

УДК 519.6

МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА БОУЭРА—УОТСОНА ГЕНЕРАЦИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИ ДВУМЕРНЫХ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТОК В ОБЛАСТЯХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

М. Л. Сидоров
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Предлагается модификация алгоритма Боуэра—Уотсона построения треугольной неструктурированной топологически двумерной сетки в областях произвольной формы и связности. Алгоритм состоит из четырех частей: 1) триангуляция исходного контура; 2) минимизация геометрической меры нерегулярности; 3) минимизация топологической меры нерегулярности; 4) измельчение полученной сетки (не обязательное).

Ключевые слова: неструктурированная (нерегулярная) сетка, триангуляция, метод Боуэра—Уотсона, топологическая оптимизация, геометрическая оптимизация.

Введение

Генерация пространственных сеток является одной из основных задач при решении уравнений математической физики численными сеточными методами. Существует множество методов построения сеток, среди которых можно выделить два наиболее популярных семейства для построения сеток в произвольных областях. Это фронтальные методы исчерпывания и методы, основанные на вставке узлов в уже существующую триангуляцию (тетраэдризацию). В данной статье будет рассмотрена модификация метода из второго семейства.

В работе предлагается алгоритм построения неструктурированной (нерегулярной) сетки в плоской области произвольной формы и дается описание применения метода на случай произвольной поверхности, заданной как набор треугольников. В основу алгоритма положено удовлетворение требования, чтобы итоговая сетка имела как можно меньшие меры геометрической и топологической нерегулярности. Первая часть этого требования удовлетворяется с помощью модификации алгоритма Боуэра—Уотсона (Bowyer, Watson) [1, 2], основанного на улучшении грубой триангуляции области. Вторая часть требования достигается фронтальным подходом и комплексом мер, направленных на приведение многоугольников фронта к шестиугольному виду. Алгоритм триангуляции области использует

функцию распределения характерного размера ячеек, которая в плоском случае является численным решением уравнения стационарной теплопроводности методом конечных элементов. В случае поверхности функция распределения вычисляется путем минимизации энергии системы ребер ячеек сетки. Здесь под *температурой* понимаются длины граничных ребер, полученные после заданного пользователем разбиения границы.

Алгоритм генерации нерегулярной сетки в плоской области

Рассматривается плоская двумерная область, ограниченная заданным контуром. Необходимо построить нерегулярную треугольную сетку с минимальными мерами геометрической и топологической нерегулярности.

Мера геометрической нерегулярности сетки определяется формулой

$$MG = \frac{1}{N_{\Delta}} \sum_{\Delta_i=1}^{N_{\Delta}} \left(\frac{1}{2} - \frac{r_{\Delta_i}}{R_{\Delta_i}} \right),$$

где r_{Δ_i} и R_{Δ_i} — соответственно радиусы вписанной в треугольную ячейку i и описанной около нее окружностей; N_{Δ} — число всех треугольных ячеек сетки в области.

Мера топологической нерегулярности сетки —

$$MT = \frac{\sum_{i=1}^{NC} |6 - Val_i|}{NC},$$

где под валентностью Val_i понимается число треугольников вокруг i -го узла сетки; NC — число всех внутренних узлов.

Для сетки, полностью состоящей из равносторонних треугольников, $MG = 0$ и $MT = 0$.

В общем случае должны создаваться анизотропные сетки, но на данный момент реализован вариант изотропных сеток, допускающих изменение характерного размера ячеек.

Входными данными для алгоритма являются координаты контура области. На выходе выдается триангуляция области в следующем (*треугольном*) формате: треугольник I ссылается на три свои вершины $P1, P2, P3$ и три своих *соседа* $M1, M2, M3$, перенумерованные против часовой стрелки (рис. 1).

Предлагаемый алгоритм реализуется двумя программами.

Первая программа — программа триангуляции области, ограниченной заданным контуром. При ее создании автор руководствовался тем, что программа должна быть проста в организации и реализации, без сложных структур и критериев. В результате анализа алгоритмов, описанных в различных источниках, был принят проект генератора с неупорядоченным фронтом, работающего по принципу уменьшения меры геометрической нерегулярности исходной триангуляции области.

Вторая программа — программа уменьшения меры топологической нерегулярности сетки —

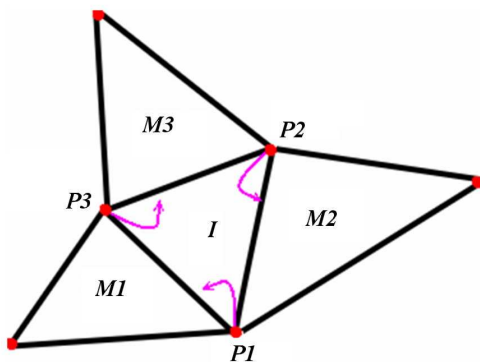


Рис. 1. Треугольный формат хранения топологии сетки

использует различные операции с сеткой, описанные ниже, для уменьшения числа шестигульников и увеличения числа шестиугольников. Здесь и далее в каждом случае имеется в виду многоугольник, полученный соединением центров тяжести треугольников, окружающих рассматриваемый узел. Количество углов многоугольника для внутреннего узла сетки равно валентности данного узла.

Кратко опишем весь процесс получения сетки на примере одной области.

Дискретный контур области получается из непрерывного контура с помощью программ разбиения кривых. После того, как контур получен, производится начальная триангуляция области, ограниченной данным контуром (рис. 2).

Для построения сетки необходима функция распределения характерных размеров ребер ячеек — $D(x, y)$. С целью получения качественного результата желательно иметь гладкое распределение характерного размера на контуре (т. е. гладкие граничные условия). В предлагаемом алгоритме функция распределения находится численно перед этапом построения сетки. Данная функция является решением уравнения стационарной теплопроводности с заданной на границе температурой ($\Delta D = 0$; $D(x, y)|_{(x,y) \in \Gamma} = \ell(x, y)$); характерный размер в точке граничного контура равен полусумме длин граничных ребер, сходящихся в этой точке.

