

УДК 621.039.548.2.016.22:621.039.546.8

## ЭФФЕКТИВНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ТОНКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ И НА ГРАНИЦЕ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КАНАЛОВ

В. А. Старков, И. Ф. Поливанов  
(ГНЦ НИИАР, г. Димитровград)

Формулируются эффективные граничные условия на поверхности тонкого ( $d \ll h$ ) цилиндрического стержня, расположенного в замедляющей среде. Плотность потока нейтронов в замедлителе описывается уравнением переноса в  $P_1$ -приближении, при этом предполагается отсутствие азимутальной зависимости плотности потока нейтронов на поверхности стержня. Аналогичная задача решена для пустого цилиндрического канала с учетом зависимости плотности потока нейтронов от высоты и периметра канала. Приводятся аналитические выражения и табличные значения функций, входящих в граничные условия.

*Ключевые слова:* исследовательские реакторы,  $P_1$ -приближение уравнения переноса, сечения реакций, матрица взаимодействий, функции Бесселя, плотность потока нейтронов, односторонний ток нейтронов, альбеда.

### Введение

Исследование поведения различных материалов под облучением обычно проводят в исследовательских реакторах, имеющих ярко выраженную гетерогенную структуру активной зоны (АЗ). Качество этих экспериментов и интерпретация результатов в значительной степени зависят от точности определения нейтронного поля и энерговыделения в испытываемой сборке. Но эти характеристики могут сильно изменяться в процессе облучения под влиянием ряда факторов, главным из которых является изменение физических свойств сборки с выгоранием в ней топлива. Кроме того, на эти характеристики могут оказывать существенное влияние перемещение органов системы управления и защиты и изменение загрузки в близлежащих каналах реактора.

Непосредственные измерения поля нейтронов и энерговыделения в экспериментальном устройстве в процессе испытания весьма трудоемки и не всегда возможны. Все это указывает на важность и необходимость развития расчетных методов, дающих решение указанной задачи. При этом конструктивное исполнение экспериментальныхборок и неравномерность выгорания топлива в них приводят к тому, что в расчете нужно учитывать гетерогенность структуры не только АЗ реактора, но и облучательных устройств. *Гетерогенная* методика расчета такого реактора становится сложной и требует больших затрат машинного времени. Поэтому для выполнения поисковых, с целью оптимизации конструкции облучательного устройства, и инженерных расчетов целесообразно провести в методике такие упрощения, основанные на физических особенностях конструкции облучательных каналов, которые привели бы к значительному сокращению объема памяти и затрат времени на расчет при достаточной достоверности результатов.

В данной работе на основе некоторых физических допущений формулируется простое граничное условие альбедного типа на поверхности тонкого стержня, используя которое можно детально учесть гетерогенную структуру облучательного устройства.

Очень часто в составе рассчитываемой АЗ имеются пустые каналы, в которых поглощение и рассеяние нейтронов пренебрежимо мало. Для таких каналов получены эффективные граничные условия на поверхности.

Сформулированные граничные условия позволяют упростить гетерогенную методику расчета реактора при достаточной детальности описания нейтронного поля в облучательных устройствах. Значения функционалов, входящих в полученные соотношения, затабулированы и могут быть использованы в инженерных расчетах.

### Постановка задачи

Часто в межблочном пространстве реактора, как правило, заполненном замедлителем, для определения плотности потока нейтронов используют  $P_1$ -приближение уравнения переноса. Поэтому для углового распределения нейтронов, влетающих из замедлителя в блок, можно записать [1]

$$\vec{\varphi}(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \left[ \vec{\Phi}(\vec{r}) - 3\varepsilon \hat{D}(\vec{\Omega} \nabla \vec{\Phi}(\vec{r})) \right] \text{ при } \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0, \quad \vec{r} \in S. \quad (1)$$

Здесь  $\vec{\Omega}$  — орт направления полета нейтронов;  $\vec{\varphi}(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \{\varphi_1(\vec{r}, \vec{\Omega}), \dots, \varphi_m(\vec{r}, \vec{\Omega})\}^T$  —  $m$ -мерный вектор-столбец,  $i$ -я компонента которого имеет смысл плотности потока нейтронов  $i$ -й энергетической группы, двигающихся с разбросом направлений внутри единичного телесного угла вокруг направления  $\vec{\Omega}$ , в точке  $\vec{r}$ ;  $\vec{\Phi}(\vec{r}) = \{\Phi_1(\vec{r}), \dots, \Phi_m(\vec{r})\}^T$  —  $m$ -мерный вектор-столбец изотропной плотности потока нейтронов в замедлителе;  $\hat{D}$  — матрица диффузии в замедлителе;  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к поверхности блока  $S$ ;  $\varepsilon$  — поправка к  $P_1$ -приближению, учитывающая кривизну блока.

Вычислим число нейтронов, влетающих через единицу поверхности блока в единицу времени по всем направлениям (рис. 1):

$$\vec{j}_-(\vec{r}) = \int_{\Omega} d\Omega \vec{\varphi}(\vec{r}, \vec{\Omega}) |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \text{ для } \vec{n} \cdot \vec{\Omega} < 0, \quad \vec{r} \in S, \quad (2)$$

где

$$\vec{\Omega} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \sin \psi \vec{j} + \sin \theta \cos \psi \vec{k}. \quad (3)$$

