

УДК 517.956

## ТЕПЛОВЫЕ ВОЛНЫ ОТ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ И ОБЪЕМНЫХ ИСТОЧНИКОВ В ДВУМЕРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ И ПЛОСКИХ ОБЛАСТЯХ

П. И. Певная, Б. П. Тихомиров  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Рассматривается несколько простых сопряженных задач нелинейной теплопроводности в неоднородной среде с источниками энергии. Задачи имеют точное решение и могут использоваться для тестирования расчетных методик и программ. Приведены результаты расчетов двумерных осесимметричных задач, полученные разностным методом с использованием схемы продольно-поперечной прогонки.

*Ключевые слова:* нелинейная теплопроводность, сопряженная задача, сферические, цилиндрические и плоские тепловые волны, составные решения в двумерных областях, тестовые задачи.

### Введение

В настоящей работе рассматривается несколько простых сопряженных двумерных задач, имеющих точное решение, которые можно использовать для калибровки методик и программ численного моделирования нелинейной теплопроводности в среде с источниками энергии.

Работа состоит из трех разделов. В первом разделе описываются базовые (элементарные) решения [1–3], приводятся условия сопряжения решений на плоской границе раздела сред, имеющих в общем случае разные уравнения состояния, пробеги излучения и функции горения. Во втором разделе формулируется несколько двумерных задач о распространении составных тепловых волн от сосредоточенных и объемных источников в осесимметричных областях. Отмечается, что аналогичные задачи могут быть поставлены и для плоских областей. В третьем разделе приведены результаты расчетов нескольких двумерных задач, полученные по методике КИО [4] с использованием разностной схемы продольно-поперечной прогонки.

### 1. Сопряжение автомодельных тепловых волн одного или разных типов симметрии на плоской границе раздела сред

В неограниченной области  $D = \{-\infty < x < +\infty, 0 < y < +\infty\}$  рассматривается двумерное уравнение теплопроводности с объемным источником, мощность которого является функцией температуры. Уравнение записано в декартовых ( $w = 0$ ) и цилиндрических ( $w = 1$ ) координатах:

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{y^w} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^w \chi(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + s \rho \frac{E}{t}, \quad (1)$$

где  $\chi(T) = aT^n$ ;  $E = bT^k$ ;  $\rho, a, b, k, n, s$  — заданные константы. Не ограничивая общности, можно считать, что плотность  $\rho = 1$ .

Плоскостью  $x = 0$  область  $D$  делится на две подобласти, каждая из которых может иметь свои константы. Величинам, относящимся к первой ( $x < 0$ ) подобласти, приписывается нижний индекс 1, ко второй — индекс 2. Если в  $i$ -й подобласти  $s_i = 0$ , то предполагается, что в ней действует мгновенный сосредоточенный источник. Для краткости будем говорить, что такая подобласть является инертной средой (ИС). Если  $s_i > 0$ , подобласть является горючей смесью (ГС).

Для уравнения (1) рассматривается несколько простых задач о распространении тепловой волны в инертной и горючей средах. Возможны различные сочетания сред: инертная с инертной (ИС + ИС), горючая с инертной (ГС + ИС), горючая с горючей (ГС + ГС). В настоящей работе для построения точного решения применяется метод составных автомодельных решений. Возможность такого подхода была показана в работе [1] для плоского одномерного случая. В рассматриваемом двумерном случае в качестве базовых решений можно взять, как будет видно из дальнейшего, точные решения одномерных задач о мгновенном сосредоточенном источнике [2, 3], а также одномерных задач об объемном источнике [1] для плоской, цилиндрической и сферической геометрий.

Опишем эти решения. Будем рассматривать квазилинейное уравнение теплопроводности вида

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{r^w} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^w \chi(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + s \rho \frac{E}{t}, \quad 0 \leq r; \quad w = 0, 1, 2, \quad (2)$$

считая, что в начальный момент времени температура равна нулю всюду, кроме точки  $r = 0$ , в которой произошло либо энерговыделение ( $s = 0$ ), либо инициирование горения ( $s > 0$ ). Предполагается, что пространственное распределение температуры  $T(r, t)$  соответствует степенному закону выделения энергии

$$\int_0^{+\infty} E r^w dr = Q t^s, \quad (3)$$

где  $Q$  — заданная константа. При  $s = 0$  имеем известную задачу о мгновенном сосредоточенном источнике [2, 3], при  $s > 0$  задача (2), (3) названа в работе [1] задачей об объемном (пространственно-распределенном) источнике.