После начальной триангуляции (см. рис. 2) области, ограниченной заданным контуром, производится анализ треугольников на наличие ненулевого градиента характерного размера. Если градиент существенно отличен от нуля, то для улучшения аппроксимации в центр треугольника добавляется узел, а сам треугольник дробится на три. После прохода по всем старым треугольникам (без треугольников, образованных при добавлении новых узлов сетки) и перестройки те-

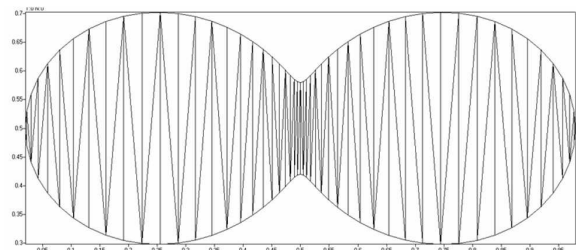


Рис. 2. Начальная триангуляция области, ограниченной контуром

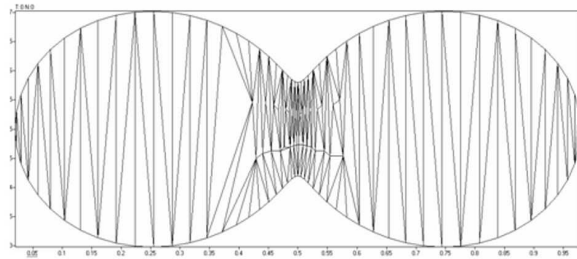
кушей триангуляции получаем первую итерацию сетки (рис. 3) для нахождения функции $D(x, y)$ с помощью метода конечных элементов. Полученную в результате систему линейных уравнений решаем в последовательном режиме с помощью библиотеки PMLP [3].

После нахождения искомой функции повторяется та же последовательность действий: проход по треугольникам, добавление новых узлов сетки, ее перестройка, решение уравнения стационарной теплопроводности. Число итераций ограничено двумя, чтобы сетка для определения функции распределения была не слишком подробной в зоне сильных градиентов. Итерации были введены, чтобы улучшить аппроксимацию функции распределения в случае ее нелинейного характера.

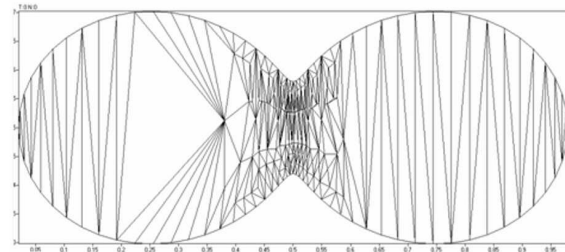
Результат численного решения уравнения Лапласа с граничными условиями первого рода для рассматриваемой задачи показан на рис. 4.

Найдя численное представление функции распределения, запоминаем сетку, на которой она была найдена, как фоновую и восстанавливаем первоначальную триангуляцию области. После этого запускается итерационный процесс построения сетки. Опишем основные детали алгоритма.

Набирается множество существующих треугольников, назовем его O . Из множества O вы-



а



б

Рис. 3. Фоновая сетка для нахождения функции распределения: а — после первой итерации; б — после второй итерации

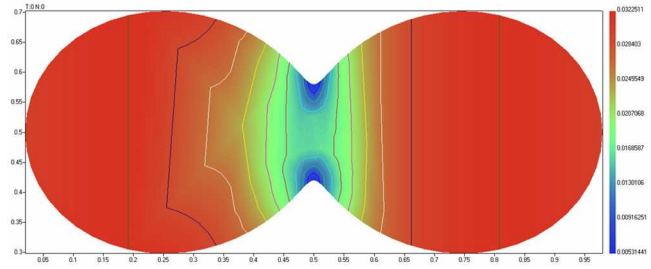


Рис. 4. Поле функции распределения

бираются треугольники, обладающие мерой искажения $M < 1 - \varepsilon$ (M вычисляется по формуле $M = 4\sqrt{3} \frac{\overline{S}_\Delta}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}$, \overline{S} — ориентированная площадь треугольника; ε — некоторая константа) и удовлетворяющие следующему условию: число сторон треугольника с длинами меньше δD не равно 3. Под виртуальной длиной D ребра $[I, J]$ понимаем среднее арифметическое из двух характерных размеров $D(I), D(J)$; $\delta = \text{const}$. Далее выбирается ребро фронта из условия $r_{\min} < L/D < r_{\max}$, где $L(I, J)$ — настоящая длина ребра. После этого из середины выбранного ребра $[I, J]$ строится нормаль с длиной, равной минимуму из виртуальной длины ребра и предполагаемого характерного размера D^* в новой точке K . Задаются следующие константы: $\varepsilon = 0,1$; $\delta = 1,2$; $r_{\min} = 0,8$; $r_{\max} = 1,2$. При построении точки K возможны две ситуации, показанные на рис. 5.