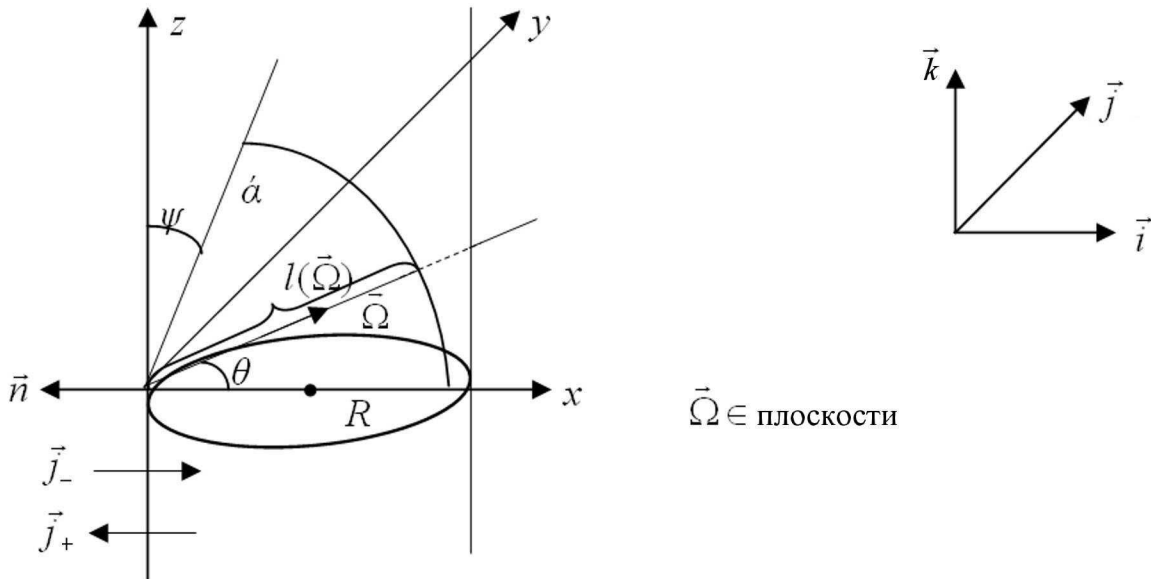


Рис. 1. Схема движения нейтрона в блоке

Выполним интегрирование по единичной полусфере с центром в точке влета нейтрона. Тогда с использованием (1) и (3) получим

$$\vec{j}_-(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi/2} d\theta \left[ \vec{\Phi}(\vec{r}) - 3\varepsilon \widehat{D} \left( \vec{\Omega} \nabla \vec{\Phi}(\vec{r}) \right) \right] \sin \theta \cos \theta, \quad \vec{r} \in S.$$

Используя очевидные соотношения

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \nabla \vec{\Phi}(\vec{r}) &= \frac{\partial \vec{\Phi}(\vec{r})}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \vec{\Phi}(\vec{r})}{\partial y} \sin \theta \sin \psi + \frac{\partial \vec{\Phi}(\vec{r})}{\partial z} \sin \theta \cos \psi, \quad \vec{r} \in S; \\ \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos \theta &= \pi; \quad \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos^2 \theta = \frac{2}{3}\pi; \\ \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \sin \psi \cos \theta &= \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \cos \theta \cos \psi = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

имеем окончательно

$$\vec{j}_-(\vec{r}) = \frac{1}{4} \vec{\Phi}(\vec{r}) + \frac{\varepsilon \widehat{D}}{2} \frac{\partial \vec{\Phi}(\vec{r})}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R}, \quad \vec{r} \in S. \quad (5)$$

Аналогичное соотношение можно записать для плотности потока вылетающих из блока нейтронов:

$$\vec{j}_+(\vec{r}) = \frac{1}{4} \vec{\Phi}(\vec{r}) - \frac{\varepsilon \widehat{D}}{2} \frac{\partial \vec{\Phi}(\vec{r})}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R}, \quad \vec{r} \in S. \quad (6)$$

Задача заключается в том, чтобы установить связь между (5) и (6), не прибегая к вычислению плотности потока нейтронов внутри блока.

### Постановка граничных условий на тонком цилиндрическом стержне

Предположим, что:

- 1) плотность нейтронов на поверхности блока не зависит от азимутального угла:

$$\vec{\Phi}(\vec{r}) \Big|_{\vec{r} \in S} = \vec{\Phi}(R);$$

- 2) влетевшие в блок нейтроны претерпевают не более одного взаимодействия, после которого распределение скоростей изотропно.

Вычислим количество нейтронов, влетевших в блок в единицу времени через единичную площадку поверхности, которые должны провзаимодействовать в блоке с уходом из своей энергетической группы:

$$\vec{j}_1(\vec{r}) = \int_{\Omega} \widehat{P}(\vec{\Omega}) \vec{\varphi}(\vec{r}, \vec{\Omega}) \left| \vec{n} \cdot \vec{\Omega} \right| d\Omega, \quad \vec{n} \cdot \vec{\Omega} < 0, \quad \vec{r} \in S. \quad (7)$$

Здесь

$$\widehat{P}(\vec{\Omega}) = \|\delta_{ij} P_i\|_m = \left\| \delta_{ij} \left( 1 - e^{-\Sigma_{cfd}^{(i)} l(\vec{\Omega})} \right) \right\|_m$$

— диагональная матрица вероятностей взаимодействий нейтронов на пути  $l(\vec{\Omega})$  пролета их внутри блока с ядрами материала блока, приводящих к уходу из группы;  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j; \end{cases}$   $\Sigma_{cfd}^{(i)}$  — полное сечение увода из  $i$ -й группы. Нетрудно показать [2], что (см. рис. 1)

$$l(\vec{\Omega}) = l(\psi, \theta) = \frac{2R \cos \theta}{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi}.$$

Интегрируя (7) по поверхности единичной полусферы, с учетом (1), (3), (4) и предположения 1 получаем

$$\vec{j}_1(\vec{r}) = \vec{j}_1(R) = \hat{\chi}_0(\boldsymbol{\lambda}) \frac{\vec{\Phi}(R)}{4} + \hat{y}_0(\boldsymbol{\lambda}) \frac{\varepsilon \hat{D}}{2} \frac{d\vec{\Phi}(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=R}. \quad (8)$$

Здесь  $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_i\}_m$ ,  $\lambda_i = \Sigma_{cfd}^i R$ ;  $\hat{\chi}_0(\boldsymbol{\lambda})$  и  $\hat{y}_0(\boldsymbol{\lambda})$  — диагональные матрицы вероятностей взаимодействий, выводящих нейтрон из своей группы соответственно при изотропном распределении скоростей падающих на блок нейтронов и при наличии градиента плотности потока на границе блока. Диагональные элементы этих матриц определяются формулами

$$\chi_0(\lambda_i) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi/2} d\theta \left( 1 - e^{-\lambda_i \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi}} \right) \cos \theta \sin \theta; \quad (9)$$

$$y_0(\lambda_i) = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi/2} d\theta \left( 1 - e^{-2\lambda_i \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi}} \right) \cos^2 \theta \sin \theta. \quad (10)$$

