

УДК 539.3

ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ НАГРЕВЕ

Н. И. Ободан, Н. А. Гук, А. Г. Пацюк
(Днепропетровский НУ им. О. Гончара)

Рассматриваются метод и алгоритм идентификации теплофизических свойств материалов при неоднородном нагреве по результатам эксперимента. Предлагается определять неизвестные характеристики материала из решения обратной задачи теплопроводности. Предлагаемый подход позволяет определять указанные параметры в условиях существенной неоднородности поля температур.

Ключевые слова: идентификация, теплофизические свойства материала, неоднородный нагрев, эксперимент, метод конечных элементов.

Введение

Математическое моделирование явления теплопроводности широко применяется при описании технологических процессов в машиностроении, металлургии, энергетике и других областях техники. В связи с этим возникает необходимость теоретико-экспериментальных исследований для идентификации рассматриваемых процессов и объектов [1]. Методы решения обратных задач, выполняющие интерпретацию результатов термометрирования образца, позволяют определять параметры тепловых процессов, температурные зависимости теплофизических свойств материала в необходимом для практики диапазоне температур.

Определение теплофизических свойств материалов в зависимости от температуры исследовано в многочисленных публикациях (например, [2–4]). В указанных работах идентификация параметров теплового воздействия одновременно с характеристиками материала не выполнялась, теплофизические свойства металлов определялись с использованием результатов эксперимента, предусматривающего равномерный нагрев образца. Между тем в реальных тепловых процессах нагрев может быть существенно неоднородным как по времени, так и по области, занимаемой объектом (локальный нагрев), что оказывает влияние на процесс идентификации теплофизических свойств.

В настоящей работе предлагается подход, сочетающий в себе параметрическую идентификацию [3] и алгоритм адаптации вычисленных с использованием математической модели температур к измеренным в эксперименте. Применение такого подхода дает возможность по результатам теплофизического эксперимента, в котором создаваемое поле температур существенно неоднородно по объему материала, одновременно идентифицировать параметры теплового воздействия и теплофизические свойства материала образца в зависимости от температуры.

Постановка задачи

Целью настоящего исследования является построение математической и экспериментальной моделей, позволяющих проанализировать влияние характера теплового воздействия на процесс идентификации теплофизических характеристик. В работе предусматривается:

- 1) разработка математической модели, позволяющей идентифицировать искомые теплофизические характеристики материала и тепловой поток в виде функций временной и пространственных координат;
- 2) создание установки, обеспечивающей неоднородный нагрев образца и измерение поля температур с достаточной точностью, так, чтобы постоянная времени измерительных датчиков была меньше времени нагрева до стационарного состояния.

Математическая модель теплофизического эксперимента представляется следующим образом. Пусть в некоторой трехмерной области $\Omega = \{X : X = (x_1, x_2, x_3) \in R^3, 0 \leq x_1 \leq R; 0 \leq x_2 \leq 2\pi; 0 \leq x_3 \leq h\}$, занимаемой исследуемым образцом, распределение температуры T описывается уравнением нестационарной теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda(T) T \right) + \frac{1}{x_1^2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) = C(T) \dot{T} \quad (1)$$

с граничными условиями второго рода на поверхностях $x_3 = 0$ и $x_3 = h$:

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = 0; \quad -\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x_3} \Big|_{x_3=h} = q_0(\bar{\Omega}, t), \quad (2)$$

где $\lambda(T)$ — коэффициент теплопроводности; q_0 — плотность теплового потока; $C(T)$ — удельная теплоемкость; $\bar{\Omega}$ — область воздействия теплового потока; t — время. Кроме того, сформулировано условие

$$T|_{x_2=0} = T|_{x_2=2\pi}.$$

Учитывая, что температура не зависит от переменной x_3 в силу малости толщины по сравнению с радиусом исследуемого образца, проинтегрируем левую и правую части равенства (1) по переменной x_3 в пределах от 0 до h .

Весь временной диапазон процесса нагрева разбивается на этапы, при этом $t_0 = 0$; $t_p = t_0 + p\Delta t$, $p = \overline{1, P}$. В начальный момент времени t_0 распределение температуры тела удовлетворяет условию

$$T|_{t_0} = T_c,$$

где T_c — температура окружающей среды.

Будем считать, что в результате оказываемого воздействия образец нагревается настолько, что теплофизические характеристики материала $\lambda(T)$, $C(T)$ изменяются существенно.

