УДК 517.958 + 519.64

К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА И ИНТЕГРАЛЬНОГО ТРАНСПОРТНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА УРАВНЕНИЯ ПАЙЕРЛСА

А. Н. Субботин
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Приводится нетрадиционный вывод линейного интегродифференциального кинетического уравнения Больцмана из интегрального транспортного уравнения типа уравнения Пайерлса. Обсуждается *геометрический* смысл различных форм уравнения переноса, получаемых в процессе преобразований.

Ключевые слова: линейная теория переноса, линейное интегродифференциальное кинетическое уравнение, интегральное уравнение переноса частиц.

Введение

В линейной теории переноса частиц основным объектом изучения является интегродифференциальное кинетическое уравнение, часто называемое линейным уравнением Больцмана [1—7]. Построение некоторых схем математического моделирования процессов переноса, например, построение оценок в методе Монте-Карло [7—9] или численные расчеты переноса теплового излучения [10—12] основываются на интегральной форме уравнения переноса типа уравнения Пайерлса [13]. Как правило, обоснование эквивалентности этих двух форм уравнения переноса ведется по схеме вывода интегрального уравнения из интегродифференциального. Обратный переход, достаточно обычный для нелинейной теории [14], в литературе по линейной теории практически не встречается. В статье Алвина М. Вейнберга [3] имеется замечание, что обратный переход не представляет труда. Однако указание Вейнберга продифференцировать по t нестационарное интегральное уравнение трудно с математической точки зрения признать полным и строгим выводом уравнения. Особое место в теории переноса занимает развитая М. В. Масленниковым аксиоматическая модель явлений переноса, начинающаяся с вывода соотношения баланса частиц в конечном фазовом объеме [15]. Это так называемое обобщенное интегральное уравнение переноса непосредственно связывает физически наблюдаемые величины. Из такого интегрального соотношения при дополнительных предположениях следует вывод дифференциальной формы уравнения переноса, которое в простейшем частном случае совпадает с классическим линейным кинетическим уравнением. Аксиоматический подход требует виртуозного владения аппаратом теории меры. При этом М. В. Масленников подчеркивает, что "судьба отдельной частицы в конечном итоге нас интересовать не будет" и при построении обобщенной теории вероятностные понятия используются время от времени "лишь во вспомогательных рассуждениях и наводящих соображениях на физическом уровне строгости". В работах [10—12] вопрос об эквивалентности так называемого *дополнительного* интегрального уравнения интегродифференциальному уравнению вообще был оставлен открытым.

В статье построен переход от интегрального транспортного уравнения к линейному интегродифференциальному кинетическому уравнению. Первый раздел содержит предварительные сведения из линейной теории переноса частиц. Процессы, описываемые уравнениями переноса, являются по существу вероятностными. В статье использование вероятностной теории не выходит за рамки понятия плотности распределения случайной величины. Предполагается, что все рассматриваемые функции *хорошие* и допускают законность всех преобразований. Сам результат преобразований не является неожиданным, и интересен скорее путь доказательства и получаемые "попутно" известные формы интегрального уравнения, имеющие прозрачный физический и вероятностный смысл. Сопоставление смысла интегрального уравнения для плотности эмиссии частиц с комментарием работ [10—12] к методу коэффициентов ослабления позволяет утверждать, что в этих работах реализована явная схема решения интегрального транспортного уравнения для эмиссии частиц.

1. Основные физические предположения линейной теории переноса. Разложение решения уравнения переноса в ряд Неймана

В классической линейной теории переноса интегродифференциальное кинетическое уравнение для плотности одного типа нейтральных частиц (нейтронов, гамма-квантов) в предположении отсутствия размножения можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial n\left(t,\vec{r},\vec{\omega},V\right)}{\partial t}+V\vec{\omega}\cdot\nabla n\left(t,\vec{r},\vec{\omega},V\right)+V\Sigma\left(\vec{r},V\right)n\left(t,\vec{r},\vec{\omega},V\right)=$$
$$=\int V'\Sigma\left(\vec{r},V'\right)n\left(t,\vec{r},\vec{\omega}',V'\right)C\left(\vec{r};\vec{\omega}',V'\to\vec{\omega},V\right)d\vec{\omega}'dV'+\,n_0\left(t,\vec{r},\vec{\omega},V\right). \qquad (1)$$