Проинтегрировав (9), следуя работе [2], а также выражение (10), получим следующие результаты:

$$\hat{\chi}_0(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{4}{3} \hat{\lambda}^2 \left\{ 2 \left[ \hat{\lambda} \left( \hat{K}_1(\boldsymbol{\lambda}) \hat{I}_1(\boldsymbol{\lambda}) + \hat{K}_0(\boldsymbol{\lambda}) \hat{I}_0(\boldsymbol{\lambda}) \right) - \hat{E} \right] + \right. \\ \left. + \hat{\lambda}^{-1} \hat{K}_1(\boldsymbol{\lambda}) \hat{I}_1(\boldsymbol{\lambda}) - \hat{K}_0(\boldsymbol{\lambda}) \hat{I}_1(\boldsymbol{\lambda}) + \hat{K}_1(\boldsymbol{\lambda}) \hat{I}_0(\boldsymbol{\lambda}) \right\}; \quad (11)$$

$$\hat{y}_0(\boldsymbol{\lambda}) = \hat{E} + \frac{1}{10} \left[ 18 \hat{K}_1(\boldsymbol{\lambda}) \hat{I}_1(\boldsymbol{\lambda}) \left( \hat{E} + \hat{\lambda}^2 \right) + 10 \hat{\lambda}^2 \left( \hat{K}_0(\boldsymbol{\lambda}) \hat{I}_0(\boldsymbol{\lambda}) - \hat{K}_1(\boldsymbol{\lambda}) \hat{I}_1(\boldsymbol{\lambda}) \right) - \right. \\ \left. - 2 \hat{\lambda}^2 \hat{K}_0(\boldsymbol{\lambda}) \hat{I}_0(\boldsymbol{\lambda}) + 4 \hat{\lambda} \left( \hat{K}_0(\boldsymbol{\lambda}) \hat{I}_1(\boldsymbol{\lambda}) - \hat{K}_1(\boldsymbol{\lambda}) \hat{I}_0(\boldsymbol{\lambda}) \right) - \hat{\chi}_0(\boldsymbol{\lambda}) \left( \frac{15}{2} \hat{\lambda}^{-1} + 8 \hat{\lambda} \right) \right]. \quad (12)$$

Здесь  $\hat{\lambda} = \|\delta_{ij} \lambda_i\|_m$ ;  $\hat{K}_p(\boldsymbol{\lambda}) = \|\delta_{ij} K_p(\lambda_i)\|_m$ ;  $\hat{I}_p(\boldsymbol{\lambda}) = \|\delta_{ij} I_p(\lambda_i)\|_m$ ;  $K_p(\lambda_i)$ ,  $I_p(\lambda_i)$  ( $p = 0, 1$ ) — функции Бесселя мнимого аргумента.

Формулы (11), (12) являются точными, числовые значения диагональных элементов ( $\chi_0(\lambda)$  и  $y_0(\lambda)$ ) этих матриц при непрерывном изменении параметра  $\lambda$  приведены в табл. 1. Некоторые значения функции  $\chi_0(\lambda)$  можно найти также в книге [3]. Там же дается методика учета неоднократного рассеяния нейтронов в блоке при изотропном падающем на блок потоке нейтронов.

Могут оказаться полезными асимптотические соотношения:

$$- \text{при } \lambda \gg 1 \quad \chi_0(\lambda) \cong 1 - \frac{1}{4} \lambda^{-2}; \quad y_0(\lambda) \cong 1 + \frac{1}{20} \lambda^{-1} (1 - 3\lambda^{-2});$$

$$- \text{при } \lambda \ll 1 \quad \chi_0(\lambda) \cong 2\lambda - \frac{8}{3} \lambda^2 + \frac{7}{4} \lambda^3 - \lambda^3 \ln \frac{\lambda}{2} + 0(\lambda^3); \quad y_0(\lambda) \cong 2\lambda - \frac{5}{2} \lambda^2 + \frac{\lambda^2}{10} \ln \frac{\lambda}{2} + 0(\lambda^2).$$

Таблица 1

Значения функций  $\chi_0(\lambda)$  и  $y_0(\lambda)$

$\lambda$	$\chi_0(\lambda)$	$y_0(\lambda)$
0,0	0	0
0,1	0,177005	0,179390
0,2	0,3172136	0,323868
0,3	0,429894	0,4409226
0,4	0,5212926	0,5361976
0,5	0,595953	0,6140442
0,6	0,6572976	0,6778656
0,7	0,7073588	0,7303473
0,8	0,7499854	0,7736316
0,9	0,785000	0,809421
1,0	0,8138955	0,8396088
1,1	0,8388849	0,8637527
1,2	0,85961400	0,8842975
1,3	0,8771889	0,9014553
1,4	0,89212569	0,9156984
1,5	0,9047177	0,92787236
1,6	0,91556106	0,9380114
1,7	0,92486444	0,9465608
1,8	0,9328747	0,9537872
1,9	0,93979506	0,9599116
2,0	0,9457960	0,96511254

Количество нейтронов, влетевших в единицу времени через единичную площадку поверхности блока и не претерпевших взаимодействия в блоке или взаимодействовавших без ухода из группы, определяется выражением

$$\vec{j}_2(R) = \int_{\Omega} \left( \widehat{E} - \widehat{P}(\vec{\Omega}) \right) \vec{\varphi}(R, \vec{\Omega}) \left| \vec{n} \cdot \vec{\Omega} \right| d\Omega, \quad \vec{n} \cdot \vec{\Omega} < 0,$$

или с учетом (2) и (7)

$$\vec{j}_2(R) = \vec{j}_-(R) - \vec{j}_1(R). \quad (13)$$

Количество нейтронов, родившихся в блоке в единицу времени в результате захвата с делением и согласно предположению 2 изотропно вылетающих из блока через единицу поверхности, вычисляется по формуле

$$\vec{j}_+^f(R) = \frac{1}{k_{\text{эф}}} \vec{\chi} \overrightarrow{\nu_f \Sigma_f} \widehat{\Sigma}_{cfd}^{-1} \vec{j}_1(R), \quad (14)$$

$$\widehat{\Sigma}_{cfd}^{-1} = \left\| \left\| \delta_{ij} \Sigma_{cfd}^{(i)-1} \right\| \right\|_m.$$

Здесь  $\vec{\chi}$  — вектор-столбец,  $i$ -я компонента которого есть доля нейтронов  $i$ -й группы в спектре деления;  $\overrightarrow{\nu_f \Sigma_f}$  — вектор-строка групповых сечений деления.