Далее находится треугольник, в который попала предполагаемая новая точка K . Это делается итерационно: от текущего треугольника набираются соседи первого, второго и т. д. порядков, пока не будет найден содержащий точку треугольник. Производится проверка на близость точки к вершинам найденного треуголь-

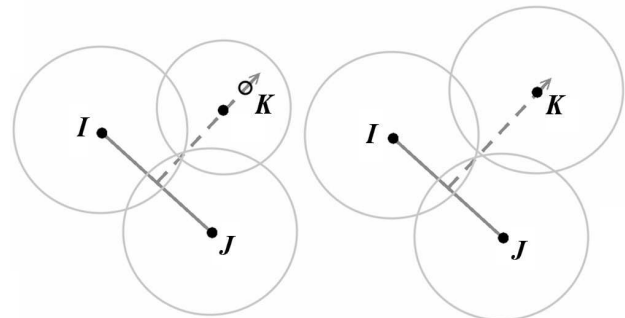


Рис. 5. Варианты построения новой точки K от ребра $[I, J]$

ника по следующему критерию: расстояние от точки до вершин треугольника меньше $rD(K)$. Константа $r = 1,5$. Если проверка пройдена, то точка добавляется в качестве нового узла сетки, а треугольники в некоторой окрестности этого узла в случае необходимости подвергаются перестройке. Характерный размер в узле вычисляется с помощью весов от треугольника фоновой сетки, в который он попал (поиск треугольника реализован так же, как это описано выше).

Сетка для данной области, полученная в результате выполнения первого этапа алгоритма, представлена на рис. 6.

На втором этапе полученная сетка подвергается коррекции, связанной с минимизацией топологической нерегулярности. Сначала выполняется программа по коррекции узлов на границе области, в результате которой будет получен массив граничных узлов (фронт). Затем производится коррекция фронта внутри области. В цикле по узлам фронта анализируется валентность узла и его соседей по фронту. Если комбинация этих валентностей является одной из заложенных в алгоритм, узел корректируется. Фронт продвигается от границы внутрь области (неограниченно или на число уровней, заданных пользователем).

С целью дальнейшего улучшения топологической меры сетки применяется набор процедур по

обработке некоторых часто встречающихся случаев.

На рис. 7 представлена сетка до и после ее топологической коррекции.

После топологической коррекции применяется сглаживание сетки с ограничением: не допускается уменьшение минимума меры искажения треугольников вокруг узла.

Из табл. 1 видно, что в результате выполнения программы топологической коррекции число пятиугольников для рассматриваемой области уменьшилось почти в 6 раз, а число семиугольников — почти в 7 раз. Мера топологической нерегулярности уменьшилась почти в 50 раз, вместе с тем это положительно сказалось и на мере геометрической нерегулярности, она уменьшилась в 2 раза.

Следует отметить, что процедура коррекции фронта может приводить к появлению небольшой анизотропии в сетке.

По желанию пользователя полученная сетка может быть представлена в *реберном* формате: ребро I ссылается на две точки $RV1$, $RV2$ и два ребра $RR1$, $RR2$, ближайшие к ребру I при его вращении против часовой стрелки вокруг точек $RV1$ и $RV2$ соответственно (рис. 8).

В качестве дополнительной опции предусмотрено также измельчение сетки и натяжение ее на контур с более подробной детализацией. Измельчение может производиться равномерно для

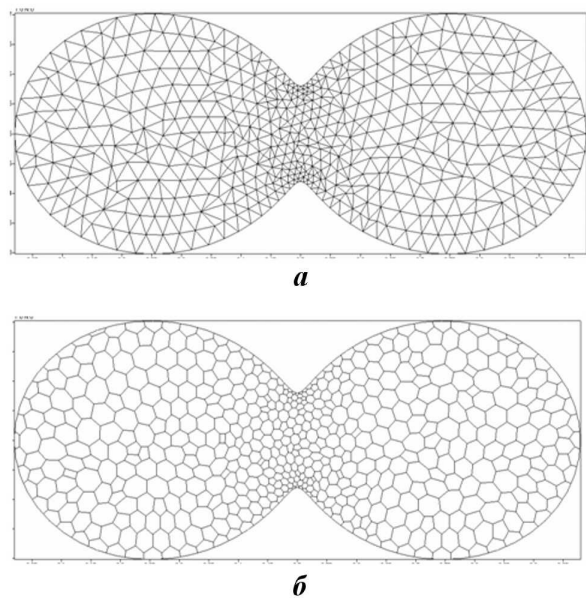


Рис. 6. Сетка треугольного (а) и многоугольного (б) видов после процесса уменьшения меры геометрической нерегулярности

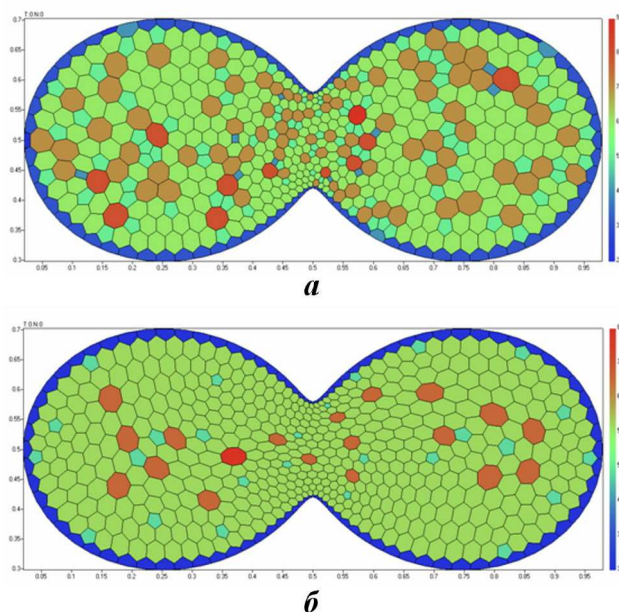


Рис. 7. Сетка до (а) и после (б) топологической коррекции

Таблица 1

Результаты топологической коррекции

Характеристика сетки	До коррекции	После коррекции
Число узлов:		
1-валентных	0	0
2-валентных	0	0
3-валентных	0	0
4-валентных	10	0
5-валентных	92	26
6-валентных	263	444
7-валентных	83	18
8-валентных	10	1
9-валентных	1	0
Общее число узлов	457	489
Мера топологической нерегулярности	0,474	0,009
Мера геометрической нерегулярности	0,004	0,002
Кол-во многоугольников (%) с числом вершин:		
5	34,9	5,8
7	31,5	4
>7	4,57	0,2

