УДК 517.958:536.2

# О ДИФФУЗИОННЫХ СВОЙСТВАХ СХЕМЫ РОМБ ДЛЯ $P_1$-УРАВНЕНИЙ

А. А. Шестаков
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Дается анализ диффузионных свойств схемы РОМБ для уравнения переноса в $P_1$-приближении. Показано, что схема РОМБ имеет асимптотический диффузионный предел.

*Ключевые слова:* схема РОМБ, асимптотический диффузионный предел.

## Введение

Система уравнений переноса излучения и уравнения энергии представляют собой сложную нелинейную систему, зависящую в общем случае от семи независимых переменных. Поэтому ее часто решают в более простых приближениях. К таким приближениям относятся системы, получаемые с помощью метода сферических гармоник [1]. В одномерном случае сложные сферические функции заменяются полиномами Лежандра. Полиномы Лежандра образуют полную систему, поэтому с данным разложением не связано никаких приближений. Но на практике приходится ограничиваться конечным числом членов, поэтому полученный результат называется $P_n$-приближением, если разложение прерывается на $(n+1)$-м члене. Для нестационарных задач это приближение приводит к гиперболической системе уравнений относительно $n+1$ момента в разложении интенсивности излучения по полиномам Лежандра. Для стационарных задач можно пренебречь временными производными, и гиперболическая система в простейшем $P_1$-приближении перейдет в диффузионное уравнение с эллиптическим оператором.

Вторым достоинством $P_n$-приближения является выполнение сферической симметрии (отсутствие лучевого эффекта). К сожалению, $DS_n$-метод, применяемый для решения кинетического уравнения, не обеспечивает симметрии решения для одномерной сферической задачи, поэтому актуальность $P_n$-приближения по-прежнему высока. Инвариантность относительно сферической симметрии дает только метод сферических гармоник.

Одним из требований при построении хорошей разностной схемы для уравнения переноса в $P_n$-приближении является выполнение свойства асимптотического диффузионного предела. При его нарушении в диффузионных областях можно получить неверный результат даже при счете задач на сходимость (на очень подробной разностной сетке по пространству и времени).

В работе [2] представлен анализ диффузионных свойств одномерных $P_n$-уравнений в аналитической, а также в дискретной форме для схемы Римана. Результаты анализа показывают, что $P_n$-уравнения и схема Римана сохраняют линейность решения как по угловым, так и по пространственным переменным. Но, несмотря на это, как показано в [2], стандартная схема Римана не имеет асимптотического диффузионного предела.

Схема Римана доказала свою эффективность при решении задач на прохождение частиц через оптически тонкие области [3—6]. В работе [2] исследуется поведение этих схем для $P_n$-уравнений в задачах диффузионной природы, т. е. в которых преобладает рассеяние. В стационарном случае эти задачи описываются эллиптическим уравнением диффузии, которое является приближением уравнения переноса в пределе асимптотически малого поглощения и малых источников. Хорошо известно, что нестационарная диффузия описывается параболическим уравнением и что в отличие от гиперболических задач параболические уравнения характеризуются бесконечной скоростью распространения возмущения. Они также характеризуются диссипацией и дают гладкие решения даже в случае негладких источников и начальных данных. В этом и состоит проблема схемы Римана. Схема Римана специально создана для решения гиперболических уравнений и не имеет диффузионного предела.

Асимптотический анализ показывает, что основной причиной отсутствия диффузионного предела для схемы Римана является наличие в ней численной диссипации. Эта диссипация, зависящая от размера сетки, нужна для того, чтобы сделать схему противопотоковой и тем самым обеспечить точное физическое описание конечной скорости распространения и, следовательно, устойчивость. В работе [2] предложен метод, который позволяет сохранять диффузионный предел с помощью систематического уменьшения численной диссипации в областях, где преобладает рассеяние.

Для решения уравнения переноса в $P_1$-приближении в РФЯЦ-ВНИИТФ применяется схема РОМБ [7, 8]. В данной статье представлен анализ диффузионных свойств этой схемы. Показано, что схема РОМБ имеет асимптотический диффузионный предел.