В настоящей работе вместо дополнительного условия (3), обеспечивающего единственность решения, удобно взять другое условие, приводящее к эквивалентной задаче, а именно предполагать известным закон изменения температуры в точке  $r = 0$ :  $T(0, t) = T_0 t^q$ .

Данная задача имеет автомодельное решение, которое можно представить в конечной замкнутой форме [1]:

$$T(r, t) = T_0 t^q \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_\Phi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{n+1-k}}, \quad n+1-k > 0, \quad (4)$$

$$r_\Phi = \left[ \frac{2}{(n+1-k) \delta} \frac{a}{b} T_0^{n+1-k} \right]^{0,5} t^\delta, \quad (5)$$

$$\delta = \frac{1+q(n+1-k)}{2}. \quad (6)$$

Константа, входящая в функцию источника, равна

$$s = \frac{1}{2} \{1+w+q[(1+w)(n+1)+(1-w)k]\}. \quad (7)$$

Константа  $Q$  в (3) выражается через  $T_0$ :

$$Q = \frac{1}{1+w} b T_0^k \left[ \frac{2}{(n+1-k) \delta} \frac{a}{b} T_0^{n+1-k} \right]^{\frac{1+w}{2}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1+w}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{k}{n+1-k}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1+w}{2} + \frac{k}{n+1-k}\right)}. \quad (8)$$

Заметим, что в частном случае, когда  $s = (1+w)/2$ , температура на левой границе сохраняет постоянное значение, так как  $q = 0$ ; при этом  $\delta = 1/2$ . Когда  $s = 0$ , т. е. отсутствует объемный источник, на границе реализуется температурный режим с показателем степени

$$q = -\frac{1+w}{(1+w)(n+1)+(1-w)k}.$$

Из геометрической структуры аналитического решения (4)–(8) следует, что его можно использовать в качестве базового (элементарного) решения при построении составных автомодельных решений в двумерных осесимметричных и плоских областях. Действительно, базовые решения одного или разных типов симметрии, заданные в полупространствах, легко сопрягаются на границе раздела веществ, так как производная температуры по нормали к границе равна нулю, а непрерывность температуры обеспечивается, если справедливы равенства

$$T_{01} = T_{02};$$

$$q = \frac{2s_1 - (1 + w_1)}{(1 + w_1)(n_1 + 1) + (1 - w_1)k_1} = \frac{2s_2 - (1 + w_2)}{(1 + w_2)(n_2 + 1) + (1 - w_2)k_2}; \quad (9)$$

$$n_1 - k_1 = n_2 - k_2; \quad (10)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)_1 = \left(\frac{a}{b}\right)_2, \quad (11)$$

выполнение которых может быть достигнуто за счет выбора свободных параметров. Из (9), (10) следует равенство  $\delta_1 = \delta_2$ . Для простоты будем считать, что  $T_0 = 1$  и

$$\left(\frac{2}{(n+1-k)\delta} \frac{a}{b}\right)_1 = \left(\frac{2}{(n+1-k)\delta} \frac{a}{b}\right)_2 = 1. \quad (12)$$

Тогда положение фронта тепловых волн в полупространствах описывается простой формулой  $r_\phi = t^\delta$ . Дробь (11) можно найти из (12). С учетом (6), (10) выражения для констант функции горения можно представить в виде

$$s_1 = \delta(1 + w_1) + (2\delta - 1) \frac{k_1}{n + 1 - k}; \quad s_2 = \delta(1 + w_2) + (2\delta - 1) \frac{k_2}{n + 1 - k}. \quad (13)$$

В случае осесимметричной геометрии параметр  $w_1$  (левое полупространство) берется для определенности равным 2 (сферическая волна), а параметр  $w_2$ , как правило, равным 1 (цилиндрическая волна). В случае плоской геометрии параметр  $w_i$  может принимать значения 1, 0. Одна из констант  $k_i$ , как правило, полагается равной единице. Показатель степени  $\delta$  выбирается равным 0,25, 0,5 или 1. Дальнейшее сокращение числа свободных параметров определяется постановкой конкретной задачи. Во втором разделе рассмотрено несколько сопряженных задач теплопроводности с разным сочетанием инертных и горючих веществ: ИС + ИС, ГС + ИС, ИС + ГС, ГС + ГС.