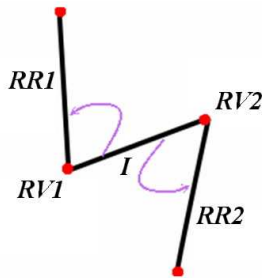


Рис. 8. Реберный формат хранения топологии сетки

всей сетки (с сохранением при этом отношения минимальной и максимальной длин ребер для всей сетки). Такое измельчение нужно для получения сеток с большим числом точек и асимптотической топологической мерой нерегулярности $O(1/4^n)$, где n — число итераций измельчения (т. е. мера стремится к нулю при измельчении сетки). Кроме того, измельчение может производиться для достижения длинами ребер заданного пользователем размера. При этом возможны четыре ситуации: треугольник дроблению не подвергается либо дробятся одна, две или три стороны. Последние три варианта показаны на рис. 9. Измельчение может использоваться и для случая параллельной генерации сетки большого размера.

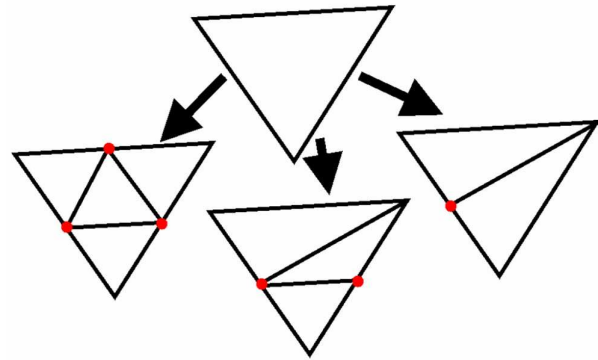


Рис. 9. Варианты дробления треугольника

Применение алгоритма для генерации нерегулярной сетки на поверхности

Описанный выше алгоритм был обобщен на случай, когда сетка строится на произвольной поверхности, заданной как набор треугольников. Это один из видов, в которых поверхности тел получаются в САД-системах. На входе имеется набор треугольников (например, записанных в формате STL), заданный характерный линейный размер. На выходе требуется получить нерегулярную сетку на поверхности — многоугольную или треугольную.

Для применения алгоритма необходима соответствующая подготовка начальных данных.

На первом этапе производится анализ особенностей поверхности с использованием синтеза алгоритма Дзяо [4], алгоритма определения жестких ребер по допустимому двугранному углу и алгоритма выделения плоских частей. Под жесткими ребрами понимаются ребра ячеек поверхностной сетки, которые нельзя перестраивать и которые могут быть поделены в соответствии с заданным характерным размером.

Второй этап — декомпозиция комплексной поверхности на ее составляющие. Декомпозиция поверхности нужна по следующим причинам: во-первых, для возможности параллельного построения сетки на сложных моделях; во-вторых, для уменьшения сложности начальных данных при построении сетки; в-третьих, для возможности задания своего характерного размера для каждой части поверхности.

Далее в цикле по получившимся поверхностям на жестких или граничных ребрах производится добавление точек — узлов сетки, так чтобы значения длин ребер были в окрестности заданного характерного размера ребра. Если жестких ребер нет, то имеем гладкую поверх-

ность. В этом случае производится деление данной поверхности одной из координатных плоскостей и на образованных ребрах добавляются новые узлы сетки. Производится построение сетки.

После того как все сетки построены, они объединяются в одну поверхностную сетку.

Следует заметить, что в отличие от плоского случая измельчение границ поверхности может приводить к неустойчивости алгоритма. Численные исследования показали: при измельчении граничных ребер внутренние ребра измельчению не подвергаются, что может приводить к установлению соседства между узлами сетки без учета кривизны поверхности. Следствием является некорректная работа алгоритмов перестроения ребер на поверхности и алгоритмов поиска проекции. Поэтому для поверхности данный метод становится многоступенчатым. Сначала производится построение грубой поверхностной сетки, а затем на ее основе строится искомая сетка.

В данной статье автор не касается различных моментов, возникающих при применении описанного алгоритма для построения сетки на произвольной поверхности. Возможно, это станет одной из тем следующих статей.

Результаты применения алгоритмов

Описанные алгоритмы реализованы в виде программ, которые тестировались на областях различной формы. Целью тестирования была проверка способности строить качественную сетку в невыпуклых областях с границей, разбитой неравномерно и равномерно.

На рис. 10, 11 представлены два примера сеток для областей, границы которых разбиты неравномерно. Пример 2 демонстрирует результат, получаемый при измельчении сетки. Время по-

строения сеток для примеров 1 и 2 приведено в табл. 2.

В примере 3 (рис. 12) показаны сетки, полученные как без фронтальной коррекции, так и с ее применением.

Примеры 4, 5 (рис. 13–15) характеризуются сильным перепадом длин ребер, что является основной стандартных тестов для алгоритмов построения сеток. На рис. 13 показаны сетка для примера 4, а также распределение характерного размера ребер ячеек этой сетки. На рис. 14 показан фрагмент сетки в зоне ее сгущения.

Пример 6 (рис. 16) демонстрирует генерацию неравномерной сетки на двух поверхностях. Первая поверхность — цилиндрическая, сопряженная с конической. Вторая поверхность состоит из двух сопряженных конических поверхностей.

В примерах 7, 8 рассматриваются более сложные по сравнению с примером 6 модели.

В примере 7 (рис. 17, см. также цветную вкладку) показана декомпозиция поверхностной сетки на 8 частей; цвета соответствуют разным частям поверхности. На рис. 18 показаны начальная сетка и сетка, полученная с помощью описанного в статье алгоритма.

В примере 8 (рис. 19, см. также цветную вкладку) после декомпозиции число частей поверхности составило 21. На разных частях поверхности задан свой характерный размер. На рис. 20 показаны начальная и конечная сетки поверхности с разных точек обзора.

