УДК 533.9

ТЕСТЫ ДЛЯ ПРОГРАММ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ ГИБРИДНУЮ МОДЕЛЬ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ПЛАЗМЫ

А. И. Голубев, Н. П. Пятаков
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Найдены аналитические решения двух модельных задач: задачи Коши для кинетического уравнения Власова со специальным начальным распределением ионов при их движении в заданном однородном магнитном поле и задачи для системы уравнений электронной гидродинамики и уравнений Максвелла в случае идеально проводящей плазмы. Решение второй задачи получено методом пробных функций. Эти решения могут быть использованы при тестировании прикладных программ, реализующих гибридную модель плазмы.

Ключевые слова: кинетическое уравнение Власова, задача Коши, метод характеристик, уравнения электронной гидродинамики, уравнения Максвелла, метод пробных функций.

Введение

Первые публикации, содержащие уравнения гибридной модели плазмы, относятся к середине 70-х годов прошлого столетия [1, 2]. В рамках этой модели для описания динамики ионных компонентов плазмы используется кинетический подход, а электроны представляются жидкостью, нейтрализующей заряд ионов. Эта модель оказалась чрезвычайно продуктивной и нашла широкое применение в последующие годы при изучении взаимодействия потоков разреженной плазмы в магнитном поле. Так, например, программы, реализующие гибридную модель плазмы, использовались при теоретических исследованиях динамики плазмы [3—6], при интерпретации результатов лабораторных экспериментов и активных экспериментов в космосе [7—9] и в других областях физики плазмы [10].

Численные алгоритмы, применяемые при решении уравнений гибридной модели, используют хорошо известный метод *частица в ячейке* для моделирования поведения ионных компонентов плазмы [11] и различные разностные схемы для решения уравнений электронной гидродинамики совместно с уравнениями Максвелла (см., например, [12—15]).

Следует отметить, что, несмотря на хорошо развитую общую теорию моделирования плазмы методом *частица в ячейке* [11], при решении этим методом конкретных прикладных задач требуется уделять особое внимание отдельным деталям метода, в частности, заданию начального распределения ансамбля модельных частиц. Большую помощь при этом могут оказать представительные тестовые задачи, в которых заранее известно временное поведение ансамбля модельных частиц. Так, при изучении взаимодействия ионизованного облака с окружающей плазмой в магнитном поле (см., например, [4, 6]) весьма полезной, по мнению авторов, оказывается задача о движении ансамбля ионов в пространственно однородном магнитном поле. Хотя решение задачи о движении *отдельной* заряженной частицы в заданном магнитном поле хорошо известно (см., например, [16]), аналитическое описание поведения средних величин для *ансамбля* таких частиц при движении в заданном однородном магнитном поле, по-видимому, отсутствует. Вместе с тем, как показал опыт авторов в процессе разработки программ моделирования динамики разреженной плазмы на основе гибридной модели, эта задача оказывается весьма полезной для выяснения свойств алгоритмов расчета траекторий модельных частиц и их вкладов в средние характеристики плазмы. В данной работе получено аналитическое решение задачи Коши для кинетического уравнения Власова со специальным начальным распределением ионов при их движении в заданном однородном магнитном поле. Функция распределения в рассмотренной модельной задаче найдена методом характеристик.

В гибридной модели плазмы совокупность уравнений электронной гидродинамики и уравнений Максвелла является существенно нелинейной системой, имеющей сложные дисперсионные свойства [15]. Теоретическое исследование разностных схем, используемых при их решении, может быть выполнено лишь при значительных упрощающих предположениях и не всегда дает полного представления о свойствах этих схем, в частности реальных условиях их устойчивости. В данной работе предложено аналитическое решение модельной задачи для этой нелинейной системы в случае идеально проводящей плазмы. Решение получено методом пробных функций. При этом пространственно-временное поведение компонент самосогласованного магнитного поля выбрано сходным с их поведением в задаче о взаимодействии ионизованного облака с окружающей плазмой в магнитном поле [4, 6], а движение ионных компонентов плазмы подобрано таким образом, чтобы уравнения рассматриваемой системы удовлетворялись без явного введения в них, как это обычно делается в методе пробных функций, каких-либо фиктивных источников.