## 2. Составные тепловые волны в среде с источниками энергии

**Среда с сосредоточенными источниками:**  $s_1 = 0$ ;  $s_2 = 0$ . Рассматривается задача о распространении составных тепловых волн, порожденных сосредоточенными источниками, в неоднородной инертной среде. В данной задаче существование составных автомодельных решений гарантируется, если выполняется равенство (10) и справедливо соотношение (9), в котором положено  $s = 0$ . Из равенств (9), (6), (10) следует, что  $q < 0$ ,  $\delta < 0,5$  и справедливы соотношения

$$k_1 = \frac{1 + w_1}{1 + w_2} k_2; \quad n_1 = n_2 + \frac{w_1 - w_2}{1 + w_2} k_2. \quad (14)$$

Рассмотрим два случая. Предположим, что тепловые волны в левом и правом полупространствах имеют одинаковый тип симметрии. В этом случае равенства (14) выполняются только тогда, когда среда фактически однородная:  $k_1 = k_2 = k$ ;  $n_1 = n_2 = n$ . Если положить  $k = 1$ , то приходим к классическому решению [2, 3], которое можно представить в форме (4)–(8). Сосредоточенный источник задается либо в точке (случай  $w = 2$ ), лежащей на плоской границе между подобластями, либо на прямой (случай  $w = 1$ ) или плоскости (случай  $w = 0$ ), ортогональных к этой границе. Под величиной  $r$  понимается расстояние до источника.

Пусть теперь тепловые волны имеют разные типы симметрии. Рассмотрим сначала задачу о распространении тепла в осесимметричной постановке. Для определенности будем считать, что в

левом полупространстве волна имеет сферическую форму, а в правом — цилиндрическую. Тогда соотношения (14), (9), (6), (12) принимают вид

$$2k_1 = 3k_2; \quad n_1 = n_2 + 0,5k_2; \quad q = -\frac{1}{n_2 + 1}; \quad \delta = \frac{k_2}{2(n_2 + 1)}; \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{k_2}{4} \left(1 - \frac{k_2}{n_2 + 1}\right).$$

Здесь  $k_2, n_2, b_2$  — свободные параметры. Если положить  $k_2 = 1; n_2 = 1; b_2 = 8; b_1 = 1$ , то  $q = -0,5; \delta = 0,25; k_1 = 1,5; n_1 = 1,5; a_1 = 0,125; a_2 = 1; Q_1 = \pi/32; Q_2 = 2$ . Данную задачу будем называть задачей о полубесконечном нитевом источнике:  $0 \leq x < +\infty; y = 0$ . В точке  $x = 0, y = 0$ , принадлежащей правой границе левой подобласти, мгновенно выделяется энергия  $Q_1$ , а на оси  $OX$  в правой подобласти — энергия  $Q_2$ .

Аналогичную задачу можно поставить для плоской двумерной области, положив  $w_1 = 1, w_2 = 0$ . В этом случае имеем соотношения

$$k_1 = 2k_2; \quad n_1 = n_2 + k_2; \quad q = -\frac{1}{n_1 + 1}; \quad \delta = \frac{k_1}{2(n_1 + 1)}; \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{k_1}{4} \left(1 - \frac{k_1}{n_1 + 1}\right)$$

со свободными параметрами  $k_2, n_2, b_1, b_2$ . Если взять  $k_2 = 1; n_2 = 2; b_1 = 4; b_2 = 1$ , то получаем задачу со следующими константами:  $q = -0,25; \delta = 0,25; k_1 = 2; n_1 = 3; b_1 = 4; a_1 = 1; Q_1 = 1; k_2 = 1; n_2 = 2; b_2 = 1; a_2 = 0,25; Q_2 = \pi/4$ . Данную задачу можно назвать задачей о плоском полубесконечном источнике:  $0 \leq x < +\infty; y = 0$ .

**Среда с сосредоточенным и объемным источниками.** В этом подразделе изучается распространение тепловых волн в неоднородной среде, содержащей инертное и горючее вещества. В задачах такого типа  $q < 0, \delta < 0,5$ . Если  $s_1 > 0, s_2 = 0$ , то, как видно из соотношений (9), (10),  $\delta = \frac{k_2}{(1 + w_2)(n + 1 - k) + 2k_2}$ , а на константы, описывающие зависимость удельной теплоемкости от температуры, накладывается ограничение в виде неравенства  $\frac{k_2}{k_1} > \frac{1 + w_2}{1 + w_1}$ . Очевидно, что если  $s_1 = 0, s_2 > 0$ , то вместо индекса 2 нужно использовать индекс 1, и наоборот.