Заключение

Предложена модификация алгоритма Боуэра—Уотсона, позволяющая строить качественную сетку в топологически двумерных областях произвольной формы и произвольной связности. Алгоритм был опробован на множе-

Таблица 2

Время построения сетки в зависимости от задачи

Пример	Число точек на границе	Разбиение границы	Кол-во треугольников	Кол-во точек	Время построения, с
1	3 051	Равномерное	~ 154 000	~ 79 000	16
1	6 107	— " —	~ 615 000	~ 310 000	55
1	6 107*	— " —	~ 615 000	~ 310 000	27
2	3 900	Неравномерное	~ 585 000	~ 294 000	83
2	5 200	— " —	~ 1 104 000	~ 554 000	161

* Расчет без вычисления характерного размера точки в процессе построения, размер фиксировался один и тот же для всей задачи (так как разбиение границы равномерное).

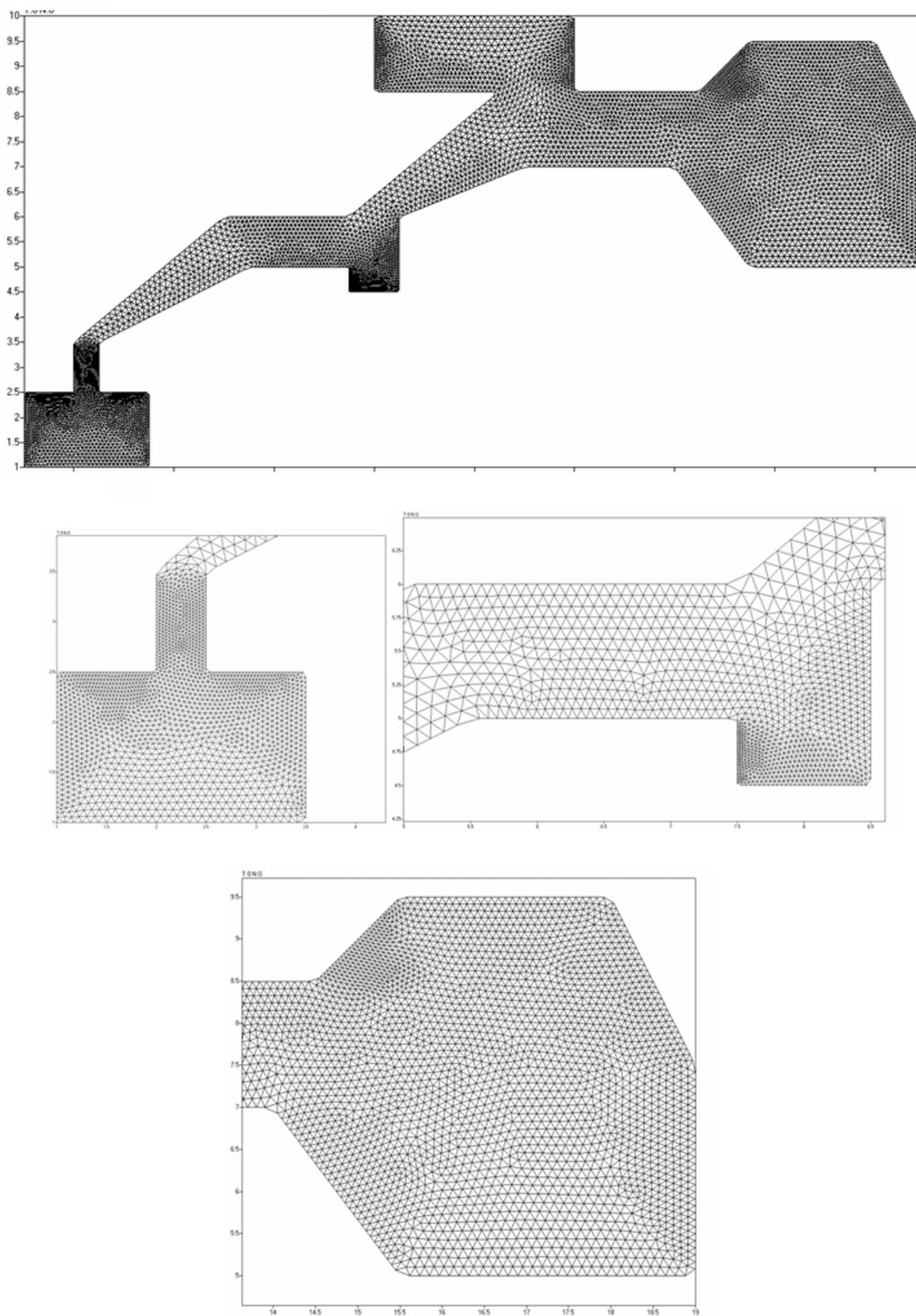


Рис. 10. Пример 1. Сетка и ее фрагменты

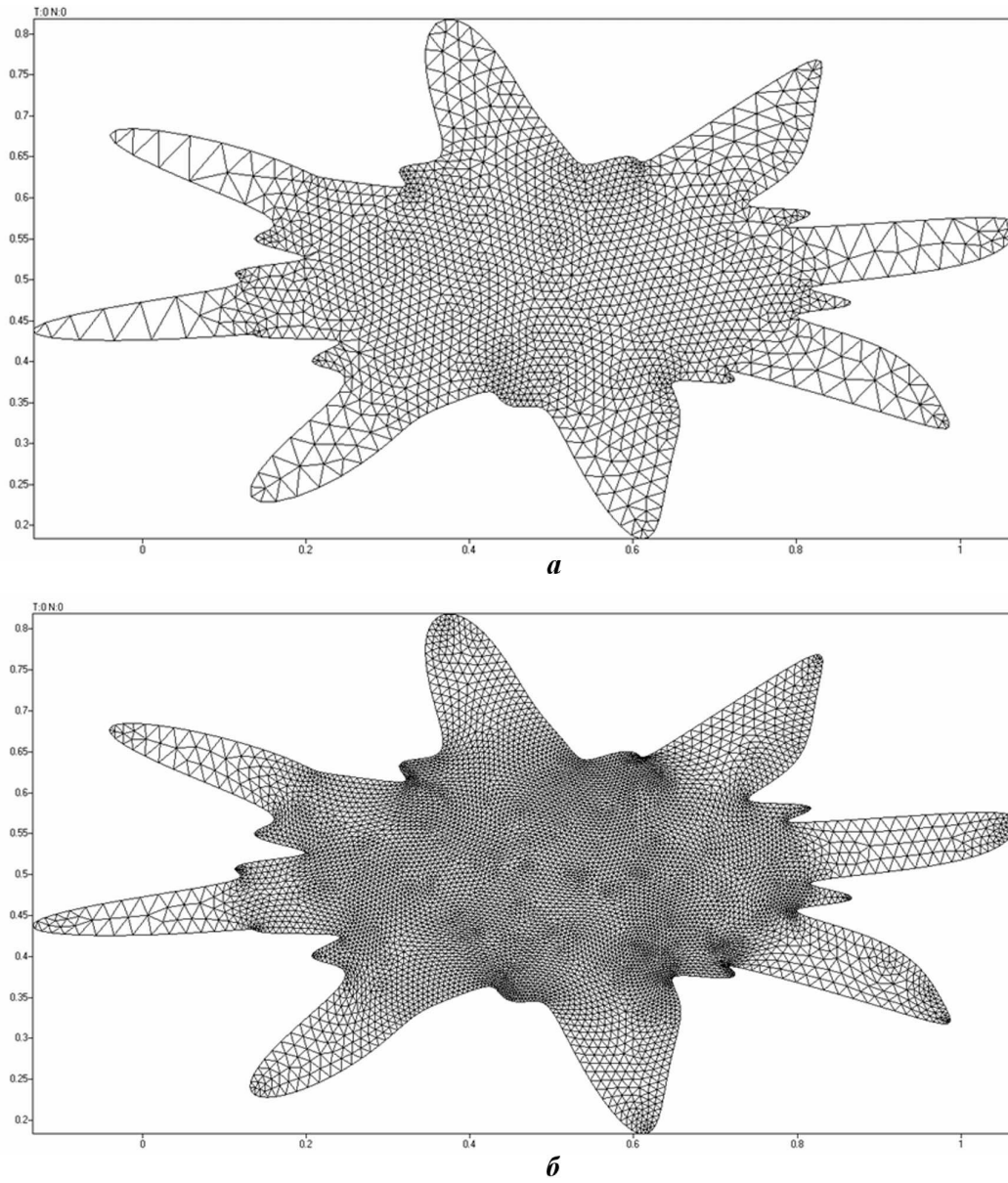


Рис. 11. Сетки из примера 2: *a* — грубая; *б* — подробная

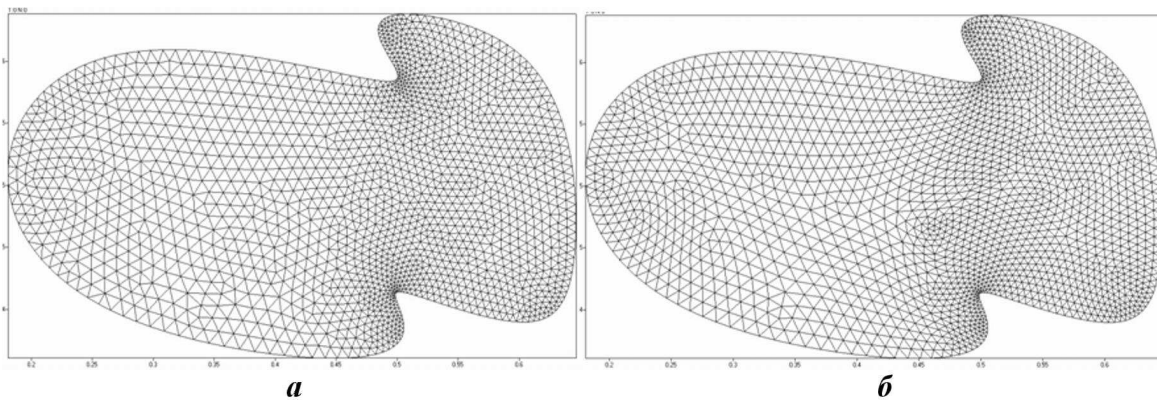


Рис. 12. Сетки из примера 3: *a* — без фронтальной коррекции; *б* — с фронтальной коррекцией

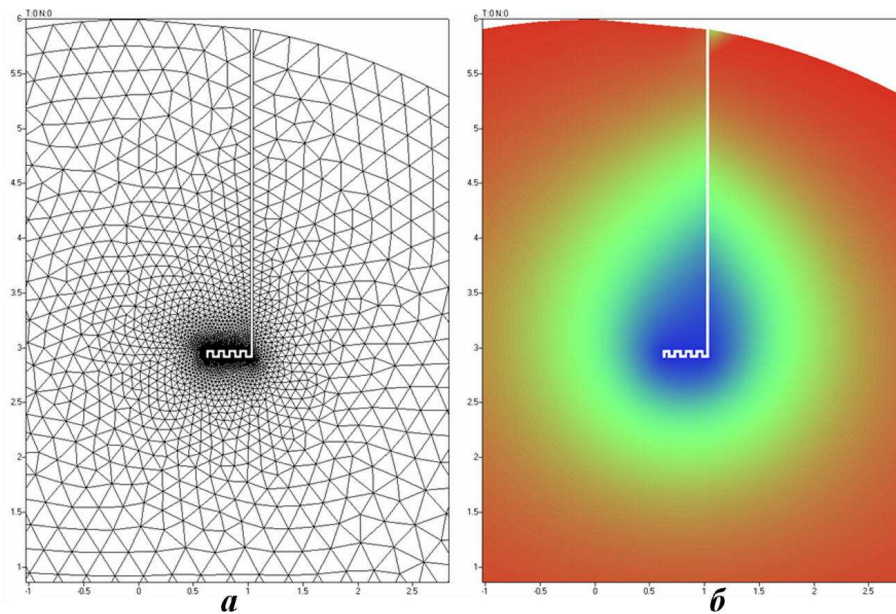


Рис. 13. Пример 4. Фрагмент сетки (а) и поле распределения характерного размера ребер ячеек (б)