Уравнения упрощенной гибридной модели плазмы

В данной работе рассмотрим упрощенный вариант гибридной модели, предполагая плазму идеально проводящей и пренебрегая влиянием электронного давления на движение частиц. В этом случае уравнения гибридной модели можно записать в следующем виде (см., например, [10, 12]; используется гауссова система единиц):

– кинетическое уравнение для функции распределения $f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ ионов сорта k

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}_k}{m_k}\frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{v}} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{F}_k = Z_k\left(\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]/c\right)$, где Z_k, m_k — заряд и масса ионов; c — скорость света в вакууме; $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ — напряженность электрического поля и индукция магнитного поля соответственно. При известной функции распределения концентрация ионов сорта k и их средняя скорость определяются следующими соотношениями:

$$n_k = \int f_k\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}\right) d\mathbf{v}; \quad n_k\mathbf{u}_k = \int \mathbf{v} f_k\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}\right) d\mathbf{v}; \tag{2}$$

– уравнения для электронов

$$en_e = \sum_k Z_k n_k; \quad \mathbf{E} + \frac{1}{c}\left[\mathbf{u}_e \times \mathbf{B}\right] = 0, \tag{3}$$

где $(-e)$ — заряд электрона; n_e — концентрация электронов; $\mathbf{u}_e$ — их скорость;

– уравнения Максвелла, не содержащие тока смещения:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}. \tag{4}$$

Отметим, что скорость электронов равна

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{J}}{en_e}, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{en_e}\sum_k Z_k n_k \mathbf{u}_k. \tag{5}$$

Будем получать аналитические решения уравнений (1)—(5) применительно к задаче о взаимодействии ионизованного облака с окружающей плазмой во внешнем магнитном поле, предполагая при этом, что окружающая облако плазма пространственно однородна, а начальное распределение частиц облака сферически-симметрично. В этом случае единственным выделенным направлением в модели остается направление внешнего магнитного поля и задача становится осесимметричной с осью симметрии, направленной вдоль этого поля и проходящей через точку, являющуюся центром начального распределения частиц облака. Для задачи с осевой симметрией удобно записать уравнения гибридной модели в сферической системе координат (r, θ, φ) с центром в этой точке и полярной осью, направленной вдоль внешнего магнитного поля. В этой системе координат все величины не будут зависеть от переменной φ.

Кинетическое уравнение (1) для ионов сорта k примет вид [17] (индекс k для сокращения записи опустим)

$$\frac{\partial}{\partial t}f + v_r\frac{\partial}{\partial r}f + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}f + \left(\frac{v_\theta^2+v_\varphi^2}{r} + \frac{F_r}{m}\right)\frac{\partial}{\partial v_r}f + \left(\frac{v_\varphi^2}{r}\operatorname{ctg}\theta - \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{F_\theta}{m}\right)\frac{\partial}{\partial v_\theta}f + \\ + \left(-\frac{v_\varphi v_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta - \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{F_\varphi}{m}\right)\frac{\partial}{\partial v_\varphi}f = 0. \qquad (6)$$

Функция f в (6) имеет смысл плотности числа частиц в фазовом пространстве $(r,\ \theta,\ v_r,\ v_\theta,\ v_\varphi)$, приходящейся на единицу азимутального угла.

Для дальнейшего изложения удобно в уравнениях (2)—(6) перейти к безразмерным переменным и функциям. Используем в качестве основных следующие единицы измерения ($[a]$ означает единицу измерения величины a):

$$[r] = r_0; \quad [v] = u_0; \quad [n] = n_0; \quad [B] = B_0; \quad [m_k] = m_0; \quad [Z_k] = e,$$

где B_0 — индукция внешнего магнитного поля. Для остальных величин положим

$$[t] = \widetilde{t}_0 = \frac{r_0}{u_0}; \quad [f] = f_0 = \frac{n_0}{u_0^3}; \quad [E] = E_0 = \frac{u_0}{c}B_0; \quad [J] = J_0 = en_0u_0.$$

Тогда, сохраняя для безразмерных величин те же обозначения, что и для размерных, будем иметь

$$\mathbf{F}_k = qZ_k\left(\mathbf{E} + [\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\right); \quad n_e = \sum_k Z_k n_k; \quad \mathbf{E} + [\mathbf{u}_e\times\mathbf{B}] = 0; \qquad (7)$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla\times\mathbf{B} = qM^2\mathbf{J}, \qquad (8)$$

где

$$q = \frac{r_0}{u_0}\frac{eB_0}{m_0c}; \quad M^2 = \frac{4\pi m_0n_0u_0^2}{B_0^2}.$$

Остальные уравнения своего вида не изменят.