Количество нейтронов, вылетающих из блока через единицу поверхности после рассеяния на ядрах блока с переходом в соседнюю группу, выражается соотношением

$$\vec{j}_+^s = \widehat{\Sigma}_{j>i}^{i \rightarrow j} \widehat{\Sigma}_{cfd}^{-1} \vec{j}_1(R). \quad (15)$$

Здесь

$$\widehat{\Sigma}_{j>i}^{i \rightarrow j} = \left\| \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma_0^{1 \rightarrow 2} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \Sigma_0^{2 \rightarrow 3} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \Sigma_0^{m-1 \rightarrow m} & 0 \end{array} \right\| \right\|_m.$$

Очевидно, плотность потока нейтронов, вылетающих из блока, будет состоять из трех компонентов:

$$\vec{j}_+(R) = \vec{j}_+^f(R) + \vec{j}_+^s(R) + \vec{j}_2(R). \quad (16)$$

После подстановки (13)—(15), (8), (5) и (6) в уравнение (16) получим

$$\widehat{\omega} \widehat{\Sigma}_{cfd}^{-1} \widehat{\chi}_0(\lambda) \vec{\Phi}(R) + 2\varepsilon \left( \widehat{\omega} \widehat{\Sigma}_{cfd}^{-1} \widehat{y}_0(\lambda) + 2\widehat{E} \right) \widehat{D} \frac{d\vec{\Phi}(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=R} = 0. \quad (17)$$

Здесь

$$\widehat{\omega} = \frac{1}{k_{\text{эф}}} \overrightarrow{\chi} \nu_f \overrightarrow{\Sigma}_f + \sum_{j>i}^{i \rightarrow j} -\widehat{\Sigma}_{cfd}.$$

Если учесть, что  $\widehat{D} \frac{d\vec{\Phi}(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=R} = -\vec{J}(R)$ , выражение (17) можно записать в виде

$$\widehat{\omega} \widehat{\Sigma}_{cfd}^{-1} \widehat{\chi}_0(\lambda) \vec{\Phi}(R) + 2\varepsilon \left( \widehat{\omega} \widehat{\Sigma}_{cfd}^{-1} \widehat{y}_0(\lambda) + 2\widehat{E} \right) \vec{J}(R) = 0, \quad (18)$$

или

$$\vec{\Phi}(R) - 2\varepsilon \left( \widehat{\chi}_0^{-1}(\lambda) \widehat{y}_0(\lambda) + 2\widehat{\chi}_0^{-1}(\lambda) \widehat{\Sigma}_{cfd} \widehat{\omega}^{-1} \right) \vec{J}(R) = 0. \quad (19)$$

Выражения (17), (18), или (17), (19), являются искомыми граничными условиями.

### Постановка граничных условий на поверхности пустого цилиндрического канала

Плотность потока нейтронов, вылетающих из канала через единичную площадку вокруг точки  $A$  (рис. 2), можно записать в виде

$$\vec{j}(\vec{r}) = \int_s \vec{\varphi}(\vec{r}', \vec{\Omega}') \frac{|\vec{e}_{R'} \cdot \vec{\Omega}'| |\vec{e}_R \cdot \vec{\Omega}|}{l^2(\vec{r}', \vec{r})} ds'. \quad (20)$$

Здесь

$$l(\vec{r}', \vec{r}) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = \sqrt{4R^2 \sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} + (z-z')^2} \quad (21)$$

— длина пути пролета нейтронов в канале;  $\vec{e}_{R'}$ ,  $\vec{e}_{\varphi'}$ ,  $\vec{e}_{z'}$  — орты аффинных координат в точке влета нейтрона в блок;  $\vec{e}_R$ ,  $\vec{e}_{\varphi}$ ,  $\vec{e}_z$  — орты аффинных координат в точке вылета нейтрона из блока;  $\vec{\Omega}' = -\frac{2R}{l(\vec{r}', \vec{r})} \sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} \vec{e}_{R'} - \frac{2R}{l(\vec{r}', \vec{r})} \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2} \cos \frac{\varphi' - \varphi}{2} \vec{e}_{\varphi'} - \frac{z' - z}{l(\vec{r}', \vec{r})} \vec{e}_{z'}$  — единичный вектор направления полета нейтрона в точке влета в блок;  $\vec{\Omega} = -\frac{2R}{l(\vec{r}', \vec{r})} \sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} \vec{e}_R - \frac{2R}{l(\vec{r}', \vec{r})} \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2} \times \cos \frac{\varphi' - \varphi}{2} \vec{e}_{\varphi} - \frac{z' - z}{l(\vec{r}', \vec{r})} \vec{e}_z$  — единичный вектор направления полета нейтрона в точке вылета;  $ds' = R d\varphi' dz'$ .