В случае осесимметричной геометрии для простоты будем предполагать, что тепловая волна в левой подобласти имеет форму полусферы ( $w_1 = 2$ ) с центром в начале координат, а в правой подобласти — форму полусферы или бесконечного цилиндра. При постановке осесимметричных задач возможны следующие сочетания:

- 1) ГС ( $w_1 = 2$ ) + ИС ( $w_2 = 2$ );
- 2) ГС ( $w_1 = 2$ ) + ИС ( $w_2 = 1$ );
- 3) ИС ( $w_1 = 2$ ) + ГС ( $w_2 = 1$ ).

Рассмотрим первую задачу. Ее можно назвать задачей о точечном источнике на границе горючей и инертной сред. В данном случае равенства (9), (6) имеют вид

$$q = \frac{2s_1 - 3}{3(n_1 + 1) - k_1} = \frac{-3}{3(n_2 + 1) - k_2}; \quad \delta = \frac{k_2}{3(n_2 + 1) - k_2}.$$

Очевидно, что  $k_2 > k_1$ , поскольку  $s_1 > 0$ . Выбираем свободные параметры. Положим  $k_1 = 1, k_2 = 1,5$ , тогда  $n_2 = n_1 + 0,5$ . Далее, пусть  $n_1 = 1, a_1 = a_2 = 1$ , тогда  $n_2 = 1,5; q = -0,5; \delta = 0,25; s_1 = 0,25; b_1 = b_2 = 8$ . Энергетические константы вычисляются по формуле (8):  $Q_1 = 16/15; Q_2 = \pi/4$ .

Рассмотрим теперь вторую задачу. Для нее соотношения (9), (6) имеют простой вид

$$q = \frac{2s_1 - 3}{3(n_1 + 1) - k_1} = \frac{-1}{n_2 + 1}; \quad \delta = \frac{k_2}{2(n_2 + 1)}.$$

Заметим, что из неравенства  $s_1 > 0$  следует ограничение на константы  $k_1, k_2$ :  $3k_2 > 2k_1$ . Зададим значения следующих параметров:  $\delta = 0,25; k_1 = 1; k_2 = 1,5; b_1 = b_2 = 1$ . Через них можно

выразить остальные константы:  $n_1 = 1,5$ ;  $n_2 = 2$ ;  $q = -1/3$ ;  $s_1 = 5/12$ ;  $a_1 = a_2 = 0,1875$ . Значения энергетических констант:  $Q_1 = 0,17061$ ;  $Q_2 = 0,25$ .

В третьей задаче  $s_1 = 0$ ,  $s_2 > 0$ , и равенства (9), (6) можно записать в виде

$$q = \frac{-3}{3(n_1 + 1) - k_1} = \frac{s_2 - 1}{n_2 + 1}; \quad \delta = \frac{k_1}{3(n_1 + 1) - k_1}.$$

При выборе констант  $k_1$ ,  $k_2$  следует учитывать, что  $2k_1 > 3k_2$ . Для уменьшения числа свободных параметров положим  $\delta = 0,25$ ;  $k_1 = 2$ ;  $k_2 = 1$ ;  $b_1 = b_2 = 5$ . Тогда  $n_1 = 3$ ;  $n_2 = 2$ ;  $q = -0,25$ ;  $s_2 = 0,25$ ;  $a_1 = a_2 = 1$ ; энергетические константы  $Q_1 = 2/3$ ;  $Q_2 = 5/3$ .

Для случая плоской геометрии подбор параметров в задачах типа ГС ( $w_1 = 1$ ) + ИС ( $w_2 = 1$ ), ГС ( $w_1 = 1$ ) + ИС ( $w_2 = 0$ ), ИС ( $w_1 = 1$ ) + ГС ( $w_2 = 0$ ) проводится аналогичным образом.

**Среда с объемными источниками:  $s_1 > 0$ ;  $s_2 > 0$ .** Когда горючая смесь заполняет все пространство, возможны три режима распространения фронта горения. Если параметры выбраны так, что  $0 < \delta < 1$ , фронт перемещается с замедлением. Если  $\delta > 1$ , он идет с ускорением, а при  $\delta = 1$  — с постоянной скоростью. В зависимости от геометрической структуры множества точек инициирования он может иметь форму плоскости, кругового цилиндра, сферы, а также комбинации цилиндр-плоскость, сфера-цилиндр.