Движение ансамбля ионов в пространственно однородном магнитном поле

Предположим, что поле $\mathbf{E} = 0$, а внешнее магнитное поле пространственно однородно и направлено вдоль полярной оси введенной ранее сферической системы координат (r, θ, φ). Нетрудно получить следующие формулы для характеристики уравнения (6), проходящей при $t = t_0$ через точку $(r_0, \theta_0, v_{r0}, v_{\theta0}, v_{\varphi0})$:

$$r = \left[r_0^2 + \left(\alpha^2+\beta^2\right)v_{\perp0}^2 + v_{z0}^2\tau^2 + 2\rho_0\left(\alpha v_{\rho0} + \beta v_{\varphi0}\right) + 2z_0\tau v_{z0}\right]^{1/2}; \qquad (9)$$

$$\sin\theta = \frac{\rho}{r}; \quad \cos\theta = \frac{z}{r}; \qquad (10)$$

$$v_r = \frac{\rho v_\rho + zv_z}{r}; \quad v_\theta = \frac{z\rho v_\rho - \rho^2 v_z}{\rho r}; \quad v_\varphi = \frac{\rho_0\left(-sv_{\rho0} + cv_{\varphi0}\right) - \beta v_{\perp0}^2}{\rho}. \qquad (11)$$

В этих формулах

$$
\begin{aligned}
&\tau = t - t_0; \quad s = \sin(\omega\tau); \quad c = \cos(\omega\tau); \quad \alpha = \frac{s}{\omega}; \quad \beta = \frac{1-c}{\omega}; \quad \omega = \frac{qZ}{m};\\
&\rho^2 = \rho_0^2 + \left(\beta^2 + \alpha^2\right) v_{\perp 0}^2 + 2\rho_0 \left(\alpha v_{\rho 0} + \beta v_{\varphi 0}\right); \quad z = z_0 + v_{z0}\tau; \quad r^2 = \rho^2 + z^2;\\
&\rho v_\rho = \rho_0 \left(c v_{\rho 0} + s v_{\varphi 0}\right) + \alpha v_{\perp 0}^2; \quad v_z = v_{z0};\\
&v_{\perp 0}^2 = v_{\rho 0}^2 + v_{\varphi 0}^2; \quad v_{\rho 0} = v_{r0}\sin\theta_0 + v_{\theta 0}\cos\theta_0; \quad v_{z0} = v_{r0}\cos\theta_0 - v_{\theta 0}\sin\theta_0;\\
&\rho_0 = r_0\sin\theta_0; \quad z_0 = r_0\cos\theta_0.
\end{aligned}
$$

Примечание. При получении формул (9)—(11) удобно сначала найти выражения для характеристик кинетического уравнения в декартовой системе координат (x, y, z) с осью z, совпадающей с полярной осью сферической системы координат, а затем перейти по известным формулам к выражениям (9)—(11) в сферической системе координат.

Отметим важный частный случай, когда начальная скорость модельной частицы имеет вид $\mathbf{v}_0 = (v_{r0}, 0, 0)$, где $v_{r0} = r_0/t_0$. Для него получим

$$
\rho^2 = \frac{\rho_0^2}{\omega^2 t_0^2}\left[(\omega t_0 + s)^2 + (1-c)^2\right]; \quad z = z_0 + \frac{r_0\cos\theta_0}{t_0}(t - t_0) = z_0\frac{t}{t_0}.
$$

Отсюда следует, что отношение ρ/ρ_0 не зависит от начальных координат частицы и для всех частиц одинаково в любой момент времени t.

Обратимся теперь к получению решения задачи Коши для кинетического уравнения (6). Пусть при $t = t_0$ начальное условие в задаче Коши для уравнения (6) имеет вид

$$
f(t = t_0) = \frac{N}{\frac{4}{3}\pi t_0^3}\widetilde{\theta}(r_0 - t_0)\,\delta\Big(v_{r0} - \frac{r_0}{t_0}\Big)\delta(v_{\theta 0})\,\delta(v_{\varphi 0}),
$$

где N — суммарное число ионов в ансамбле (в принятых выше единицах измерения); $\widetilde{\theta}(x) = 1$ при $x < 0$ и $\widetilde{\theta}(x) = 0$ при $x > 0$. Тогда при $t > t_0$ решением задачи Коши будет функция

$$
f = \frac{N}{\frac{4}{3}\pi t_0^3}\widetilde{\theta}\Big(r_0(\bullet) - t_0\Big)\delta\Big(w_r(\bullet)\Big)\delta\Big(w_\theta(\bullet)\Big)\delta\Big(w_\varphi(\bullet)\Big), \tag{12}
$$