## Схема Римана для уравнения переноса в $P_n$-приближении

Для исследования асимптотического диффузионного предела изложим схему Римана для уравнения переноса в $P_n$-приближении, следуя работе [2].

В работе [2] $P_n$-уравнения записаны в векторно-матричной форме:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\psi} + \frac{\partial}{\partial x}A\vec{\psi} = -S\vec{\psi} + \vec{Q}, \tag{1}$$

где все коэффициенты $P_n$-разложения собраны в матрице $A$, все сечения взаимодействия — в диагональной матрице $S$, $\operatorname{diag}(S) = (\Sigma_a, \Sigma_t, \Sigma_t, \dots)^T$, $\Sigma_a$ — коэффициент поглощения, $\Sigma_t$ — коэффициент ослабления; $c$ — скорость света; вектор $\vec{Q} = (Q/(2\sqrt{\pi}), 0, 0, \dots)^T$ содержит члены источника; $\vec{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \dots)$ — вектор угловых моментов.

Разностная аппроксимация уравнений (1) схемой Римана по пространственной переменной имеет вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\psi}_i + A\frac{\vec{\psi}_{i+1} - \vec{\psi}_{i-1}}{2\Delta x} - |\Lambda|\left(\vec{\psi}_{i+1} - 2\vec{\psi}_i + \vec{\psi}_{i-1}\right) = -S\vec{\psi}_i + \vec{Q}_i(t). \tag{2}$$

Здесь

$$|\Lambda| = \frac{1}{2\Delta x}\sum_{k=0}^{n} \vec{r}_k\,|\lambda_k|\,\vec{l}_k,$$

где $\vec{r}_k$, $\vec{l}_k$ — $k$-е правый и левый собственные векторы (нормированные так, что $\vec{l}_k\vec{r}_k = 1$); $\lambda_k$ — собственные значения матрицы $A$. Индекс $k$ начинается с нуля, так как он соответствует индексу $l$ в сферических гармониках. Такая дискретизация является противопотоковой по каждому характеристическому направлению системы и первого порядка точности по пространству. Схемы более высокого порядка приводят к значительно более сложному виду уравнений. Такая схема описана, например, в работе [4].

Уравнение переноса имеет частные решения, которые удовлетворяют закону Фика, т. е. являются диффузионными. Пусть, например, имеется линейный по пространству источник $Q = qx$, где $q$ — константа. Тогда стационарная функция, линейная по пространственной переменной $x$ и по направляющему косинусу угла $\mu$, будет решением уравнения переноса, которое удовлетворяет закону Фика. Благодаря этому свойству предполагается, что численная схема решения кинетического уравнения также должна сходиться к этому решению, по крайней мере в диффузионном пределе. Аналогично, $P_n$-уравнения имеют линейные по пространству стационарные решения, которые удовлетворяют закону Фика.

Для исследования диффузионного предела $P_n$-уравнений и численных методов их решения проанализируем случай среды, где рассеяние преобладает над поглощением, т. е. $\Sigma_s \gg \Sigma_a$ ($\Sigma_s = \Sigma_t - \Sigma_a$ — коэффициент рассеяния), и изменением по времени можно пренебречь, т. е. $\dfrac{\partial \psi_l}{\partial t} \approx 0$. Для этого разделим $\Sigma_s$ и $\Sigma_t$ на небольшую положительную величину $\varepsilon$ и умножим на нее $\Sigma_a$, $Q$ и $\dfrac{\partial}{\partial t}$. В результате получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \psi_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(B_1\psi_1\right) + \varepsilon\Sigma_a\psi_0 = \varepsilon\frac{Q}{2\sqrt{\pi}};\\
&\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \psi_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(A_{l-1}\psi_{l-1} + B_{l+1}\psi_{l+1}\right) + \frac{\Sigma_t}{\varepsilon}\psi_l = 0, \quad l = 1,\ldots,n;\\
&\psi_{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Затем зададим асимптотическое разложение $\psi_1$ в виде

$$\psi_l \sim \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \psi_l^{(j)}\left(x,t\right), \quad \varepsilon \to 0. \tag{3}$$