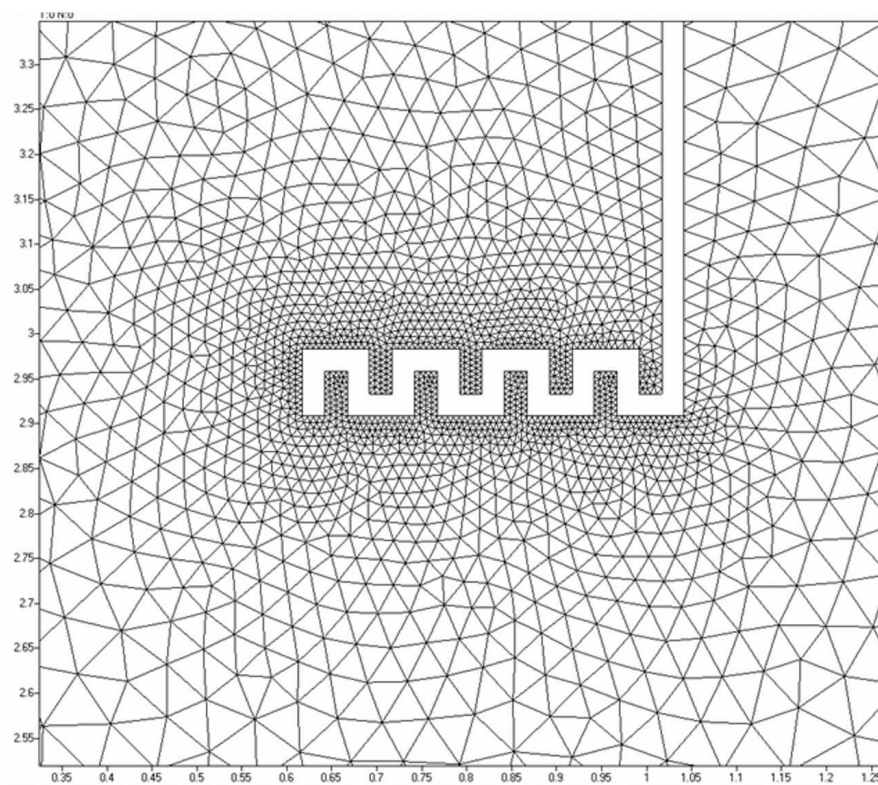


Рис. 14. Пример 4. Фрагмент сетки в зоне ее сгущения

стве задач и показал свою действенность. В настоящее время программа, в которой реализован данный алгоритм, используется при генерации сетки для сложных задач газовой динамики [5], теплопроводности, подземной гидродина-

мики. В будущем планируется обеспечить возможность учета анизотропии, реализовать обобщение алгоритма для трехмерного случая, сделать *параллельные* варианты алгоритмов и оптимизировать их.