где $r_0(\bullet), w_r(\bullet) = v_{r0}(\bullet) - \dfrac{r_0(\bullet)}{t_0}, w_\theta(\bullet) = v_{\theta 0}(\bullet), w_\varphi(\bullet) = v_{\varphi 0}(\bullet)$ являются функциями аргументов t, r, θ, v_r, v_θ, v_φ. Для того, чтобы записать решение задачи Коши в явном виде через эти аргументы, следует выразить через них начальные условия r_0, θ_0, v_{r0}, $v_{\theta 0}$, $v_{\varphi 0}$. Воспользуемся формулами (9), (11). Заменим в них τ на $-\tau$, величины с индексом 0 — на соответствующие величины без индекса, а величины без индекса — на величины с индексом 0. Тогда получим

$$
r_0^2 = \rho_0^2 + z_0^2; \quad \rho_0^2 = \rho^2 + \left(\beta^2 + \alpha^2\right) v_\perp^2 + 2\rho\left(-\alpha v_\rho + \beta v_\varphi\right); \quad z_0 = z - v_z\tau; \tag{13}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&r_0\nu_{r0} = \rho_0\nu_{\rho 0} + z_0\nu_z;\\
&\rho_0 r_0\nu_{\theta 0} = z_0\rho_0\nu_{\rho 0} - \rho_0^2\nu_z;\\
&\rho_0\nu_{\varphi 0} = \rho\left(s\nu_\rho + c\nu_\varphi\right) - \beta\nu_\perp^2,
\end{aligned}
\right\} \tag{14}
$$

где $\rho_0 v_{\rho 0} = \rho\left(c v_\rho - s v_\varphi\right) - \alpha v_\perp^2$.

Не будем приводить явный вид функции f, поскольку в итоге потребуются лишь выражения для средних характеристик $n(t,r,\theta)$, $\mathbf{u}(t,r,\theta)$. При их вычислении необходимо провести интегрирование по переменным v_r, v_θ, v_φ. Для упрощения выкладок будем интегрировать в других переменных, а именно в переменных w_r, w_θ, w_φ. Как следует из формул (14), переход к этим переменным упростится, если предварительно ввести промежуточные переменные интегрирования

$$\widehat{v}_\rho = cv_\rho - sv_\varphi; \quad \widehat{v}_\varphi = sv_\rho + cv_\varphi; \quad \widehat{v}_z = v_z. \tag{15}$$

Якобиан $\widehat{J}$ перехода от переменных v_r, v_θ, v_φ к переменным (15) равен $\widehat{J}=1$. Перепишем соотношения (13), (14) в новых переменных:

$$r_0^2 = \rho_0^2 + z_0^2; \quad \rho_0^2 = \rho^2 + \left(\beta^2+\alpha^2\right)\widehat{v}_\perp^2 - 2\rho\left(\alpha\widehat{v}_\rho + \beta\widehat{v}_\varphi\right); \quad z_0 = z - \widehat{v}_z\tau; \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} &r_0\nu_{r0} = \rho_0\nu_{\rho0} + z_0\widehat{\nu}_z;\\ &\rho_0 r_0\nu_{\theta0} = z_0\rho_0\nu_{\rho0} - \rho_0^2\widehat{\nu}_z;\\ &\rho_0\nu_{\varphi0} = \rho\widehat{\nu}_\varphi - \beta\widehat{\nu}_\perp^2, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где теперь $\rho_0 v_{\rho0} = \rho\widehat{v}_\rho - \alpha\widehat{v}_\perp^2$. Отметим, что $\widehat{v}_\perp^2 = \widehat{v}_\rho^2 + \widehat{v}_\varphi^2 = v_\rho^2 + v_\varphi^2 = v_\perp^2 = v_{\perp0}^2 = v_{\rho0}^2 + v_{\varphi0}^2 = \widehat{v}_{\rho0}^2 + \widehat{v}_{\varphi0}^2$.

Найдем нули аргументов δ-функций в формуле (12), т. е. решим относительно переменных $\widehat{v}_\rho$, $\widehat{v}_z$, $\widehat{v}_\varphi$ систему уравнений

$$w_r = \frac{1}{r_0}\left(\rho_0 v_{\rho0} + z_0 v_{z0} - \frac{r_0^2}{t_0}\right) = 0; \quad w_\theta = \frac{1}{r_0}\left(z_0 v_{\rho0} - \rho_0 v_{z0}\right) = 0; \quad w_\varphi = v_{\varphi0} = 0.$$

Из нее имеем

$$v_{\rho0} = \frac{\rho_0}{t_0}; \quad v_{z0} = \frac{z_0}{t_0}; \quad v_{\varphi0} = 0.$$

Тогда, учитывая уравнения (17) и то, что $\widehat{v}_z = v_z = v_{z0}$, находим

$$\rho\widehat{v}_\rho = \alpha\widehat{v}_\perp^2 + \frac{\rho_0^2}{t_0}; \quad \rho\widehat{v}_\varphi = \beta\widehat{v}_\perp^2; \quad \widehat{v}_z = \frac{z_0}{t_0}. \tag{18}$$

При этом

$$\widehat{v}_\perp^2 = v_{\rho0}^2 + v_{\varphi0}^2 = v_{\rho0}^2 = \frac{\rho_0^2}{t_0^2}. \tag{19}$$