В работе [2] доказана теорема относительно асимптотического поведения $P_n$-уравнений, в которой утверждается: чтобы асимптотическое разложение (3) удовлетворяло $P_n$-уравнениям, необходимо, чтобы $\psi_l^{(j)} = 0$ при $l > j$. Иными словами, $\psi_l = O\left(\varepsilon^l\right)$. Более того, это решение удовлетворяет закону Фика в старшем порядке:

$$\psi_1^{(1)} = -A_0\frac{\partial \psi_0^{(0)}}{\partial x} \tag{4}$$

и

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \psi_0^{(0)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{A_0B_1}{\Sigma_t}\frac{\partial \psi_0^{(0)}}{\partial x} + \Sigma_a\psi_0^{(0)} = \frac{Q}{2\sqrt{\pi}}.$$

Перейдем к исследованию схемы Римана на выполнение свойства диффузионного предела. Сначала рассмотрим линейное по пространству и направляющему косинусу решение, которое в дискретном виде записывается как

$$\psi_{0,i} = \frac{qi\Delta x}{2\Sigma_a\sqrt{\pi}}; \quad \psi_{1,i} = -\frac{q}{2\Sigma_a\Sigma_t\sqrt{3\pi}}; \quad \psi_{l,i} = 0, \quad l > 1.$$

Для этого решения сразу же получаем, что $(\psi_{0,i+1} - \psi_{0,i-1})/(2\Delta x) = Q/(2\Sigma_a\sqrt{\pi}), (\psi_{l,i+1} - \psi_{l,i-1})/$ $/(2\Delta x) = 0$ при $l > 0$ и $\vec{\psi}_{i+1} - 2\vec{\psi}_i + \vec{\psi}_{i-1} = 0$. Тогда легко показать, что данное решение является точным решением дискретных $P_n$-уравнений схемы Римана.

Однако, несмотря на то, что дискретные $P_n$-уравнения имеют это точное решение типа диффузионного (которое удовлетворяет закону Фика), они не удовлетворяют свойству диффузионного предела. Используя вышеуказанную процедуру для $\varepsilon$, записываем дискретные уравнения в виде

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{d\vec{\psi}_i}{dt} + A\frac{\vec{\psi}_{i+1} - \vec{\psi}_{i-1}}{2\Delta x} - |\Lambda|(\vec{\psi}_{i+1} - 2\vec{\psi}_i + \vec{\psi}_{i-1}) = -\begin{pmatrix} \varepsilon\Sigma_a & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \Sigma_{t/\varepsilon} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \Sigma_{t/\varepsilon} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\vec{\psi} + \begin{pmatrix} \varepsilon Q/\left(2\sqrt{\pi}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

С использованием асимптотического разложения $\psi_{l,i} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \psi_{l,i}^{(j)}\left(t\right)$ в работе [2] доказывается, что схема Римана не имеет диффузионного предела. То есть $\psi_{0,i}^{(0)}$ не удовлетворяет дискретному диффузионному уравнению, так как из уравнения (2) получается $\psi_{0,i+1}^{(0)} - 2\psi_{0,i}^{(0)} + \psi_{0,i-1}^{(0)} = 0$. Это равенство свидетельствует о том, что члены старшего порядка являются линейными по пространству и удовлетворяют некорректному уравнению диффузии $\nabla^2\psi_0^{(0)} = 0$.

Именно поэтому в работе [2] предложена модифицированная схема Римана, в которой предлагается умножить матрицу диссипации $|\Lambda|$ на коэффициент $\left[1+(\Sigma_s\Delta x)^2\right]^{-1}$. В этом случае, если размер ячейки меньше среднего пробега рассеяния, диссипация практически не меняется, а если размер ячейки больше среднего пробега рассеяния, то диссипация резко уменьшается. Эта *диффузионная поправка* снимает проблему, так как позволяет сделать $|\Lambda| = O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$. Коэффициент пересчета удовлетворяет условию

$$\frac{1}{1+(\Sigma_{t/\varepsilon}-\varepsilon\Sigma_a)^2\Delta x^2} \sim \begin{cases} 1, & \varepsilon \to \infty; \\ \dfrac{\varepsilon^2}{\Sigma_s^2\Delta x^2}, & \varepsilon \to 0. \end{cases}$$