Как уже отмечалось, значение  $\delta = 0,5$  играет особую роль. Когда  $\delta < 0,5$ , показатель степени  $q$  отрицателен. Температура в точках инициирования в начальный момент времени равна бесконечности и стремится к нулю при возрастании времени. При  $\delta = 0,5$  показатель равен нулю и температура на множестве точек инициирования сохраняет постоянное значение. Если  $\delta > 0,5$ , показатель степени положителен. Температура в точках инициирования в начальный момент времени равна нулю и с увеличением времени неограниченно растет.

Используя равенства (13), нетрудно установить, что из неравенства  $s > 0,5(1 + w)$  следует неравенство  $\delta > 0,5$ , а из неравенств  $0 < s < 0,5(1 + w)$  — неравенства  $\delta^* < \delta < 0,5$ , где

$$\delta^* = \max \left\{ \frac{k_1}{(1 + w_1)(n_1 + 1 - k_1) + 2k_1}, \frac{k_2}{(1 + w_2)(n_2 + 1 - k_2) + 2k_2} \right\}.$$

При выборе параметров задачи необходимо учитывать указанные ограничения.

Автомодельное решение в составной области строится из базовых решений (4)—(8) с условиями сопряжения (9)—(12) на границах между подобластями. Особенно просто ставится задача в случае  $q = 0$ , т. е. когда предполагается, что температура на линии инициирования горючей смеси не зависит от времени. При таком допущении константа в функции источника зависит только от типа симметрии:  $s = 0,5(1 + w)$ , а  $\delta = 0,5$  при любых константах  $n$ ,  $k$ . На эти константы накладывается лишь условие связи (10), которое для определенности можно взять в виде  $n - k = 3$  и положить  $k_1 = 1,5$ ,  $k_2 = 1$  соответственно в левой и правой подобластях.

Аналогичные константы удобно брать и в случае  $\delta = 1$ . При этом  $q = 0,25$ , константы в функции источника определяются из соотношений (13).

До сих пор рассматривались задачи без учета энергии излучения. В работе [1] построены точные решения для задачи, в которой в качестве уравнения состояния берется идеальный газ с излучением  $E = c_V T + \sigma T^4 / \rho$ , где  $\rho = 1$ ;  $c_V = 1,37$ ;  $\sigma = 1,37$ . Одно из таких точных решений имеет вид

$$T(r, t) = \left\{ \exp \left( \ln 2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_\phi} \right)^2 \right] \right) - 1 \right\}^{1/3} \quad \text{для } n = 3.$$

Оно справедливо для любого типа симметрии тепловой волны. Соответствующая энергетическая константа получена численно и приведена в работе [1]. Движение фронта тепловой волны описывается формулой  $r_\phi = r_0 t^{0,5}$ , где константа  $r_0 = 1$ , если в коэффициенте теплопроводности параметр  $a = 1,48237$ . Данное решение можно использовать для постановки двумерных задач в однородной среде с объемными источниками, порождающими в левой и правой подобластях тепловые волны разных типов симметрии. Тип симметрии определяется константой функции источника  $s = 0,5(1 + w)$ .

### Численный эксперимент

При постановке тепловых задач с сосредоточенными и объемными источниками одним из важных вопросов является вопрос об устойчивости составных автоматических решений относительно разных способов задания начальных данных в виде дельта-функции. Положительный ответ на этот вопрос можно получить с помощью численного эксперимента. В качестве примера рассмотрим плоскую одномерную задачу со следующими параметрами [1]:

$$a_1 = b_1 = k_1 = 1; \quad n_1 = 2; \quad s_1 = 0; \quad a_2 = 4,6875; \quad b_2 = 1; \quad k_2 = n_2 = 1,5; \quad s_2 = 0.$$

На плоскости  $x = 0$  мгновенно выделяется энергия  $Q = 1,4375\pi$ , при этом в левом полупространстве оказывается энергия  $Q_1 = 0,5\pi$ , в правом —  $Q_2 = 0,9375\pi$ . Тепловые волны движутся соответственно со скоростями  $v_1 = -0,5t^{-0,75}$ ,  $v_2 = 1,875t^{-0,625}$ .