Представим плотность потока нейтронов  $\vec{\Phi}(\vec{r})$  в выражении (1) в виде

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}(\vec{r}') &= \vec{\Phi}(R, \varphi', z') = \\ &= \cos \chi z' \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\Phi}_n(R) \cos n(\varphi' + \alpha). \end{aligned} \quad (22)$$

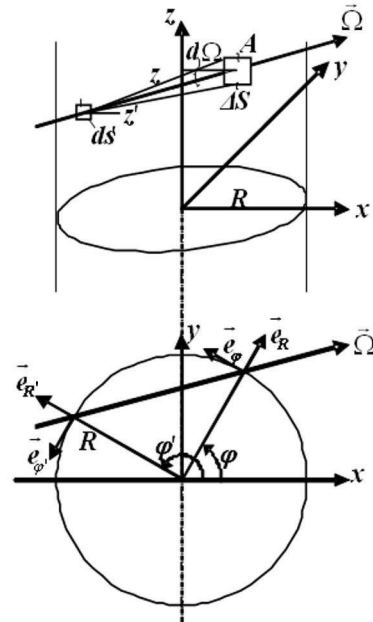


Рис. 2. Схема движения нейтрона в пустом канале

Подставляя (22) в (1), с учетом (21) получаем

$$\begin{aligned}
 \vec{\varphi}(\vec{r}', \vec{\Omega}') = & \frac{1}{4\pi} \left\{ \cos \chi z' \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\Phi}_n(R) \cos n(\varphi' + \alpha) - \right. \\
 & - 3\varepsilon \hat{D} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -\vec{\Phi}'_n(R) \cos n(\varphi' + \alpha) \cos \chi z' \frac{2R}{\sqrt{4R^2 \sin^2 \frac{\varphi^*}{2} + (z' - z)^2}} \sin^2 \frac{\varphi^*}{2} + \right. \\
 & + n \vec{\Phi}_n(R) \sin n(\varphi' + \alpha) \cos \chi z' \frac{2 \sin \frac{\varphi^*}{2} \cos \frac{\varphi^*}{2}}{\sqrt{4R^2 \sin^2 \frac{\varphi^*}{2} + (z' - z)^2}} + \\
 & \left. \left. + \vec{\Phi}_n(R) \chi \sin \chi z' \cos n(\varphi' + \alpha) \frac{z' - z}{\sqrt{4R^2 \sin^2 \frac{\varphi^*}{2} + (z' - z)^2}} \right] \right\}. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Здесь использовались следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 \varphi^* = \varphi' - \varphi; \quad \vec{\Phi}'_n(R) = & \left. \frac{d\vec{\Phi}_n(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=R}; \\
 \nabla \vec{\Phi}(\vec{r}') = & \frac{\partial \vec{\Phi}(\vec{r}')}{\partial R} \vec{e}_{R'} + \frac{\partial \vec{\Phi}(\vec{r}')}{\partial \varphi'} \frac{1}{R} \vec{e}_{\varphi'} + \frac{\partial \vec{\Phi}(\vec{r}')}{\partial z'} \vec{e}_{z'} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \vec{\Phi}'_n(R) \cos n(\varphi' + \alpha) \cos \chi z' \vec{e}_{R'} - \right. \\
 & \left. - \frac{n}{R} \vec{\Phi}_n(R) \sin n(\varphi' + \alpha) \cos \chi z' \vec{e}_{\varphi'} - \vec{\Phi}_n(R) \chi \sin \chi z' \cos n(\varphi' + \alpha) \vec{e}_{z'} \right].
 \end{aligned}$$

Подставив соотношение (23) в (20), с учетом (21) получаем

$$\begin{aligned}
 \vec{j}(\vec{r}) = & \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi^* \int_{-h}^{+h} dz' \left\{ \left\{ \cos \chi z' \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\Phi}_n(R) \cos n(\varphi' + \alpha) + \right. \right. \\
 & + 3\varepsilon \hat{D} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \vec{\Phi}'_n(R) \cos \chi z' \cos n(\varphi' + \alpha) \frac{2R \sin^2 \frac{\varphi^*}{2}}{\sqrt{4R^2 \sin^2 \frac{\varphi^*}{2} + (z' - z)^2}} - \right. \\
 & - n \vec{\Phi}_n(R) \sin n(\varphi' + \alpha) \cos \chi z' \frac{2 \sin \frac{\varphi^*}{2} \cos \frac{\varphi^*}{2}}{\sqrt{4R^2 \sin^2 \frac{\varphi^*}{2} + (z' - z)^2}} - \\
 & \left. \left. - \vec{\Phi}_n(R) \chi \sin \chi z' \cos n(\varphi' + \alpha) \frac{z' - z}{\sqrt{4R^2 \sin^2 \frac{\varphi^*}{2} + (z' - z)^2}} \right] \right\} \frac{4R^2 \sin^4 \frac{\varphi^*}{2}}{\left[ 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi^*}{2} + (z' - z)^2 \right]^2} \Bigg\}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Применив следующие легко проверяемые соотношения

$$\int_0^{2\pi} d\varphi^* f\left(\sin^2 \frac{\varphi^*}{2}\right) \cos n\varphi^* = 2 \int_0^{2\pi} f\left(\sin^2 \frac{\varphi^*}{2}\right) \cos n\varphi^* d\varphi^*;$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi^* f\left(\sin^2 \frac{\varphi^*}{2}\right) \sin \varphi^* \sin n\varphi^* = 2 \int_0^{\pi} f\left(\sin^2 \frac{\varphi^*}{2}\right) \cos n\varphi^* d\varphi^*;$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi^* f\left(\sin^2 \frac{\varphi^*}{2}\right) \sin n\varphi^* = \int_0^{2\pi} d\varphi^* f\left(\sin^2 \frac{\varphi^*}{2}\right) \sin \varphi^* \cos n\varphi^* = 0$$

и известные формулы

$$\begin{aligned} \cos n(\varphi' + \alpha) &= \cos n\varphi^* \cos n(\varphi + \alpha) - \sin n\varphi^* \sin n(\varphi + \alpha); \\ \sin n(\varphi' + \alpha) &= \sin n\varphi^* \cos n(\varphi + \alpha) + \sin n\varphi^* \sin n(\varphi + \alpha), \end{aligned}$$