На поверхности образца $x_3 = 0$ для момента времени t_p в точках $X_n = (x_{1n}, x_{2n})$, $n = \overline{1, N}$ (точки термометрирования), зафиксированы значения температур, измеренные в процессе теплофизического эксперимента:

$$T(X_n, t_p) = T^*(X_n, t_p), \quad n = \overline{1, N}.$$

Решение обратной задачи предполагает восстановление вектора-функции $H = \{\lambda(T), C(T), q_0(X)\}$, компонентами которой являются функции, характеризующие теплофизические свойства материала и мощность теплового потока, по результатам измерения поля температур.

Функционал-невязка, сформированный для момента времени t_p , будет иметь вид [2]

$$J = \int_{\Omega} \left(T(X_n, H, t_p) - T^*(X_n, t_p) \right)^2 d\Omega. \quad (3)$$

Экспериментальная модель (рис. 1), аналогичная описанной в работе [3], состоит из объекта нагрева, в качестве которого выбрана металлическая пластина 2, и установки [5], состоящей из блока для локального температурного нагрева 3, системы закрепления круглых пластин 1, источника питания 4, системы регистрации температуры 5, коммутатора 6.

Методика определения температурного поля термопарами состояла из операций изготовления, градуировки термопар и измерения температур в заданных точках. Термопары изготавливались из

проволоки хромели и алюмели диаметром 0,08—0,15 мм при помощи дуговой сварки. Максимальный размер королька термопары не превышал 0,2—0,3 мм. Для достижения хорошей теплоотдачи термопары приваривались точечной сваркой к пластине. Термопары располагались вдоль радиуса прогреваемой зоны на расстоянии 5 мм друг от друга.

Термометрическая информация снималась при помощи регистрирующего устройства, которое поочередно подключалось к термодатчикам. Ошибки измерения, обусловленные геометрией (точность установки датчиков), находились в пределах 1% от максимальной достигаемой в эксперименте температуры.

Оценка точности определения температурного поля осуществлялась путем решения контрольной (теоретической и экспериментальной) задачи с известными данными о параметрах пластины (рассматривалась пластина, имеющая радиус $R = 0,08$ м, толщину $h = 0,00094$ м, коэффициент теплопроводности $\lambda = 22,2$ Вт/(м·°С), теплоемкость $C = 493$ Дж/(кг·°С)) и тепловом воздействии (плотность теплового потока $q_0 = 50$ кВт/м², время воздействия теплового потока $t_{\text{п}} = 180$ с). Численное решение контрольной задачи осуществлялось методом конечных элементов (МКЭ).

На рис. 2 приведено распределение температурного поля по поверхности пластины, полученное в результате решения прямой задачи теплопроводности и измеренное в эксперименте. Отклонение измеренных в эксперименте температур от полученных при решении задачи теплопроводности с заданными характеристиками материала не превышает 3%.

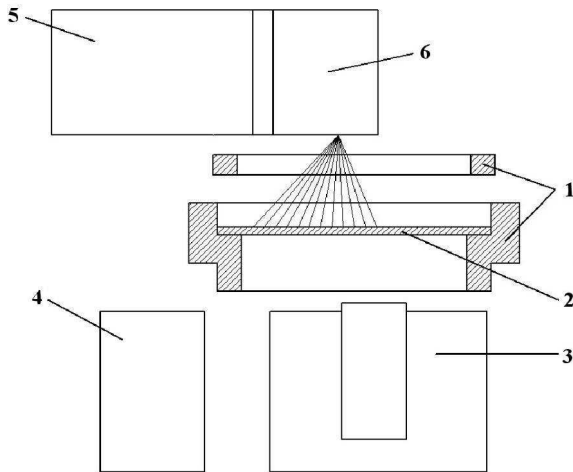


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

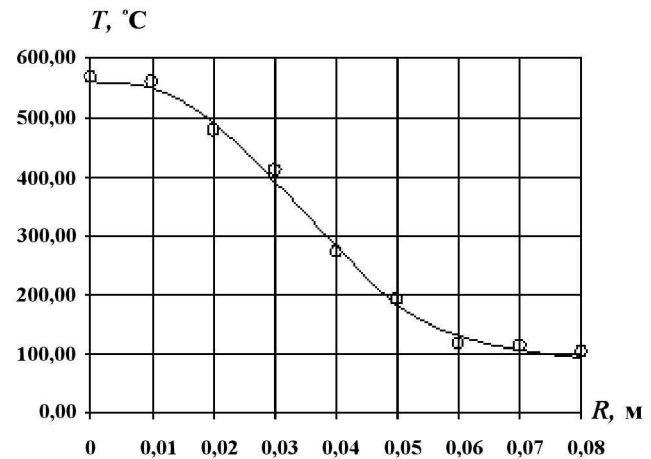


Рис. 2. Результат решения контрольной задачи теплопроводности: — — расчет; ○ — эксперимент

Метод решения

Для определения компонент вектора температур $T = \{T(X_n, H, t_p), n = \overline{1, N}\}$ необходимо построить решение прямой задачи (1), (2).