Данная задача была решена разностным методом в области  $-2,1 \leq x \leq 5,1$  на равномерной сетке с шагом  $h = 0,005$ . Начальные данные задавались на момент времени  $t_0 = 10^{-8}$ . Было сделано три расчета с разными начальными значениями температуры в промежутках  $-0,02 \leq x < 0$ ,  $0 < x \leq 0,005$ :

- 1)  $T_{01} = 78,5398$ ;  $T_{02} = 70,2696$ ;
- 2)  $T_{01} = 0$ ;  $T_{02} = 93,4384$ ;
- 3)  $T_{01} = 225,802$ ;  $T_{02} = 0$ .

В первом варианте начальные значения температуры соответствовали энергиям  $Q_1$ ,  $Q_2$  слева и справа от поверхности раздела сред. Во втором и третьем вариантах вся энергия выделялась целиком соответственно в правой или левой подобласти. Результаты расчетов хорошо согласуются друг с другом и, как видно из рис. 1, на котором изображен профиль температуры на момент времени  $t = 1$  (см. также цветную вкладку), с приемлемой точностью совпадают с аналитическим решением.

Таким образом, численно подтверждается устойчивость решения к возмущениям в начальных данных.

Некоторые из представленных выше задач были решены численно по методике КИО [4]. Расчеты проводились по разностной схеме продольно-поперечной прогонки. Функция источника приближалась со вторым порядком.

Для иллюстрации приведем примеры расчетов четырех двумерных задач с осесимметричной геометрией. Во всех задачах она одинаковая и имеет вид прямоугольного цилиндра, ось которого совпадает с осью  $OX$ :  $-1,1 \leq x \leq 1,1$ ;  $0 \leq y \leq 1,1$  (рис. 2, см. также цветную вкладку).

Расчетная область состоит из двух областей, разделенных плоскостью  $x = 0$ , покрыта равномерной сеткой с шагом  $h = 0,02$ . Внешние границы теплоизолированы. Во всех задачах используется одна и та же фоновая температура  $T_{\Phi} = 10^{-8}$ . Задачи считались от момента времени  $t_0$  до  $t = 1$ . При этом на некотором начальном отрезке времени шаг интегрирования был небольшим и выбирался с учетом скорости тепловой волны. В дальнейшем счет выполнялся с постоянным временным шагом, равным примерно 0,0001.

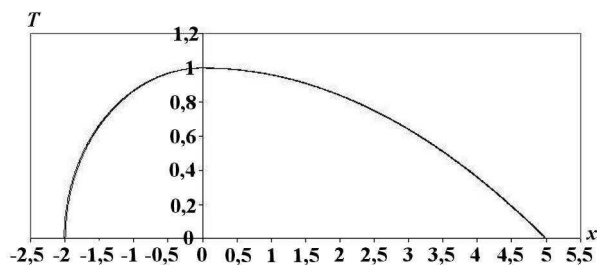


Рис. 1. Профиль температуры на момент времени  $t = 1$ , варианты 1—3

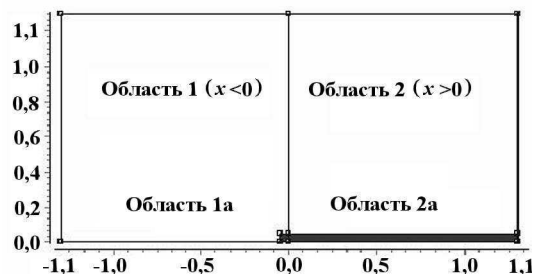


Рис. 2. Геометрия расчетной области в задачах 1, 3, 4

Опишем уравнения состояния, коэффициенты теплопроводности, начальные условия, формулы точных решений, контрольные балансные соотношения, а также приведем результаты численных расчетов. Забегая вперед, отметим, что во всех расчетах контрольные балансные соотношения выполняются с достаточно высокой точностью. Заметим также, что расчетное распределение температуры на момент времени  $t = 1$  во всех задачах достаточно хорошо согласуется с теоретическим распределением.