выражение (24) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{r}) &= \frac{R}{4\pi} \int_0^{\pi} d\varphi^* \int_{-h}^{+h} dz' \frac{4R^2 \sin^4 \frac{\varphi^*}{2}}{\left[(z - z')^2 + 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi^*}{2}\right]^2} \left\{ \cos \chi z' \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\Phi}_n(R) \cos n\varphi^* \cos n(\varphi + \alpha) + \right. \\ &+ 3\varepsilon \hat{D} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \vec{\Phi}'_n(R) \frac{2R \sin^2 \frac{\varphi^*}{2}}{\sqrt{(z' - z)^2 + 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi^*}{2}}} \cos \chi z' \cos n\varphi^* - \right. \\ &- n \vec{\Phi}_n(R) \frac{2 \sin \frac{\varphi^*}{2} \cos \frac{\varphi^*}{2}}{\sqrt{(z' - z)^2 + 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi^*}{2}}} \cos \chi z' \sin n\varphi^* - \\ &\left. \left. - \vec{\Phi}_n(R) \chi \sin \chi z' \frac{z' - z}{\sqrt{4R^2 \sin^2 \frac{\varphi^*}{2} + (z' - z)^2}} \right] \cos n(\varphi + \alpha) \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Будем вычислять функцию  $\vec{j}(\vec{r})$  в точках, достаточно удаленных от концов канала. Тогда, используя тот факт, что длина канала велика по сравнению с его диаметром, заменим в (25) пределы интегрирования во внутреннем интеграле на бесконечные. Преобразуем (25), сделав замену переменных  $z' - z = 2tR \sin \frac{\varphi^*}{2}$  и используя тождества

$$\begin{aligned} \cos \chi z' &= \cos \chi(z' - z) \cos \chi z - \sin \chi(z' - z) \sin \chi z; \\ \sin \chi z' &= \sin \chi(z' - z) \cos \chi z + \cos \chi(z' - z) \sin \chi z, \end{aligned}$$

к следующему виду:

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} d\varphi^* \int_0^{\infty} dt \sin \frac{\varphi^*}{2} \frac{1}{(t^2 + 1)^2} \left\{ \cos \left(2\pi \sin \frac{\varphi^*}{2} t\right) \cos \chi z \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\Phi}_n(R) \cos n(\varphi + \alpha) \cos n\varphi^* + \right. \\ &+ 3\varepsilon \hat{D} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \vec{\Phi}'_n(R) \frac{\sin \frac{\varphi^*}{2} \cos \left(2\lambda \sin \frac{\varphi^*}{2} t\right)}{\sqrt{t^2 + 1}} \cos \chi z \cos n(\varphi + \alpha) - \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & - n \vec{\Phi}_n(R) \frac{\cos \frac{\varphi^*}{2} \cos \left( 2\lambda \sin \frac{\varphi^*}{2} t \right) \sin n\varphi^*}{R\sqrt{t^2+1}} \cos \chi z \cos n(\varphi + \alpha) - \\
 & - \vec{\Phi}_n(R) \frac{\lambda}{R} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \sin \left( 2\lambda \sin \frac{\varphi^*}{2} t \right) \cos n\varphi^* \cos \chi z \cos n(\varphi + \alpha) \Bigg\}. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Здесь учтено, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t^2+1)^2} dt = \begin{cases} 2 \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{(t^2+1)^2} dt & \text{при } f(t) = f(-t); \\ 0 & \text{при } f(t) = -f(-t); \end{cases}$$

$\lambda = \chi R$ .

Известно, что [4, 5]

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \frac{\cos \left( \left( 2\lambda \sin \frac{\varphi^*}{2} \right) t \right)}{(t^2+1)^2} dt &= \frac{\pi}{4} \left( 1 + 2\lambda \sin \frac{\varphi^*}{2} \right) e^{-2\lambda \sin \frac{\varphi^*}{2}}; \\
 \int_0^{\infty} \frac{\cos \left( \left( 2\lambda \sin \frac{\varphi^*}{2} \right) t \right)}{(t^2+1)^{2+\frac{1}{2}}} dt &= \frac{4}{3} \lambda^2 \sin^2 \frac{\varphi^*}{2} K_2 \left( 2\lambda \sin \frac{\varphi^*}{2} \right); \\
 \int_0^{\infty} \frac{t \sin \left( 2\lambda \left( \sin \frac{\varphi^*}{2} \right) t \right)}{(t^2+1)^{2+1/2}} dt &= \frac{4}{3} \lambda^2 \sin^2 \frac{\varphi^*}{2} K_1 \left( 2\lambda \sin \frac{\varphi^*}{2} \right).
 \end{aligned} \quad (27)$$

С учетом выражений (27) соотношение (26) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 \vec{j}(\vec{r}) &= \cos \chi z \sum_{n=0}^{\infty} \cos n(\varphi + \alpha) \left[ \frac{1}{4} \vec{\Phi}_n(R) y_n^{(1)}(\lambda) + \right. \\
 & \left. + \frac{\varepsilon \hat{D}}{2} \left( \vec{\Phi}_n'(R) y_n^{(2)}(\lambda) - \frac{1}{R} \vec{\Phi}_n(R) y_n^{(3)}(\lambda) - \frac{1}{R} \vec{\Phi}_n(R) y_n^{(4)}(\lambda) \right) \right], \quad (28)
 \end{aligned}$$

где

$$y_n^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\varphi^* \sin \frac{\varphi^*}{2} \left( 1 + 2\lambda \sin \frac{\varphi^*}{2} \right) e^{-2\lambda \sin \frac{\varphi^*}{2}} \cos n\varphi^*; \quad (29)$$

$$y_n^{(2)}(\lambda) = \frac{4\lambda^2}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi^* \sin^4 \frac{\varphi^*}{2} \cos n\varphi^* K_2 \left( 2\lambda \sin \frac{\varphi^*}{2} \right); \quad (30)$$

$$y_n^{(3)}(\lambda) = n \frac{4\lambda^2}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi^* \sin^3 \frac{\varphi^*}{2} \cos \frac{\varphi^*}{2} \sin n\varphi^* K_2 \left( 2\lambda \sin \frac{\varphi^*}{2} \right); \quad (31)$$

$$y_n^{(4)}(\lambda) = \frac{4\lambda^3}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi^* \sin^3 \frac{\varphi^*}{2} \cos n\varphi^* K_1 \left( 2\lambda \sin \frac{\varphi^*}{2} \right). \quad (32)$$