С использованием этого коэффициента уравнения порядка $1/\varepsilon$ дают

$$\psi_{l,i}^{(0)} = 0$$

при $l > 0$. Уравнения порядка 1 дают

$$\psi_{1,i}^{(1)} = \frac{-1}{2\Delta x\Sigma_t\sqrt{3}}\left(\psi_{0,i+1}^{(0)} - \psi_{0,i-1}^{(0)}\right),$$

что напоминает закон Фика. И наконец, уравнения порядка $\varepsilon$ дают

$$\frac{1}{c}\frac{d\psi_{0,i}^{(0)}}{dt} - \frac{1}{3\Sigma_t}\left(\frac{\psi_{0,i+2}^{(0)} - 2\psi_{0,i}^{(0)} + \psi_{0,i-2}^{(0)}}{4\Delta x}\right) + \Sigma_a\psi_{0,i}^{(0)} = \frac{Q_i}{2\sqrt{\pi}}.$$

Это дискретное уравнение диффузии с коэффициентом диффузии $D = 1/(3\Sigma_t)$. Эффект пересчета диссипации состоит в том, что противопотоковая схема Римана, в которой размер ячеек сравним со средним пробегом или меньше его, становится схемой в центральных разностях.

## Схема РОМБ для решения уравнения переноса в $P_1$-приближении

В задачах переноса теплового излучения достаточно хорошие результаты дают уже $P_1$- и $P_3$-приближения. Рассмотрим одномерную систему переноса лучистой энергии в $P_1$-приближении:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c}\frac{dU}{dt} + \frac{\partial S}{\partial x} + \Sigma_a U = \Sigma_a B; \\ &\frac{1}{c}\frac{dS}{dt} + \frac{1}{3}\frac{\partial U}{\partial x} + \Sigma_t S = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $U \sim \psi_0$ — плотность излучения, умноженная на скорость света; $S \sim \psi_1$ — поток излучения; $B$ — функция Планка, умноженная на скорость света.

Одномерная система переноса лучистой энергии в диффузионном приближении отличается уравнением для потока

$$\frac{1}{3}\frac{\partial U}{\partial x} + \Sigma_t S = 0. \tag{6}$$

Система разностных $P_1$-уравнений при аппроксимации по схеме РОМБ имеет вид (для упрощения записи здесь опущены индексы по пространственной переменной в центре разностной ячейки $i+1/2$)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c\tau}U^{n+1} + \frac{1}{h}\Delta_i S^{n+1} + \Sigma_a U^{n+1} = \frac{1}{c\tau}U^n + \Sigma_a B^{n+1}; \\ &\frac{1}{c\tau}S^{n+1} + \frac{1}{3h}\Delta_i U^{n+1} + \Sigma_t S^{n+1} = \frac{1}{c\tau}S^n, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\tau = t^{n+1} - t^n$; $h = x_{i+1} - x_i$.

Система уравнений (7) является незамкнутой. Для ее замыкания надо задавать дополнительные соотношения связи искомых величин в центрах ячеек с их аналогами на гранях. Эти соотношения определяют точность и монотонность схемы. Рассмотрим соотношения связи для $U$ и $S$ по схеме РОМБ [7, 8]:

$$U = 0{,}5\,(U_i + U_{i+1}) + \delta\Delta_i S; \quad S = 0{,}5\,(S_i + S_{i+1}) + \theta\Delta_i U. \tag{8}$$

Параметры $\delta$, $\theta$ выбираются из условий устойчивости и аппроксимации в виде

$$\delta = \frac{1}{4m}, \quad m = \theta + \frac{1}{3qh}, \quad q = \frac{1}{c\tau} + \Sigma_t, \quad \theta_{i+1/2} = \frac{q^{-1}_{i-1/2} - 2q^{-1}_{i+1/2} + q^{-1}_{i+3/2}}{12h}.$$

При данных параметрах схема РОМБ устойчива, имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй порядок аппроксимации по пространству. В линейном случае при $q = \text{const}$ схема упрощается, так как один из параметров обращается в нуль ($\theta = 0$).