**Задача 1. Полубесконечный нитевой сосредоточенный источник (форма тепловой волны — полусфера-цилиндр).** Уравнения состояния и коэффициенты теплопроводности:

$$E_1 = 8T^{1,5}; \quad \chi_1 = T^{1,5}; \quad E_2 = 8T; \quad \chi_2 = T.$$

В начальный момент времени  $t_0 = 1,6 \cdot 10^{-7}$  задана температура

$$T_0 = \begin{cases} 844,5524, & -0,02 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 0,02; \\ 1250, & 0 \leq x \leq 1,1, \quad 0 \leq y \leq 0,02. \end{cases}$$

Точное решение задачи имеет вид

$$T(r, t) = t^{-0,5} \left( 1 - \frac{r^2}{t^{0,5}} \right), \quad (15)$$

где

$$r = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2}, & x < 0; \\ y, & 0 < x. \end{cases} \quad (16)$$

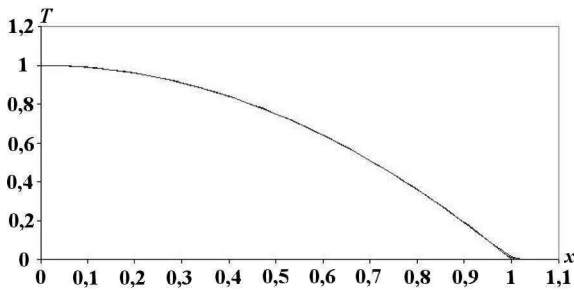


Рис. 3. Задача 1. Сравнение численного решения (вдоль полуоси  $x < 0$  и в сечениях  $x = 0$  и  $x = 1,1$ ) с точным решением,  $t = 1$

Контрольные балансные соотношения:  $E_1(t) = 4,935$ ;  $E_2(t) = 13,823$ , где  $E_1(t)$ ,  $E_2(t)$  — энергии левой и правой областей соответственно. На рис. 3 (см. также цветную вкладку) представлены результаты сравнения численного решения вдоль полуоси  $OX$  ( $x < 0$ ) и в сечениях  $x = 0$  и  $x = 1,1$  с точным решением на момент времени  $t = 1$ . Видно, что все кривые, включая кривую точного решения, совпадают друг с другом.

**Задача 2. Точечный источник на границе горючей и инертной сред (сферическая форма тепловой волны).** Уравнения состояния и коэффициенты теплопроводности:

$$E_1 = 8T; \quad \chi_1 = T; \quad E_2 = 8T^{1,5}; \quad \chi_2 = T^{1,5}.$$

В момент времени  $t_0 = 1,6 \cdot 10^{-7}$  задана начальная температура

$$T_0 = \begin{cases} 666,6667, & -0,02 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 0,02; \\ 844,5524, & 0 \leq x \leq 0,2, \quad 0 \leq y \leq 0,02. \end{cases}$$

Функция источника

$$F(x, y, t) = \begin{cases} 2\frac{T}{t}, & x < 0; \\ 0, & 0 < x. \end{cases}$$

Точное решение задачи определяется формулой (15), в которой  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Контрольные балансные соотношения:  $E_1(t) = 32/15\pi t^{0,25}$ ;  $E_2(t) = 0,5\pi^2$ .

Кривые, описывающие результат сопоставления численного и точного решений вдоль оси  $OX$  на момент времени  $t = 1$ , с хорошей точностью совпадают с кривыми, изображенными на рис. 3.

**Задача 3. Объемный и сосредоточенный нитевой источники (форма тепловой волны — полусфера-цилиндр).** Уравнения состояния и коэффициенты теплопроводности:

$$E_1 = T; \quad \chi_1 = 0,1875T^{1,5}; \quad E_2 = T^{1,5}; \quad \chi_2 = 0,1875T^2.$$

Начальная температура соответствует моменту времени  $t_0 = 1,6 \cdot 10^{-7}$ :

$$T_0 = \begin{cases} 62,8533, & -0,02 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 0,02; \\ 116,0397, & 0 \leq x \leq 1,1, \quad 0 \leq y \leq 0,02. \end{cases}$$

Функция источника

$$F(x, y, t) = \begin{cases} 1,25 \frac{T}{t}, & x < 0; \\ 0, & 0 < x. \end{cases}$$

Точное решение задачи имеет вид

$$T(r, t) = t^{-1/3} \left( 1 - \frac{r^2}{t^{0,5}} \right)^{2/3},$$

где  $r$  определяется из выражения (16).

Контрольные балансные соотношения:  $E_1(t) = 2\pi \cdot 0,17061t^{0,416667}$ ;  $E_2(t) = 0,55\pi$ .