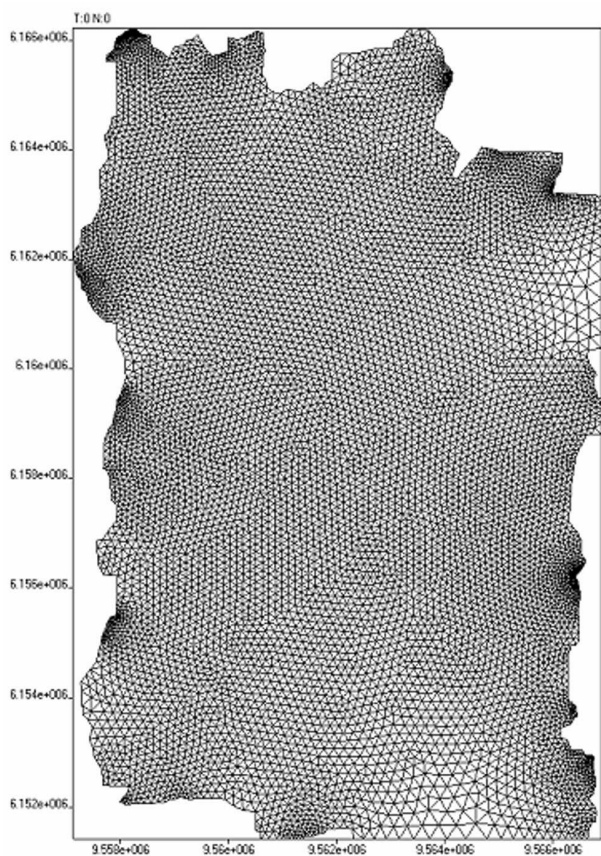


Рис. 15. Сетка из примера 5

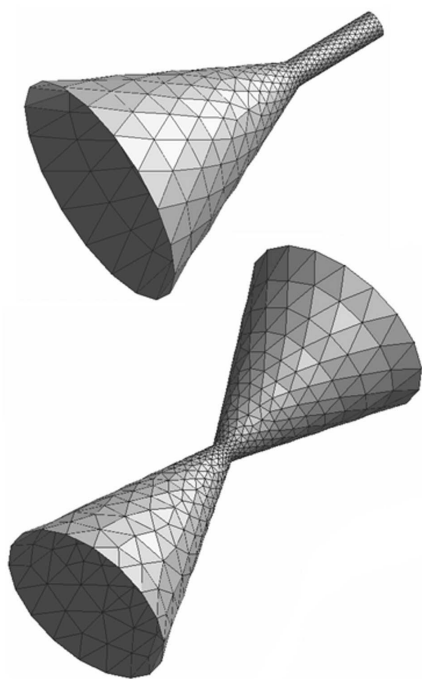


Рис. 16. Пример 6. Поверхностные сетки

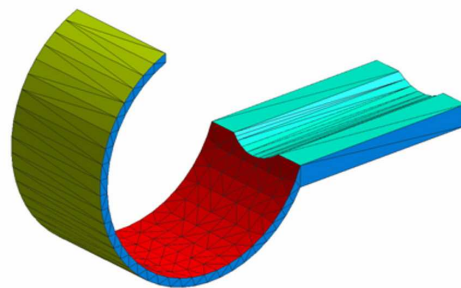


Рис. 17. Пример 7. Декомпозиция начальной поверхностной сетки

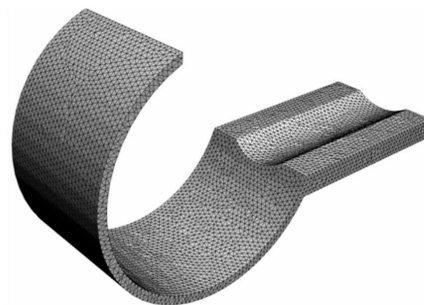
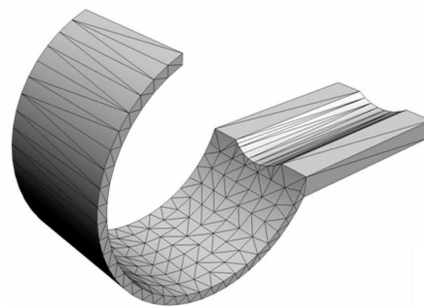


Рис. 18. Пример 7. Начальная и конечная поверхностные сетки

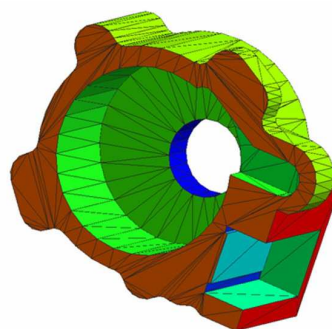


Рис. 19. Пример 8. Декомпозиция начальной поверхностной сетки

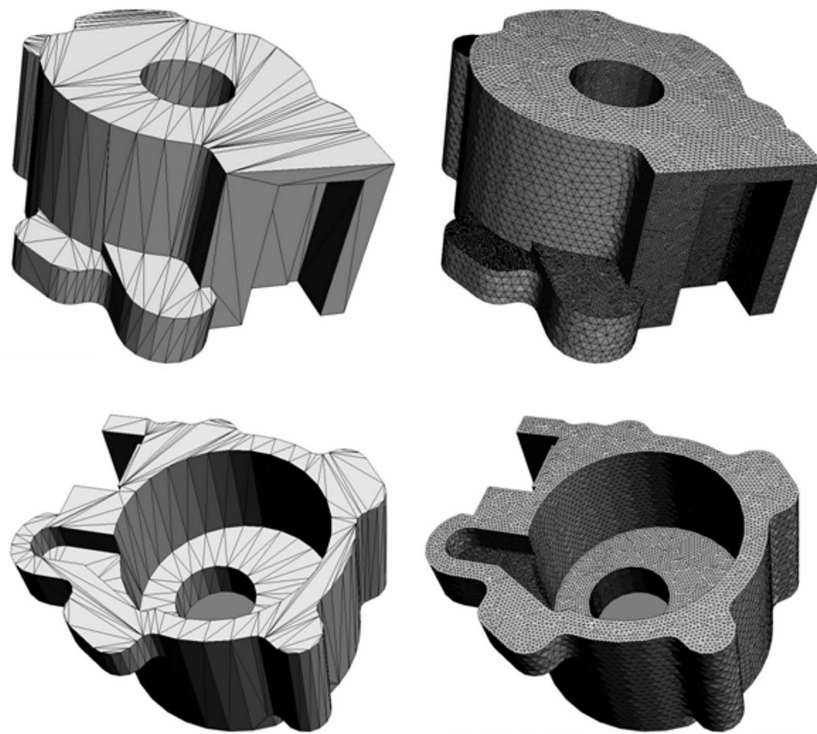


Рис. 20. Пример 8. Два ракурса поверхностной сетки: слева — начальная сетка; справа — конечная сетка

Список литературы

1. *Bowyer A.* Computing Dirichlet tessellations // *Comp. J.* 1981. Vol. 24, No. 2. P. 162—166.
2. *Watson D.* Computing the n -dimensional Delaunay tessellation with applications to Voronoi polytopes // *Ibid.* P. 167—172.
3. *Артемьев А. Ю., Бартенев Ю. Г., Басалов В. Г. и др.* Библиотека решателей разреженных линейных систем // *Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ.* 2004. Вып. 7. С. 80—95.
4. *Jiao X., Heath M. T.* Overlaying surface meshes, part II: Topology preservation and feature detection // *Int. J. Comp. Geom. and Appl.* 2004. Vol. 14. P. 403—419.
5. *Глаголева Ю. П., Жогов Б. М., Мальшиков В. Д. и др.* Основы методики "Медуза" численного расчета нестационарных задач газовой динамики // *Числ. методы мех. спл. среды.* 1972. Т. 3, № 2. С. 24—26.

Статья поступила в редакцию 17.12.10.