Используя процедуру доказательства асимптотического диффузионного предела, записываем разностные уравнения (7), (8) в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{c\tau}U^{n+1} + \frac{1}{h}\Delta_i S^{n+1} + \varepsilon\Sigma_a U^{n+1} = \frac{\varepsilon}{c\tau}U^n + \varepsilon\Sigma_a B^{n+1};\\
&\frac{\varepsilon}{c\tau}S^{n+1} + \frac{1}{3h}\Delta_i U^{n+1} + \left(\frac{\Sigma_s}{\varepsilon} + \varepsilon\Sigma_a\right)S^{n+1} = \frac{\varepsilon}{c\tau}S^n;\\
&U = 0{,}5\,(U_i + U_{i+1}) + \delta\,(\varepsilon)\,\Delta_i S; \quad S = 0{,}5\,(S_i + S_{i+1}) + \theta\,(\varepsilon)\,\Delta_i U.
\end{aligned} \tag{9}$$

В отличие от схемы Римана схема РОМБ имеет более высокий порядок точности по пространству и монотонна в диффузионном приближении. Однако коэффициенты схемы имеют более сложную структуру и зависят от параметров среды. Поэтому анализ получается более сложный в связи с тем, что параметр $\varepsilon$ приходится вводить в коэффициенты $\delta, \theta$. Коэффициенты $q$, $\delta$, $\theta$ имеют вид

$$q = \frac{\varepsilon}{c\tau} + \frac{\Sigma_s}{\varepsilon} + \varepsilon\Sigma_a; \quad \delta = \frac{3qh}{4\,(1 + 3qh\theta)} = O\left(\varepsilon^{-1}\right); \quad \theta = \frac{\varepsilon h}{12}\Lambda\left[\varepsilon^2\left(\frac{1}{c\tau} + \Sigma_a\right) + \Sigma_s\right]^{-1} = O\,(\varepsilon)\,,$$

где $\Lambda(A) = (A_{i-1/2} - 2A_{i+1/2} + A_{i+3/2})/h^2$ — разностный оператор второй производной по пространству. В линейном случае коэффициенты $\delta$, $\theta$ имеют более простой вид:

$$\delta = \frac{3qh}{4} = \frac{3h}{4}\left(\frac{\varepsilon}{c\tau} + \frac{\Sigma_s}{\varepsilon} + \varepsilon\Sigma_a\right) = O\left(\varepsilon^{-1}\right); \qquad \theta = 0.$$

Подставив в $P_1$-уравнения асимптотические разложения $U_i = \sum\limits_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j U_i^{(j)}; S_i = \sum\limits_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j S_i^{(j)}$ и собрав члены при $\varepsilon^{-1}$, из второго уравнения (9) для любого индекса $i$ получим $S_i^{(0)} + S_{i+1}^{(0)} = 0$. Так как это соотношение справедливо для всей системы, то, исключив экзотический случай, когда поток меняет знак в каждой точке разностной сетки, получим $S_i^{(0)} = S_{i+1}^{(0)} = 0$. Собрав члены при $\varepsilon^0$, из первого уравнения (9) получим $S_{i+1}^{(0)} - S_i^{(0)} = 0$, откуда с учетом предыдущего выражения следует $S_i^{(0)} = 0$ для любого $i$. Из второго уравнения (9) получим закон Фика

$$\left(S^{(1)}_{i+1/2}\right)^{n+1} = -\frac{1}{3h\Sigma_s}\Delta_i\left(U^{(0)}\right)^{n+1}. \tag{10}$$

Из соотношений связи с учетом $S_i^{(0)} = 0$ вытекают соотношения связи для $U^{(0)}_{i+1/2}$:

$$U^{(0)}_{i+1/2} = 0{,}5\left(U_i^{(0)} + U_{i+1}^{(0)}\right) + \frac{3h\Sigma_s}{4}\Delta_i S^{(1)}; \quad S^{(0)}_{i+1/2} = 0.$$

Эти соотношения совпадают с соотношениями связи для плотности излучения в диффузионном приближении.