На рис. 4 (см. также цветную вкладку) приведены результаты сравнения численного решения вдоль полуоси  $OX$  ( $x < 0$ ) и в сечениях  $x = 0$  и  $x = 1,1$  с точным решением на момент времени  $t = 1$ .

**Задача 4. Объемные источники (форма тепловой волны — полусфера-цилиндр).** Уравнения состояния и коэффициенты теплопроводности:

$$E_1 = T^{1,5}; \quad \chi_1 = T^{4,5}; \quad E_2 = T; \quad \chi_2 = T^4.$$

В начальный момент времени  $t_0 = 0,0004$  задана температура

$$T_0 = \begin{cases} 0,57908, & -0,02 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 0,02; \\ 0,8, & 0 \leq x \leq 1,1, \quad 0 \leq y \leq 0,02. \end{cases}$$

Функция источника

$$F(x, y, t) = \begin{cases} 1,5 \frac{T^{1,5}}{t}, & x < 0; \\ \frac{T}{t}, & 0 < x. \end{cases}$$

Точное решение задачи имеет вид

$$T(r, t) = \left( 1 - \frac{r^2}{t} \right)^{0,25},$$

где  $r$  находится по формуле (16).

Контрольные балансные соотношения:  $E_1(t) = 2\pi \cdot 0,22033 t^{1,5}$ ;  $E_2(t) = 0,88\pi t$ .



На рис. 5 представлены результаты сравнения численного и точного решений на момент времени  $t = 1$ .

Анализ численных результатов, полученных по методике КИО, показал, что они достаточно хорошо согласуются с точным решением. При своем движении тепловая волна сохраняет сферическую и цилиндрическую формы. В задачах 1, 2 небольшое расхождение результатов наблюдается в малой окрестности фронта тепловой волны. В задачах 3, 4 это расхождение заметно больше. По-видимому, это связано с тем, что в данных задачах градиент температуры на фронте тепловой волны равен бесконечности.

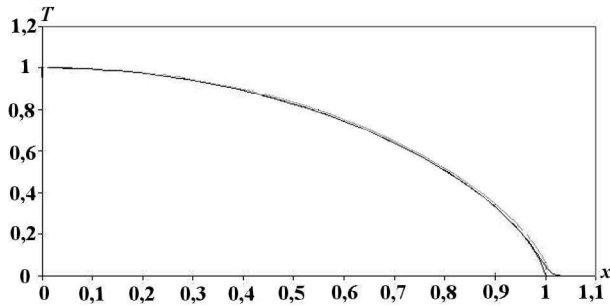


Рис. 4. Задача 3. Сравнение численного решения (вдоль полуоси  $x < 0$  и в сечениях  $x = 0$  и  $x = 1,1$ ) с точным решением,  $t = 1$

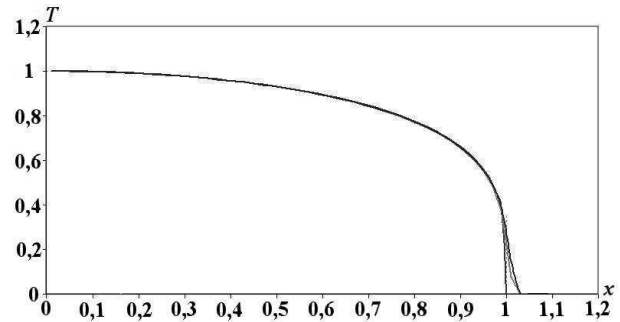


Рис. 5. Задача 4. Сравнение численного решения (вдоль полуоси  $x < 0$  и в сечениях  $x = 0$  и  $x = 1,1$ ) с точным решением,  $t = 1$

В результате проведенного исследования показана возможность построения составных автомодельных решений для двумерного уравнения теплопроводности с функцией источника в случае осесимметричной и плоской геометрий.

### Список литературы

1. Тихомиров Б. П. Автомодельные тепловые волны от сосредоточенного или объемного источника в среде с неоднородными теплофизическими параметрами // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2010. Вып. 2. С. 40–50.
2. Зельдович Я. Б., Компанец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный 70-летию академика А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 61–67.
3. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // Прикладная математика и механика. 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 67–78.
4. Софронов И. Д., Тихомиров Б. П. Баженов С. В. и др. Приближенные методы расчета лучистого энергопереноса в оптически неоднородных областях сложной формы // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 4. С. 68–75.

Статья поступила в редакцию 04.10.10.