Вычисление интегралов (29)–(32) дает результаты, окончательные выражения для которых имеют следующий вид:

$$y_n^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{1-4n^2} \left( I_0(2\lambda) - 2\lambda I_1(2\lambda) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k R_{nk} \left( I_{2k}(2\lambda) - \lambda I_{2k-1}(2\lambda) - \lambda I_{2k+1}(2\lambda) \right) + (-1)^n \frac{\pi}{2} \left[ 2\lambda I_{2n}(2\lambda) + (n-1) I_{2n-1}(2\lambda) - (n+1) \lambda I_{2n+1}(2\lambda) \right],$$

$$R_{nk} = 2 \frac{1-4n^2-4k^2}{(4k^2-4n^2+1)^2-16k^2};$$

$$y_n^{(2)}(\lambda) = \frac{\lambda^2}{4} \left( I_{n-2}(\lambda) K_{n-2}(\lambda) + K_{n+2}(\lambda) I_{n+2}(\lambda) - 4I_{n-1}(\lambda) K_{n-1}(\lambda) - 4I_{n+1}(\lambda) K_{n+1}(\lambda) + 6K_n(\lambda) I_n(\lambda) \right) - \frac{\lambda}{2} \left( K_{n+2}(\lambda) I_{n+1}(\lambda) + I_{n-1}(\lambda) K_{n-2}(\lambda) + 3K_n(\lambda) I_{n-1}(\lambda) + 3K_n(\lambda) I_{n+1}(\lambda) \right) + 2;$$

$$y_n^{(3)} = n \left[ \frac{\lambda^2}{4} \left( 2I_{n-1}(\lambda) K_{n-1}(\lambda) - 2K_{n+1}(\lambda) I_{n+1}(\lambda) - I_{n-2}(\lambda) K_{n-2}(\lambda) + K_{n+2}(\lambda) I_{n+2}(\lambda) \right) + \frac{\lambda}{2} \left( I_{n-1}(\lambda) K_{n-1}(\lambda) + I_{n-1}(\lambda) K_n(\lambda) - I_{n+1}(\lambda) K_n(\lambda) - I_{n+1}(\lambda) K_{n+1}(\lambda) \right) \right];$$

$$y_n^{(4)} = \frac{\lambda^3}{2} \left( 2I_n(\lambda) K_{n-1}(\lambda) + 2I_n(\lambda) K_{n+1}(\lambda) - I_{n-1}(\lambda) K_{n-2}(\lambda) - I_{n-1}(\lambda) K_n(\lambda) - I_{n+1}(\lambda) K_n(\lambda) - I_{n+1}(\lambda) K_{n+2}(\lambda) \right).$$

Граничные условия на поверхности полого цилиндра следуют из соотношения

$$\vec{j}(\vec{r}) = \vec{j}_+(\vec{r}), \quad \vec{r} \in S. \quad (33)$$

Подставляя в (33) выражения (28) и (6), получаем

$$\frac{\vec{\Phi}_n(R)}{4} - \frac{\varepsilon \hat{D}}{2} \vec{\Phi}'_n(R) = \frac{1}{4} \vec{\Phi}_n(R) y_n^{(1)}(\lambda) + \frac{\varepsilon \hat{D}}{2} \left( \vec{\Phi}'_n(R) y_n^{(2)}(\lambda) - \frac{\vec{\Phi}_n(R)}{R} \tilde{y}_n(\lambda) \right), \quad (34)$$

где  $\tilde{y}_n(\lambda) = y_n^{(3)}(\lambda) + y_n^{(4)}(\lambda)$ .

После несложных преобразований выражения (34) получим вид граничных условий:

$$\left( \beta_n \hat{E} + \frac{1}{R} \alpha_n \hat{D} \right) \vec{\Phi}_n(R) + 2\vec{J}_n(R) = 0,$$

где  $\beta_n = \frac{1-y_n^{(1)}(\lambda)}{1+y_n^{(2)}(\lambda)}$ ;  $\alpha_n = \frac{2\tilde{y}_n(\lambda)}{1+y_n^{(2)}(\lambda)}$ ;  $\vec{J}_n(R) = -\hat{D} \vec{\Phi}'_n(R)$ .

Значения функций  $\beta_n(\lambda)$  и  $\alpha_n(\lambda)$  приведены в табл. 2, 3.

### Заключение

В статье представлены результаты методических разработок граничных условий альбедного типа для цилиндрического блока с размножением, рассеянием и радиационным захватом нейтронов и для пустого канала. В совокупности с известными граничными условиями аналогичного типа на блокированных поглотителях (см., например, [6]) материалы могут представлять методическую основу

для создания инженерной программы для расчета нейтронно-физических характеристик гетерогенных каналов или реактора. Предложенные подходы могут быть с успехом применены к решению аналогичной задачи для более простых геометрий (плоскости и шара).

Некоторые результаты работы носят оригинальный характер: полученные в работе интегралы (10), (29)—(32) в литературе авторам не встречались и могут быть использованы для других приложений.

### Список литературы

1. Пономарев-Степной Н. Н., Крутов А. М., Лобынцев В. А. и др. Распределение энерговыделения в топливном сердечнике твэлов // Атомная энергия. 1973. Т. 34. С. 197—198.
2. Бекуриц К., Виртиц К. Нейтронная физика. М.: Атомиздат, 1968.
3. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1961.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
5. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963.
6. Галантин А. Д. Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах. М.: Атомиздат, 1959.

Статья поступила в редакцию 03.12.11.

