. и др.* Эйлеравы численные методики ЭГАК и ТРЭК для моделирования многомерных течений многокомпонентной среды // *Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ.* 2008. Вып. 12. С. 54—65.
5. *Бондаренко Ю. А.* Порядок аппроксимации, порядок численной сходимости и экономичность счета многомерной газовой динамики в переменных Эйлера на примере расчетов задачи "blast waves" // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 2004. Вып. 4. С. 51—61.

Статья поступила в редакцию 28.09.09.