Параметризация всех неизвестных функций задачи осуществляется путем их аппроксимации с помощью МКЭ. Для построения системы уравнений МКЭ выполняется дискретизация области Ω следующим образом:

- для решения прямой задачи (1), (2) вводится сетка, узлы которой $X_s, s = \overline{1, S}$, имеют координаты x_{1_s}, x_{2_s} ; значения функции $T(X_s, t_p)$ описываются вектором $T(X_s) = \{T_s\}$;
- для представления условия (3) в дискретной форме вводится сетка, узлы которой $X_n, n = \overline{1, N}$, имеют координаты x_{1_n}, x_{2_n} ; измеренные в эксперименте значения $T^*(X_n, t_p)$ описываются вектором $T^*(X_n) = \{T_n^*\}$; здесь все узлы X_n выбраны из числа $X_s, N < S$;
- для построения решения обратной задачи вводится сетка, узлы которой $X_m, m = \overline{1, M}$, имеют координаты x_{1_m}, x_{2_m} ; неизвестные функции $\lambda(T), C(T), q_0(t)$ описываются вектором $H =$

$= \{\lambda, C, q_0\}$, состоящим из их значений в узлах X_m : $\lambda = \{\lambda_m\}$, $C = \{C_m\}$, $q_0 = \{q_{0,m}\}$, $m = \overline{1, M}$; здесь все узлы X_m выбраны из числа X_s , $M < S$.

Рассматриваемая система представляется в виде ансамбля конечных элементов. Неизвестные функции на элементе e (четырёхузловом) задаются для локальной системы координат (μ, η) при помощи аппроксимаций вида [6]

$$T^{(e)} = \sum_{i=1}^4 B_i^{(e)}(\mu, \eta) T_i,$$

где $T = \{T_i\}$ — вектор значений функции температуры в узлах конечноэлементной сетки; $B_i^{(e)}(\mu, \eta)$ — функции формы: $B_1^{(e)}(\mu, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \mu)(1 + \eta)$; $B_2^{(e)}(\mu, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \mu)(1 + \eta)$; $B_3^{(e)}(\mu, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \mu)(1 - \eta)$; $B_4^{(e)}(\mu, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \mu)(1 - \eta)$.

После выполнения соответствующей процедуры интегрирования и суммирования матриц элементов получаем систему уравнений в виде

$$C_T(H) \dot{T} + K_T(H) T = Q, \quad (4)$$

где Q — вектор теплового воздействия; $C_T(H) = \sum_e \int_{\Omega^{(e)}} D^{(e)T} C_T^{(e)}(H) D^{(e)} d\Omega^{(e)}$, $K_T = \sum_e \int_{\Omega^{(e)}} D^{(e)T} k^{(e)}(H) D^{(e)} d\Omega^{(e)}$ — соответственно матрицы теплоемкости и теплопроводности конструкции; $C_T^{(e)}(H)$, $k^{(e)}(H)$ — соответственно матрицы коэффициентов теплоемкости и теплопроводности для всего ансамбля элементов; $D^{(e)T}$ — матрица функций формы.

В результате решения системы уравнений (4) получаем вектор температур с компонентами $T(X_n, H, t_p)$, который совместно с заданным вектором результатов измерений — он имеет компоненты $T^*(X_n, t_p)$ — позволяет сформировать вектор невязок, необходимый для вычисления дискретного аналога функционала-невязки (3), с компонентами

$$\varepsilon_n(T, H) = T(X_n, H, t_p) - T^*(X_n, t_p), \quad n = \overline{1, N}.$$

Для выполнения численной минимизации функционала (3) будем использовать метод Ньютона—Раффсона, тогда итерационный процесс отыскания вектора параметров H будет иметь вид

$$H^{k+1} = H^k - h_k \left(J''(H^k) \right)^{-1} J'(H^k),$$

где $J''(H^k)$ — гессиан функционала J в точке H^k ; $J'(H^k)$ — градиент функционала J в точке H^k ; h_k — шаг, который можно регулировать; k — номер шага итерационного процесса.

Градиент и гессиан функционала можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} J'(H^k) &= \frac{\partial J(H^k)}{\partial H_j} = 2 \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{\partial \varepsilon_n(H^k)}{\partial H_j} \right\} \varepsilon_n(H^k); \\ J''(H^k) &= 2 \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{\partial \varepsilon_n(H^k)}{\partial H_j} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \varepsilon_n(H^k)}{\partial H_i} \right\} - 2 \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{\partial^2 \varepsilon_n(H^k)}{\partial H_j \partial H_i} \right\} \varepsilon_n(H^k), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varepsilon_n(H^k) = \varepsilon(T(X_n), H^k, t_p)$; H_j, H_i — компоненты вектора параметров.