Подставляя формулы (18), (19) в (16), в нулях аргументов δ-функций получаем

$$\rho_0^2 = \frac{\rho^2 t_0^2}{(t_0+\alpha)^2+\beta^2}; \quad z_0 = \frac{zt_0}{t_0+\tau} = \frac{zt_0}{t}. \tag{20}$$

Введем новое обозначение $\Delta = (t_0+\alpha)^2+\beta^2$, тогда $r_0^2 = \dfrac{\rho^2 t_0^2}{\Delta} + \dfrac{z^2 t_0^2}{t^2}$. Учитывая (19), (20), из (18) имеем

$$\rho\widehat{v}_\rho = (t_0+\alpha)\frac{\rho_0^2}{t_0^2} = (t_0+\alpha)\frac{\rho^2}{\Delta}; \quad \rho\widehat{v}_\varphi = \beta\frac{\rho_0^2}{t_0^2} = \beta\frac{\rho^2}{\Delta}; \quad \widehat{v}_z = \frac{z_0}{t_0} = \frac{z}{t}. \tag{21}$$

Теперь при вычислении моментов перейдем от функции распределения (12) к переменным w_r, w_θ, w_φ. Эти переменные выражаются через промежуточные переменные $\widehat{v}_\rho$, $\widehat{v}_\varphi$, $\widehat{v}_z$ по формулам

$$\begin{aligned} &w_r = v_{r0} - \frac{r_0}{t_0} = \frac{1}{r_0}\left(\rho_0 v_{\rho0} + z_0 v_{z0} - \frac{r_0^2}{t_0}\right) = \frac{1}{r_0}\left(\rho\widehat{v}_\rho - \alpha\widehat{v}_\perp^2 + z_0\widehat{v}_z - \frac{r_0^2}{t_0}\right);\\ &w_\theta = v_{\theta0} = \frac{1}{r_0}(z_0 v_{\rho0} - \rho_0 v_{z0}) = \frac{1}{r_0\rho_0}\Big[z_0(\rho\widehat{v}_\rho - \alpha\widehat{v}_\perp^2) - \rho_0^2\widehat{v}_z\Big];\\ &w_\varphi = v_{\varphi0} = \frac{1}{\rho_0}\Big(\rho\widehat{v}_\varphi - \beta\widehat{v}_\perp^2\Big). \end{aligned} \tag{22}$$

Вычислим якобиан $J = \left| \dfrac{D\left(w_r, w_\theta, w_\varphi\right)}{D\left(\widehat{v}_\rho, \widehat{v}_\varphi, \widehat{v}_z\right)} \right|$ в нулях аргументов δ-функций в формуле (12). Заметим, что в этом случае при вычислении производных в формулах (22) можно ограничиться дифференцированием только выражений в скобках. Искомый якобиан J равен

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\rho}{r_0\Delta}\left[\left(t_0+\alpha\right)^2-\beta^2\right] & \dfrac{1}{r_0}\dfrac{2\beta\rho}{\Delta}\left(t_0+\alpha\right) & \dfrac{z_0}{r_0}\dfrac{t}{t_0} \\ \dfrac{z_0}{\rho_0}\dfrac{\rho}{r_0\Delta}\left[\left(t_0+\alpha\right)^2-\beta^2\right] & \dfrac{z_0}{\rho_0}\dfrac{1}{r_0}\dfrac{2\beta\rho}{\Delta}\left(t_0+\alpha\right) & -\dfrac{\rho_0 t}{r_0 t_0} \\ -\dfrac{2\beta}{\rho_0 t_0^2}\dfrac{\rho\left(\alpha+t_0\right)}{\Delta} & \dfrac{\rho}{\rho_0}\dfrac{\left(t_0+\alpha\right)^2-\beta^2}{\Delta} & 0 \end{vmatrix} = \frac{t}{t_0^3}\Delta.$$

Зная якобиан, нетрудно вычислить распределение концентрации частиц:

$$n\left(r,\theta,\varphi\right) = \int f d\mathbf{v} = \frac{N}{\dfrac{4}{3}\pi t\Delta}\widetilde{\theta}\left(\sqrt{\frac{\rho^2}{\Delta}+\frac{z^2}{t^2}}-1\right).$$

При вычислении поля скоростей потребуются выражения для v_r, v_θ, v_φ в нулях аргументов δ-функций. Подставив выражения (21) в (15), получим

$$\begin{aligned} v_\rho &= c\widehat{v}_\rho + s\widehat{v}_\varphi = c\frac{\rho\left(\alpha+t_0\right)}{\Delta} + s\frac{\beta\rho}{\Delta} = \rho\frac{ct_0+\alpha}{\Delta}; \\ v_\varphi &= -s\widehat{v}_\rho + c\widehat{v}_\varphi = -s\frac{\rho\left(\alpha+t_0\right)}{\Delta} + c\frac{\beta\rho}{\Delta} = -\rho\frac{st_0+\beta}{\Delta}; \\ v_z &= \widehat{v}_z = \frac{z}{t}. \end{aligned}$$