---

Таблица 2

Значение функции  $\beta_n(\lambda)$ 

$n/\lambda$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0	0,00595395	0,0214608	0,0438582	0,0713056	0,1024885	0,1364304	0,1723756	0,2097141	0,2479358	0,286617
1	2,666666	2,6269670	2,5232794	2,3808779	2,2218883	2,0621162	1,9111521	1,7739228	1,6521500	1,5457951	1,45384738
2	1,0666666	1,0688601	1,0743263	1,0815855	1,0894729	1,09712145	1,10392095	1,10947384	1,11355486	1,11607467	1,11704692
3	1,02857140	1,02870257	1,02911717	1,02982946	1,03082186	1,03205006	1,03345215	1,03495778	1,03649525	1,03799728	1,03940359
4	1,0158730	1,0159077	1,01601212	1,0161865	1,0164302	1,01673998	1,0171105	1,0175337	1,0179998	1,0184972	1,0190135
5	1,01010101	1,0101143	1,0101541	1,0102202	1,0103116	1,0104285	1,0105684	1,0107302	1,0109114	1,0111098	1,0113221
6	1,0069930	1,006999	1,0070178	1,0070486	1,0070913	1,0071457	1,0072111	1,0072870	1,0073729	1,0074674	1,0075699
7	1,0051282	1,0051315	1,0051413	1,0051576	1,0051803	1,0052093	1,0052440	1,0052847	1,0053307	1,0053817	1,0054374
8	1,0039218	1,0039235	1,0039292	1,0039386	1,0039517	1,0039686	1,0039888	1,0040125	1,0040345	1,0040695	1,0041024
9	1,0030960	1,0030972	1,0031007	1,0031065	1,0031146	1,0031251	1,0031377	1,0031525	1,0031694	1,0031882	1,0032089
10	1,0025100	1,0025070	1,0025093	1,0025132	1,0025185	1,0025253	1,0025336	1,0025433	1,0025543	1,0025667	1,0025804
11	1,0020703	1,0020703	1,0020703	1,0020704	1,0020704	1,0020704	1,0020705	1,0020705	1,0020706	1,0020708	1,0020710
12	1,00173913	1,00173913	1,00173913	1,00173913	1,00173913	1,00173913	1,00173913	1,00173917	1,00173926	1,00173937	1,00173943

Таблица 3

Значение функции  $\alpha_n(\lambda)$ 

$n/\lambda$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0	0,00968334	0,0364768	0,0763563	0,12544391	0,18037215	0,23832803	0,29700369	0,35453481	0,40944339	0,46059344
1	2,0	1,9520149	1,82434720	1,64830579	1,45317884	1,26020415	1,08215095	0,925192239	0,79115236	0,67932778	0,58773427
2	0	0,00478409	0,01758899	0,03567305	0,05648246	0,07796496	0,09861178	0,11741068	0,1337668	0,14741699	0,15834526
3	0	$0,3498 \cdot 10^{-4}$	$0,36644 \cdot 10^{-3}$	0,00133132	0,00314503	0,00588775	0,00952461	0,01393908	0,01897716	0,02446163	0,03021961
4	0	$0,154 \cdot 10^{-5}$	$0,2258 \cdot 10^{-4}$	$0,1052 \cdot 10^{-3}$	$0,30181 \cdot 10^{-3}$	$0,66686 \cdot 10^{-3}$	0,00116382	0,00206624	0,0031511	0,00450287	0,00611288
5	0	$0,14 \cdot 10^{-6}$	$0,410 \cdot 10^{-5}$	$0,1758 \cdot 10^{-4}$	$0,536 \cdot 10^{-4}$	$0,12548 \cdot 10^{-3}$	$0,24981 \cdot 10^{-3}$	$0,43962 \cdot 10^{-3}$	$0,70906 \cdot 10^{-3}$	$0,10705 \cdot 10^{-2}$	0,00153289
6	0	$0,11 \cdot 10^{-6}$	$0,92 \cdot 10^{-6}$	$0,496 \cdot 10^{-5}$	$0,148 \cdot 10^{-4}$	$0,354 \cdot 10^{-4}$	$0,716 \cdot 10^{-4}$	$0,12640 \cdot 10^{-3}$	$0,2128 \cdot 10^{-3}$	$0,33 \cdot 10^{-3}$	$0,485 \cdot 10^{-3}$
7	0	—	—	$0,12 \cdot 10^{-5}$	$0,500 \cdot 10^{-5}$	$0,1284 \cdot 10^{-4}$	$0,258 \cdot 10^{-4}$	$0,47 \cdot 10^{-4}$	$0,8 \cdot 10^{-4}$	$0,1252 \cdot 10^{-3}$	$0,1866 \cdot 10^{-3}$
8	0	—	—	—	$0,242 \cdot 10^{-5}$	$0,552 \cdot 10^{-5}$	$0,118 \cdot 10^{-4}$	$0,21 \cdot 10^{-4}$	$0,35 \cdot 10^{-4}$	$0,5558 \cdot 10^{-4}$	$0,834 \cdot 10^{-4}$
9	0	—	—	—	$0,134 \cdot 10^{-5}$	$0,262 \cdot 10^{-5}$	$0,58 \cdot 10^{-5}$	$0,102 \cdot 10^{-4}$	$0,176 \cdot 10^{-4}$	$0,2740 \cdot 10^{-4}$	$0,414 \cdot 10^{-4}$
10	0	—	—	—	$0,54 \cdot 10^{-6}$	$0,148 \cdot 10^{-5}$	$0,32 \cdot 10^{-5}$	$0,58 \cdot 10^{-5}$	$0,90 \cdot 10^{-5}$	$0,152 \cdot 10^{-4}$	$0,230 \cdot 10^{-4}$
11	0	—	—	—	—	$0,100 \cdot 10^{-5}$	$0,18 \cdot 10^{-5}$	$0,28 \cdot 10^{-5}$	$0,560 \cdot 10^{-5}$	$0,84 \cdot 10^{-5}$	$0,132 \cdot 10^{-4}$
12	0	—	—	—	—	$0,46 \cdot 10^{-5}$	$0,14 \cdot 10^{-5}$	$0,26 \cdot 10^{-5}$	$0,340 \cdot 10^{-5}$	$0,589 \cdot 10^{-5}$	$0,84 \cdot 10^{-5}$