Здесь $n\left(t,\vec{r},\vec{\omega},V\right)$ — плотность частиц, имеющих в момент времени t в точке $\vec{r}$ скорость V в направлении $\vec{\omega}$[1]; $\nabla n\left(t,\vec{r},\vec{\omega},V\right)=\dfrac{dn}{d\vec{r}}$ — градиент плотности по пространственным (конфигурационным) переменным; $\Sigma\left(\vec{r},V\right)$ — полное макроскопическое сечение; $C\left(\vec{r};\vec{\omega}',V'\to\vec{\omega},V\right)$ — плотность распределения новых параметров $\left(\vec{\omega},V\right)$ состояния частицы при условии, что частица столкнулась в точке $\left(\vec{r},\vec{\omega}',V'\right)$; $n_0\left(t,\vec{r},\vec{\omega},V\right)$ — плотность частиц, испущенных независимыми источниками.

Основные идеализирующие предположения для вывода уравнения (1):

1. Частица рассматривается как классическая точечная частица, для которой в любой момент времени полностью определено положение в пространстве координат и скоростей.
2. Вероятности всех элементарных актов взаимодействия частицы с веществом среды не зависят от предыстории и определяются природой этой частицы и свойствами вещества.
3. Вторичные частицы, возникающие в результате взаимодействия, рождаются в той же точке пространства, где произошло столкновение.
4. Частица между столкновениями движется прямолинейно и равномерно.
5. Среда изотропна, находится в стационарном состоянии, и столкновения частиц с веществом не меняют этого состояния.
6. Концентрация частиц в среде мала настолько, что вероятность взаимодействия их друг с другом пренебрежимо мала.
7. Функцию распределения числа частиц в элементе фазового объема можно описывать плотностью частиц $n(x)$ в точке x непрерывного фазового пространства: $N(dx)=n(x)dx$.

В этих предположениях уравнение (1) в математической физике получается предельным переходом $\Delta\vec{r}\to 0$, $\Delta t\to 0$ (дифференцируемость предполагается) из уравнения для изменений, происходящих в балансе коллектива частиц в момент t около точки шестимерного фазового пространства $\left(\vec{r},\vec{\omega},V\right)$ в малом объеме $\Delta\vec{r}\subset R^3$ трехмерного конфигурационного пространства за малый промежуток времени Δt [1—6]. Левая часть уравнения (1) отражает убыль частиц за счет свободного движения и столкновений (поглощения и рассеяния) с веществом среды, правая часть — прибыль за счет столкновений и за счет источников, работа которых определена независимо от решения уравнения. Часто это уравнение называется линейным уравнением Больцмана, поскольку в кинетической теории жидкостей и газов оно может быть получено из уравнения Больцмана для бинарной смеси в предположении, что "один из компонентов имеет очень малую плотность, так что столкновениями

[1] $\left(\vec{r},\vec{V}\right)=\left(\vec{r},\vec{\omega},V\right)$ является обычным набором фазовых координат для нейтронов. Для фотонов, скорость которых постоянна и равна скорости света, естественным является набор $\left(\vec{r},\vec{\omega},E\right)$, где E — энергия частицы. Соответственно интегрирование по V заменяется интегрированием по E.

его частиц между собой можно пренебрегать по сравнению со столкновениями с частицами другого компонента" [16].

Переход к линейному уравнению, существенно более простому по сравнению с уравнением Больцмана для теории газов, возможен, если судьба одной частицы никак не влияет на судьбу другой. Такая независимость судеб обеспечивается предположениями 5 и 6. Предположение 6 о пренебрежимо малом вкладе в физику явления взаимных столкновений частиц хорошо согласуется с разреженностью потока частиц в практических задачах. Предположение 5 означает, что уравнение баланса частиц (1) не отражает баланса энергии при столкновениях частицы с веществом среды и не учитывает динамику среды.