Линеаризованная функция невязки $\varepsilon_n(H)$ в окрестности текущего значения вектора параметров $H = H^k$ будет иметь вид

$$\varepsilon_n(H) = \varepsilon_n(H^k) + \left. \frac{\partial J(H)}{\partial H_j} \right|_{H=H^k} (H^{k+1} - H^k). \quad (6)$$

Подстановка ее в гессиан приводит к тому, что второе слагаемое в (5) можно положить равным 0.

Введя матричные обозначения, получим разрешающее уравнение для определения вектора неизвестных параметров задачи H^k :

$$R(H^k) \Delta H^k = -G(H^k) \varepsilon(H^k),$$

$$\text{где } R(H^k) = \left\{ \frac{\partial \varepsilon_n(H^k)}{\partial H_j} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \varepsilon_n(H^k)}{\partial H_j} \right\}; \quad G(H^k) = \left\{ \frac{\partial \varepsilon_n(H^k)}{\partial H_j} \right\}^T, \quad n = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}.$$

Матрица $\left\{ \frac{\partial \varepsilon_n(H^k)}{\partial H_j} \right\}$ строится численно:

$$\left\{ \frac{\partial \varepsilon_n(H^k)}{\partial H_j} \right\} = \left\{ \frac{\varepsilon_n(H_1^k, H_2^k, \dots, H_j^k + \Delta h, \dots, H_M^k) - \varepsilon_n(H_1^k, H_2^k, \dots, H_j^k, \dots, H_M^k)}{\Delta h} \right\},$$

где Δh — приращение к компоненте вектора параметров. В дальнейшем индекс k , характеризующий номер шага итерационного процесса, будет опущен.

Неизвестный вектор приращений параметров ΔH аналогично [7] представляется в виде двух независимых векторов ΔH^1 и ΔH^2 , при этом вводится предположение, что вектор ΔH^1 содержит наиболее информативные компоненты вектора ΔH такие, что выполняется условие $\|\Delta H - \Delta H^1\|_{\Delta H^1 \in \Delta H} \rightarrow \min$. Функции u_j^d ($j = \overline{1, M}$, $d = 1, 2$) характеризуют принадлежность компонент вектора ΔH векторам ΔH^1 , ΔH^2 и имеют вид

$$\begin{aligned} u_{r_1}^1(X) &= \delta(X - X_{r_1}), & r_1 \in I^1, & \quad I^1 = \{r_{p_1}, \dots, r_{p_{M_1}}\}; \\ u_{r_2}^2(X) &= \delta(X - X_{r_2}), & r_2 \in I^2, & \quad I^2 = \{r_{k_1}, \dots, r_{k_{M_2}}\}; \quad I^1 \cap I^2 = \emptyset, \end{aligned}$$

где $\delta(X - X_{r_p})$ — функция Дирака; M_1, M_2 — заданное число ненулевых компонент векторов ΔH^1 , ΔH^2 соответственно, $M_1 + M_2 = M$.

Результаты вычислительного эксперимента

Предложенный подход был применен для одновременной идентификации теплофизических характеристик $\lambda(T)$, $C(T)$ тонкостенной системы и нахождения распределения плотности теплового потока $q_0(t)$ из решения обратной задачи теплопроводности с использованием в качестве косвенных измерений экспериментальных результатов термометрирования образцов.

В качестве объектов исследования рассматривались пластины, изготовленные из стали X18H9T, имеющие $R = 0,08$ м, $h = 0,00094$ м (тонкостенность $R/h = 85$) и $R = 0,08$ м, $h = 0,00015$ м (тонкостенность $R/h = 547$), где R, h — радиус и толщина пластины.

Для формирования полей заданных температур $T^*(X_n, t_p)$ использовались температурные зависимости, построенные по экспериментальным данным, зафиксированным в моменты времени t_p . Подверженная эксперименту пластина испытывает неоднородный нагрев, вызванный действием теплового потока $q(t)$ в некоторой ограниченной области $\overline{\Omega}$, расположенной в центре поверхности $x_3 = h$ (на рис. 3 область $\overline{\Omega}$ совпадает с Ω_4), поверхность $x_3 = 0$ теплоизолирована.