Чтобы перейти к v_r, v_θ, v_φ, нужно воспользоваться формулами (11). Окончательно для компонент средней скорости частиц $\mathbf{u}\left(r,\theta,\varphi\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int \mathbf{v} f d\mathbf{v}$ находим

$$u_r = \frac{1}{r}\left(\rho^2\frac{ct_0+\alpha}{\Delta} + z^2\frac{1}{t}\right); \quad u_\theta = \frac{z\rho}{r}\left(\frac{ct_0+\alpha}{\Delta} - \frac{1}{t}\right); \quad u_\varphi = -\rho\frac{st_0+\beta}{\Delta}.$$

Замечание 1. Если положить, что частота $\omega = 0$, получим задачу о свободном разлете шарового облака в пустоту. В этом случае $s = 0$, $c = 1$, $\alpha = \tau$, $\beta = 0$, $\Delta = t^2$ и получаются хорошо известные выражения

$$n\left(r,\theta,\varphi\right) = \frac{N}{\dfrac{4}{3}\pi t^3}\widetilde{\theta}\left(r-t\right); \quad u_r = \frac{r}{t}; \quad u_\theta = 0; \quad u_\varphi = 0.$$

Аналитическое решение модельной задачи для системы уравнений электронной гидродинамики и уравнений Максвелла

Для задачи с осевой симметрией удобно ввести в рассмотрение компоненту A_φ векторного потенциала $\mathbf{A}$ такого, что $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. В этом случае из уравнений Максвелла получаются два скалярных уравнения для вычисления компонент A_φ, B_φ:

$$\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} + E_\varphi = 0; \quad \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial E_r}{\partial \theta} - \frac{\partial r E_\theta}{\partial r}\right). \tag{23}$$

В этих уравнениях согласно (7)

$$E_r = u_{e\varphi}B_\theta - u_{e\theta}B_\varphi; \quad E_\theta = u_{er}B_\varphi - u_{e\varphi}B_r; \quad E_\varphi = u_{e\theta}B_r - u_{er}B_\theta. \tag{24}$$

В свою очередь,

$$B_r = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}A_\varphi \sin\theta; \quad B_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rA_\varphi, \tag{25}$$

а компоненты скорости электронов $\mathbf{u}_e$ определяются из уравнений (5):

$$u_{er} = u_r - \frac{1}{M^2qn_e}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(B_\varphi \sin\theta\right); \quad u_{e\theta} = u_\theta + \frac{1}{M^2qn_e}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_\varphi\right); \tag{26}$$

$$u_{e\varphi} = u_\varphi - \frac{1}{M^2qn_e}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}rB_\theta - \frac{\partial}{\partial\theta}B_r\right). \tag{27}$$

В дальнейшем для сокращения записи используем обозначение $M^2qn_e = n$.

При получении аналитического решения уравнений (23)—(27) воспользуемся методом пробных функций [18, 19], определяя при этом компоненты средней скорости ионов таким образом, чтобы они приводили к заранее заданному магнитному полю. Отметим, что уравнения (23)—(27) существенно упростятся, если предположить, что

$$u_\theta = -\frac{1}{nr}\frac{\partial}{\partial r}rB_\varphi.$$

В этом случае $u_{e\theta} = 0$ и в уравнениях (23)—(27) можно явно выделить угловую зависимость, если предположить, что концентрация электронов не зависит от переменной θ.

Введем новые неизвестные a_φ, b_φ, b_r, b_θ, α_φ, $\alpha_{e\varphi}$, e_φ, e_r, e_θ, полагая при этом, что они будут зависеть лишь от переменных r, t:

$$A_\varphi = a_\varphi \sin\theta; \quad B_\varphi = b_\varphi \sin\theta\cos\theta; \quad B_r = b_r\cos\theta; \quad B_\theta = b_\theta \sin\theta;$$
$$u_\varphi = \alpha_\varphi \sin\theta; \quad u_{e\varphi} = \alpha_{e\varphi}\sin\theta; \quad E_r = e_r\sin^2\theta; \quad E_\theta = e_\theta \sin\theta\cos\theta; \quad E_\varphi = e_\varphi \sin\theta.$$