Собрав члены при $\varepsilon$, с учетом $S_i^{(0)}=0$ получим из первого уравнения (9)

$$\frac{1}{c\tau}\left(U_{i+1/2}^{(0)}\right)^{n+1}+\frac{1}{h}\Delta_i\left(S^{(1)}\right)^{n+1}+\Sigma_a\left(U_{i+1/2}^{(0)}\right)^{n+1}=\frac{1}{c\tau}\left(U_{i+1/2}^{(0)}\right)^{n}+\Sigma_a B^{n+1}. \tag{11}$$

Из второго уравнения (9) следует закон Фика

$$\left(S_{i+1/2}^{(2)}\right)^{n+1}=-\frac{1}{3h\Sigma_s}\Delta_i\left(U^{(1)}\right)^{n+1}.$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям (4).

Из соотношений связи с учетом $S_i^{(0)}=0$ получим соотношения связи для следующих членов разложения:

$$U_{i+1/2}^{(1)}=0{,}5\left(U_i^{(1)}+U_{i+1}^{(1)}\right)+\frac{3h\Sigma_s}{4}\Delta_i S^{(2)};\quad S_{i+1/2}^{(1)}=0{,}5\left(S_i^{(1)}+S_{i+1}^{(1)}\right)+\frac{h\Lambda\left(\Sigma_s^{-1}\right)}{12}\Delta_i U^{(0)}.$$

Эти уравнения совпадают с соотношениями связи для плотности излучения и дают соотношения связи для потока излучения в диффузионном приближении.

Собрав $S_{i+1/2}^{(1)}$ из закона Фика (10) и уравнение для $U_{i+1/2}^{(0)}$ (11), окончательно получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{c\tau}\left(U_{i+1/2}^{(0)}\right)^{n+1}+\frac{1}{h}\Delta_i\left(S^{(1)}\right)^{n+1}+\Sigma_a\left(U_{i+1/2}^{(0)}\right)^{n+1}=\frac{1}{c\tau}\left(U_{i+1/2}^{(0)}\right)^{n}+\Sigma_a B^{n+1};\\&\left(S_{i+1/2}^{(1)}\right)^{n+1}=-\frac{1}{3h\Sigma_s}\Delta_i\left(U^{(0)}\right)^{n+1},\end{aligned}$$

которые являются аппроксимацией дифференциальной системы уравнений диффузии (5), (6). Это свидетельствует о том, что схема РОМБ имеет асимптотический диффузионный предел в рамках одной разностной ячейки. Так как это справедливо для всех ячеек, то асимптотический диффузионный предел существует для всей системы.

Дальнейшее рассмотрение слагаемых при остальных степенях $\varepsilon$ в процедуре доказательства асимптотического диффузионного предела не нужно.

## Список литературы


1. *Jeans J. H.* The equations of radiative transfer of energy // Astron. Soc. 1917. Vol. 78. P. 28—36.
2. *McClarren R., Holloway J. P.* Establishing an asymptotic diffusion limit for Riemann solvers on the time-dependent $P_n$ equations // Int. Topical Meeting on Mathematics and Computation, Supercomputing, Reactor Physics and Nuclear and Biological Applications. Avignon, France, 2005.
3. *McClarren R., Holloway J. P., Brunner T. A., Mehlhorn T.* An implicit Riemann solver for the time-dependent $P_n$ equations // Int. Topical Meeting on Mathematics and Computation, Supercomputing, Reactor Physics and Nuclear and Biological Applications. Avignon, France, 2005.
4. *Brunner T. A., Holloway J. P.* One-dimensional Riemann solvers and the maximum entropy closure // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2001. Vol. 69. P. 543—566.
5. *Brunner T. A., Holloway J. P.* Two dimensional time dependent Riemann solvers for neutron transport // Proc. of the 2001 ANS Int. Meeting on Mathematical Methods for Nuclear Applications. Salt Lake City, Utah, 2001.
6. *Brunner T. A.* Riemann solvers for time-dependent transport based on the maximum entropy and spherical harmonics closures // Ph. D. thesis. Univerity of Michigan, Ann Arbor, Michigan, 2000.

7. *Гаджиев А. Д., Писарев В. Н.* Неявный конечно-разностный метод РОМБ для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью // Журнал вычисл. и мат. физ. 1979. Т. 19, № 5. С. 1288—1303.
8. *Гаджиев А. Д., Шестаков А. А.* Метод РОМБ для решения многогруппового уравнения переноса излучения в $P_1$-приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3, С. 66—70.

Статья поступила в редакцию 15.10.10.