Аналогичное воздействие задается для пластины, состояние которой определяется с использованием математической модели из системы уравнений (4). Решение прямой задачи теплопроводности осуществлялось с использованием МКЭ, пластина разбивалась равномерной пространственной сеткой четырехузловых элементов (всего 4860 элементов).

Для локально нагретой пластины распределение температуры является сильно неравномерным по поверхности. Аппроксимация неизвестных функциональных зависимостей выполнялась на сетке,

изображенной на рис. 3, где каждая область Ω_m ($m = \overline{1,4}$) характеризуется параметрами λ_m, C_m, q_{0m} . Следовательно, вектор параметров может быть представлен в виде $H = \{\{\lambda_m\}, \{C_m\}, \{q_{0m}\}, m = \overline{1,4}\}$. Для каждой выделенной области в результате эксперимента определено значение температуры T_m^* .

Далее проводилась идентификация вектора неизвестных параметров модели с использованием метода декомпозиции [7]. В качестве начального приближения были выбраны постоянные значения теплофизических характеристик [8]: $\lambda = 22,2 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$; $C = 493 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$; $q_0 = 50 \text{ кВт}/\text{м}^2$. Время действия теплового потока $t_{\text{н}} = 180 \text{ с}$.

В табл. 1 представлены результаты выполнения процедуры декомпозиции для пластины с тонкостенностью $R/h = 85$; на первом шаге итерационного процесса разделение вектора параметров выполнялось произвольно, далее — в соответствии с условием $\|\Delta H - \Delta H^1\|_{\Delta H^1 \in \Delta H} \rightarrow \min$. На каждой итерации формируются векторы $u^1 = \{u_j^1\}$, $u^2 = \{u_j^2\}$, состоящие из элементов $\{0, 1\}$; при этом, если $u_j^d = 1$, то соответствующий параметр принадлежит вектору H^d ($d = 1, 2$).

После выполнения процедуры идентификации были получены значения компонент вектора неизвестных параметров, которые представлены в табл. 2.

Аналогичные результаты были получены для пластины с тонкостенностью $R/h = 547$, здесь процесс декомпозиции был выполнен за 10 итераций.

Результат восстановления теплового потока представлен на рис. 4 (пунктирная линия соответствует начальному приближению).

Далее проводилось сравнение результатов идентификации температурных зависимостей характеристик материала, полученных с использованием предложенного подхода, с известными справочными данными [8] для пластин с разной тонкостенностью. Результаты представлены на рис. 5, 6. Все приведенные зависимости были построены с использованием интерполяционных полиномов.

Анализ полученных результатов показывает, что неоднородность теплового потока оказывает влияние на теплофизические свойства материала. Полученные в результате численного моделирования зависимости для коэффициентов теплопроводности и теплоемкости отличаются от приведенных в справочной литературе [8]. Можно отметить, что продолжительность воздействия теплового потока оказывает влияние на результат идентификации. При меньших температурах, достигнутых пластиной при нагреве, восстановленные с использованием модели зависимости меньше отличаются от справочных.

При сравнении результатов, полученных для пластин с разной тонкостенностью, $R/h = 85$ и $R/h = 547$ (см. соответственно верхние и нижние графики на рис. 6), нагреваемых в течение одинакового временного интервала $t_{\text{н}} = 180 \text{ с}$, видно, что большие отличия от справочных зависимостей наблюдаются для более тонких пластин.

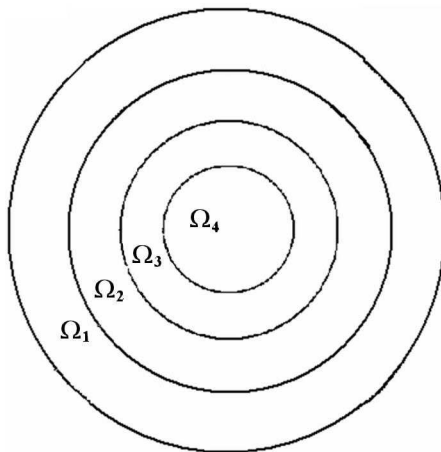


Рис. 3. Объект исследования

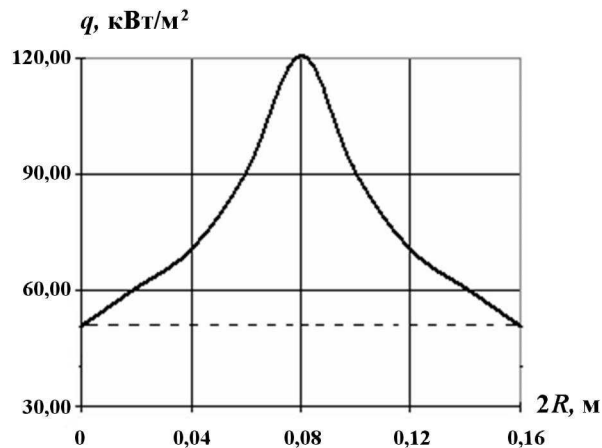


Рис. 4. Результат идентификации теплового потока

Распределение температуры (рис. 7, 8), вычисленное с учетом идентифицированных коэффициентов теплопроводности и теплоемкости, показывает хорошее приближение к полученной экспериментальной зависимости в отличие от распределения, полученного с учетом справочных данных.