Если теперь положить

$$u_r = \alpha_r\left(r,t\right) - \frac{3}{nr}b_\varphi \sin^2\theta,$$

то согласно (26) компонента u_{er} не будет зависеть от угла θ:

$$u_{er} = \alpha_r - \frac{2}{nr}b_\varphi. \tag{28}$$

Предположим, что зависимости $n\left(r,t\right)$, $a_\varphi\left(r,t\right)$, $b_\varphi\left(r,t\right)$ известны; по формулам (25) можно вычислить функции $b_r\left(r,t\right), b_\theta\left(r,t\right)$. С учетом сделанных выше предположений найдем функции $\alpha_r\left(r,t\right)$, $\alpha_\varphi\left(r,t\right)$ таким образом, чтобы удовлетворялись уравнения (23)—(27). С учетом (23), (24), (28) имеем

$$\alpha_r = u_{er} + \frac{2}{nr}b_\varphi = \frac{1}{b_\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial t} + \frac{2}{nr}b_\varphi.$$

Определение зависимости $\alpha_\varphi\left(r,t\right)$ проведем с использованием второго соотношения в (23). Предварительно заметим, что согласно (27)

$$\alpha_\varphi = \alpha_{e\varphi} + \frac{1}{nr}\left(b_r + \frac{\partial rb_\theta}{\partial r}\right). \tag{29}$$

Из второго уравнения (23) для функции $\alpha_{e\varphi}\left(r,t\right)$ получим соотношение вида

$$\frac{2a_\varphi}{r}\left(\frac{\partial\alpha_{e\varphi}}{\partial r} - \frac{\alpha_{e\varphi}}{r}\right) = \frac{\partial b_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial ru_{er}b_\varphi}{\partial r}.$$

Из этого соотношения, полагая, что $\alpha_{e\varphi}\left(r=0,t\right) = 0$, можно численно или аналитически определить функцию $\alpha_{e\varphi}\left(r,t\right)$ и по формуле (29) вычислить $\alpha_\varphi\left(r,t\right)$.

Приведем результаты изложенного выше подхода для случая, когда магнитное поле имеет вид

$$B_r = \left(1 - e^{-\alpha r^2/t^2}\right)\cos\theta; \quad B_\theta = -\left[1 + \left(\alpha\frac{r^2}{t^2} - 1\right)e^{-\alpha r^2/t^2}\right]\sin\theta; \quad B_\varphi = B_{\varphi 0}\frac{r^2 t}{2}e^{-\beta r/t}\sin\theta\cos\theta, \quad (30)$$

где α, β, $B_{\varphi 0}$ — некоторые параметры; в этом случае $A_\varphi = \dfrac{r}{2}\left(1 - e^{-\alpha r^2/t^2}\right)\sin\theta$. Отметим, что если построить проекции силовых линий этого поля на плоскость $\varphi = \mathrm{const}$, то их распределение будет качественно согласовываться с распределением проекций силовых линий в задачах, рассмотренных в работах [4, 6].

В этом случае компоненты скорости ионов определяются функциями вида

$$\begin{aligned} u_r &= \alpha_r - \frac{3}{2}\sin^2\theta B_{\varphi 0}\frac{rt}{M^2 q n_e}e^{-\beta r/t}; \quad u_\theta = \frac{B_{\varphi 0}}{M^2 q n_e}\frac{rt}{2}e^{-\beta r/t}\left(\beta\frac{r}{t} - 3\right)\sin\theta\cos\theta; \\ u_\varphi &= \left[\widetilde{\alpha}_\varphi + \frac{e^{-\alpha r^2/t^2}}{M^2 q n_e}\alpha\frac{r}{t^2}\left(2\alpha\frac{r^2}{t^2} - 5\right)\right]\sin\theta, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\alpha_r = \frac{\alpha\dfrac{r^3}{t^3}e^{-\alpha r^2/t^2}}{1 + \left(\alpha\dfrac{r^2}{t^2} - 1\right)e^{-\alpha r^2/t^2}} + B_{\varphi 0}\frac{rt}{M^2 q n_e}e^{-\beta r/t};$$

$$\widetilde{\alpha}_\varphi = -rB_{\varphi 0}\int\limits_r^\infty \frac{e^{-\beta r/t}}{1 - e^{-\alpha r^2/t^2}}\left[\frac{r}{2}\left(1 + \beta\frac{r}{t}\right) + \frac{3}{2}u_{er}t\left(1 - \frac{\beta}{3}\frac{r}{t}\right) + \frac{r}{2}t\frac{\partial u_{er}}{\partial r}\right]dr;$$

$$u_{er} = \frac{\alpha\dfrac{r^3}{t^3}e^{-\alpha r^2/t^2}}{1 + \left(\alpha\dfrac{r^2}{t^2} - 1\right)e^{-\alpha r^2/t^2}}.$$

Решение (30) не зависит ни от значений M^2, q, ни от концентрации электронов $n_e(r,t)$. Задавая в тестируемой программе движение ионов согласно (31), можно, сравнивая численное решение и решение (30), получить представление о свойствах разностной схемы решения уравнений (4), (5).