Таблица 1

Результат выполнения процедуры декомпозиции

1-я итерация				2-я итерация				7-я итерация			
Вектор H^1	u^1	Вектор H^2	u^2	Вектор H^1	u^1	Вектор H^2	u^2	Вектор H^1	u^1	Вектор H^2	u^2
C_2	1	C_1	0	C_1	0	C_3	0	C_3	1	C_1	1
C_3	0	λ_1	0	C_2	0	C_4	0	C_4	1	C_2	1
C_4	0	—	—	λ_1	0	λ_3	0	λ_3	1	λ_1	1
λ_2	1	—	—	λ_2	0	λ_4	0	λ_4	1	λ_2	1
λ_3	0	—	—	q_{01}	1	—	—	q_{01}	1	—	—
λ_4	0	—	—	q_{02}	1	—	—	q_{02}	1	—	—
q_{01}	1	—	—	q_{03}	1	—	—	q_{03}	1	—	—
q_{02}	1	—	—	q_{04}	1	—	—	q_{04}	1	—	—
q_{03}	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
q_{04}	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Таблица 2

Результат идентификации вектора параметров

Вектор H^1	u^1	Значение	Восстановленное	Вектор H^2	u^2	Значение	Восстановленное
		температуры в области $\Omega_m, ^\circ\text{C}$	значение параметра			температуры в области $\Omega_m, ^\circ\text{C}$	значение параметра
C_3	1	335	554	C_1	1	250	535
C_4	1	417,5	580	C_2	1	280	542
λ_3	1	335	23,26	λ_1	1	250	22,47
λ_4	1	417,5	23,49	λ_2	1	280	22,78
q_{01}	1	250	50	—	—	—	—
q_{02}	1	280	72	—	—	—	—
q_{03}	1	335	90	—	—	—	—
q_{04}	1	417,5	120	—	—	—	—

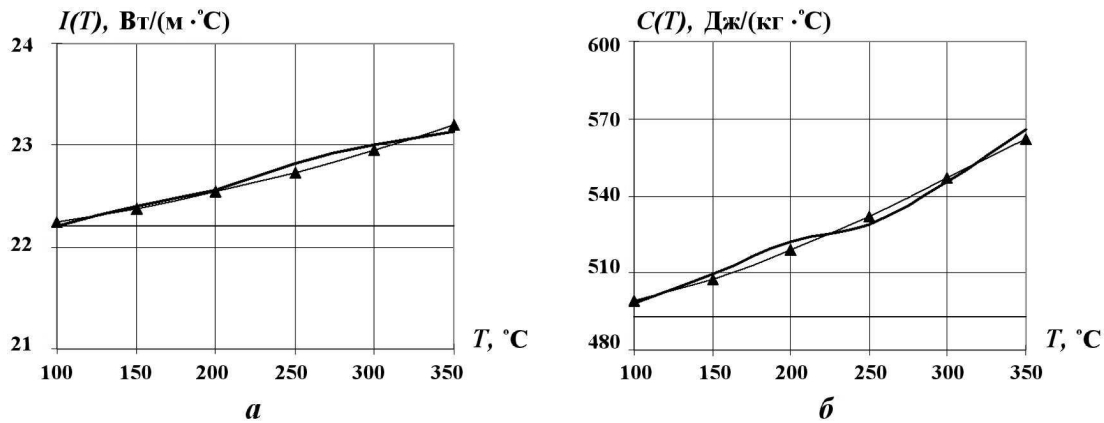


Рис. 5. Коэффициенты теплопроводности (а) и теплоемкости (б) для пластины, $R/h = 85$, $t_p = 108$ с: — — результат идентификации; —▲— справочные данные; — — начальное приближение

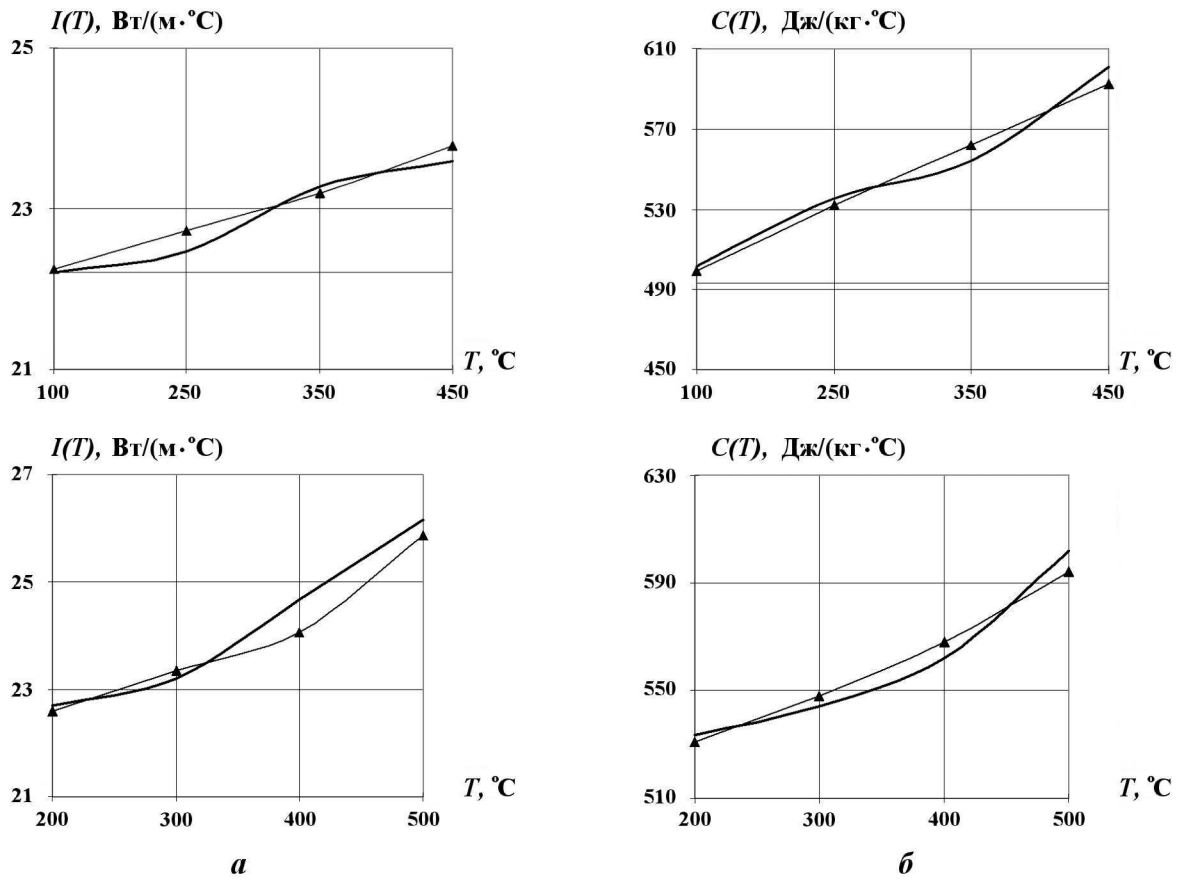


Рис. 6. Коэффициенты теплопроводности (а) и теплоемкости (б) для пластин, $t_p = 180$ с: сверху — $R/h = 85$; внизу — $R/h = 547$: — — результат идентификации; —▲— справочные данные; --- — начальное приближение