Замечание 2. Как это обычно принято в гибридных моделях плазмы, плотность заряда электронов полагается равной суммарной плотности зарядов ионов (см. формулы (3)), поэтому непосредственно само уравнение непрерывности для концентрации электронов в этих моделях не используется. Если бы оно применялось наряду с другими уравнениями электронной гидродинамики, то и тогда можно было бы воспользоваться полученными выше результатами. Однако при этом пришлось бы добавить в уравнение непрерывности фиктивный источник электронов, поскольку в рассмотренной выше модельной задаче концентрация электронов является заранее задаваемой функцией.

Заключение

В данной работе приведены аналитические решения двух модельных задач, а именно аналитическое описание поведения средних величин для ансамбля ионов при их движении в заданном однородном магнитном поле и аналитическое решение модельной задачи для нелинейной системы уравнений электронной гидродинамики и уравнений Максвелла в случае идеально проводящей плазмы. Эти решения могут быть использованы при тестировании прикладных программ, реализующих гибридную модель плазмы.

Отметим, что аналитическое решение для двумерной нелинейной системы уравнений электронной гидродинамики и уравнений Максвелла, найденное в данной работе для сферической системы координат, несложно переписать для декартовых координат и получить в результате представительный тест для программ, предназначенных для численного моделирования динамики плазмы в трехмерной геометрии.

Список литературы

1. *Chodura R. A.* Hybrid-fluid-particle model of ion heating in high-max-number shock waves // Nucl. Fusion. 1975. Vol. 15. P. 55—61.
2. *Sgro A. G., Nielson C. W.* Hybrid model studies of ion dynamics and magnetic field diffusion during pinch implosion // Phys. Fluids. 1976. Vol. 19, No 1. P. 126—133.
3. *Голубев А. И., Соловьёв А. А., Терёхин В. А.* О бесстолкновительном разлете ионизованного облака в однородную замагниченную плазму // ПМТФ. 1978. № 5. С. 33—42.
4. *Башурин В. П., Голубев А. И., Терёхин В. А.* О бесстолкновительном торможении ионизованного облака, разлетающегося в однородную замагниченную плазму // Там же. 1983. № 5. С. 10—17.
5. *Гаранин С. Ф., Голубев А. И., Исмаилова Н. А.* Двумерное моделирование перпендикулярной бесстолкновительной ударной волны // Физика плазмы. 2000. Т. 26, № 5. С. 426—433.
6. *Winske D., Gary P. S.* Hybrid simulation of debris-ambient ion interactions in astrophysical explosons // J. Geophys. Res. 2007. Vol. 112. P. A10303(1—11).
7. *Антонов В. М., Башурин В. П., Голубев А. И. и др.* Экспериментальное исследование бесстолкновительного взаимодействия сверхальфвеновских взаимопроникающих потоков плазмы // ПМТФ. 1985. № 6. С. 3—9.
8. *Антонов В. М., Башурин В. П., Голубев А. И. и др.* Исследование взаимодействия потоков бесстолкновительной плазмы при больших числах Альфвена—Маха // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 1. С. 72—75.
9. *Delamere P. A., Swift D. W., Stenbaek-Nielson H. C.* A three-dimensional hybrid code simulation of the december 1984 solar wind AMPTE release // Geophys. Res. Letters. 1999. Vol. 26, No 18. P. 2837—2840.
10. *De Bartolo R., Greco A., Veltri P.* A 3D kinetic-fluid numerical code for stationary equilibrium states in magnetized plasmas // Comput. Phys. Commun. 2008. Vol. 178. P. 647—664.
11. *Бэдсел Ч., Ленгдон А.* Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1989.
12. *Голубев А. И., Соловьёв А. А.* Алгоритм численного решения задачи о сильном взрыве в разреженной плазме // Числ. методы мех. спл. среды. 1979. Т. 10, № 4. С. 23—41.
13. *Harned D. S.* Quasineutral hybrid simulation of macroscopic plasma phenomena // J. Comput. Phys. 1982. Vol. 47, No 3. P. 452—462.
14. *Matthews A. P.* Current advance method and cyclic leapfrog for 2D multispecies hybrid plasma simulations // Ibid. 1994. Vol. 112, No 1. P. 102—116.
15. *Башурин В. П., Голубев А. И., Шагалиева В. С.* О численном решении уравнений электронной гидродинамики при высокой замагниченности электронов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1995. Вып. 3. С. 20—24.
16. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1967.
17. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
18. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

19. *Голубев А. И.* Некоторые вопросы методики численного моделирования двумерных течений бесстолкновительной замагниченной плазмы // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1982. Вып. 1(9). С. 24—27.

Статья поступила в редакцию 09.03.11.