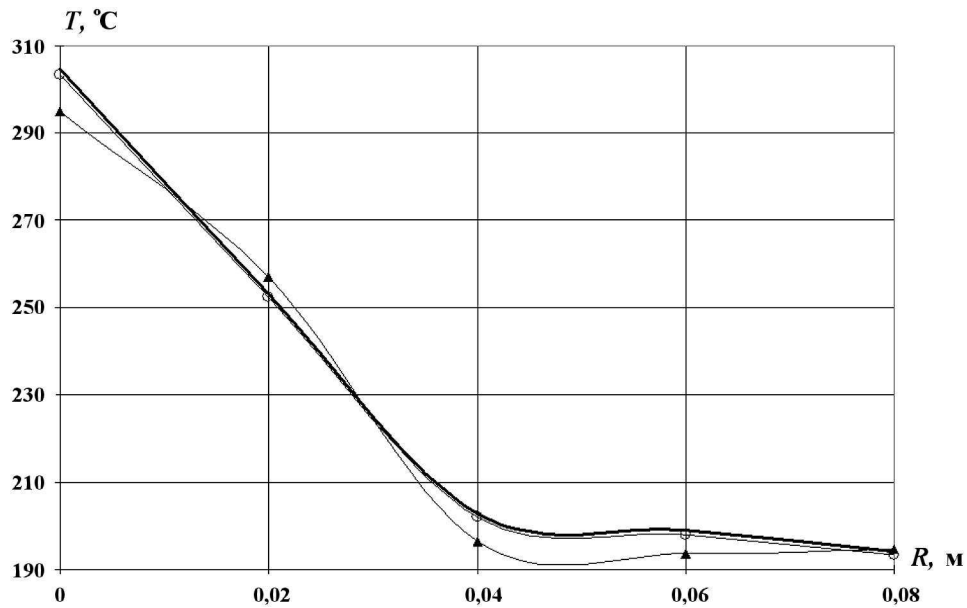


Рис. 7. Распределение температуры по поверхности пластины, $R/h = 85$, $t_p = 108$ с: — — расчет с идентифицированными коэффициентами; —○— эксперимент; —▲— справочные данные

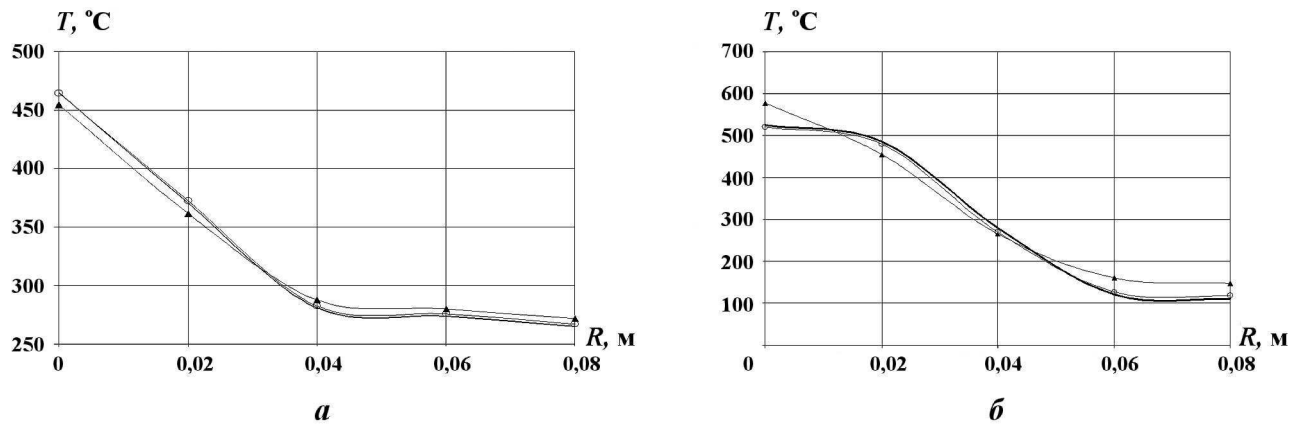


Рис. 8. Распределение температуры по поверхности пластин, $t_p = 180$ с: a — $R/h = 85$; b — $R/h = 547$; — — расчет с идентифицированными коэффициентами; \circ — эксперимент; \blacktriangle — справочные данные

Заключение

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

- 1) разработанный метод и алгоритм идентификации позволяют определять теплофизические параметры в условиях неоднородного нагрева;
- 2) перепад температур на поверхности пластины оказывает влияние на зависимости, характеризующие теплофизические параметры материала, причем большее — на коэффициент теплопроводности;
- 3) выполнение одновременной идентификации распределения теплового потока и теплофизических параметров материала позволяет определить расчетное поле температур, близкое к полученному из эксперимента.

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Кальнер В. Д., Гласко В. Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. М.: Машиностроение, 1990.
2. Мацевитый Ю. М. Обратные задачи теплопроводности (в 2 т.). Киев: Наукова думка, 2003.
3. Мацевитый Ю. М., Лушпенко С. Ф. Идентификация теплофизических свойств твердых тел. Киев: Наукова думка, 1990.
4. Сергиенко И. В., Дейнека В. С. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. Киев: Наукова думка, 2009.
5. Пацюк А. Г. Модернізований комплекс для експериментального дослідження статичних і динамічних процесів в тонкостінних конструкціях // Методи розв'язання прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. 2008. Вип. 9. С. 157—166.
6. Bathe K., Wilson E. L. Numerical method in finite element analysis. М.: Наука, 1985.
7. Ободан Н. И., Гук Н. А. Декомпозиционный подход к решению обратных задач деформирования тонкостенных оболочек и пластин // Вісник ДНУ. Сер. Механіка. 2009. Т. 17. № 5. С. 43—53.
8. Безухов Н. И., Бажанов В. Л., Гольденблат И. И. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. М.: Машиностроение, 1965.

Статья поступила в редакцию 23.03.10.