Отметим простое, но важное обстоятельство. Линейность уравнения (1) позволяет его нормировать так, чтобы независимый источник был нормирован на одну частицу: $\int n_0(t,\vec{r},\vec{\omega},V)\,dtd\vec{r}d\vec{\omega}dV{=}1$. После такой нормировки это уравнение можно рассматривать как уравнение для вероятностного процесса блуждания одной частицы. Предположение 2 означает, что процесс блуждания отдельной частицы является марковским процессом [17].

В вероятностной теории марковская, или цепная, зависимость является естественным обобщением понятия независимости. Марковское свойство процесса характеризуется отсутствием последействия или отсутствием памяти (lack of memory) и означает, что любая информация о прошлом процесса не меняет условной вероятности событий, относящихся к будущему. В эволюционной кинетической теории это соответствует предположению, что в каждый момент времени блуждание частицы полностью определяется условиями в этот момент, без учета предыстории. Выполнение марковского свойства существенно зависит от выбора фазового пространства. Удачный выбор фазового пространства может превратить случайный процесс в марковский. Так, движение частицы, находящейся в точке $\vec{r}$, зависит от скорости $\vec{V}$, которая определяется предысторией. При введении скорости в набор фазовых координат формально убирается эта зависимость от прошлого и рассматриваемый процесс превращается в марковский. В статье свойство марковости используется практически лишь для того, чтобы вероятность сложного события можно было представить произведением вероятностей последовательно происходящих составляющих событий.

Перечисленные предположения позволяют получить другое линейное уравнение — интегральное уравнение типа уравнения Пайерлса [13] для плотности числа столкновений частиц. В наиболее общей форме это уравнение имеет вид интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$p(x) = p_1(x) + \int\limits_X p(x')p(x' \to x)dx'. \tag{2}$$

Для интерпретации этого уравнения как уравнения для плотности столкновений частиц необходимо придать физический смысл переменным, наложив на них некоторые ограничения:

$X = \{x\}$ — фазовое пространство состояний частиц (как правило, $X = R^n$);

dx — мера Лебега в пространстве состояний X;

$p_1(x)$ — плотность первых (после рождения в источнике) столкновений частиц в точке x (в состоянии x), $p_1(x) \geq 0$;

$p(x)$ — плотность всех (первых, вторых и т. д.) столкновений в точке x, $p(x) \geq 0$;

$p(x' \to x)$ — плотность вероятности перехода частицы из состояния x' в состояние x без промежуточных столкновений *за шаг*; $p(x' \to x) \geq 0$; $\int\limits_X p(x' \to x)dx = 1 - p_c(x') \leq 1$. Функция $p_c(x') = 1 - \int\limits_X p(x' \to x)dx \geq 0$ называется вероятностью поглощения (capture) в точке x'. В отличие от уравнения (2) в этом определении поглощения интегрирование ведется по второму аргументу переходной вероятности[2].

[2]Неравенство $\int\limits_X p(x' \to x)dx \leq 1$ справедливо в отсутствие размножений частиц в акте столкновения. Стрелка в записи $(x' \to x)$ двух аргументов функции $p(x' \to x)$ по сравнению с записью $p(x', x)$ наглядно передает физический смысл этих аргументов (естественная упорядоченность точек двух последовательных столкновений). Заметим, что для физических терминов (фазовое пространство, частица, столкновение, макроскопическое сечение) здесь и далее используется формальное математическое определение понятия. Это соответствует цели заниматься математической моделью, не претендуя на углубление в физику явлений.

Другие дополнительные предположения и определения, в частности связь между плотностью частиц $n(t, \vec{r}, \vec{\omega}, V)$ и плотностью столкновений частиц $p(x)$, будут вводиться по мере необходимости при проведении преобразований уравнений.

Если записать уравнение (2) в операторной форме

$$p = p_1 + Kp, \tag{3}$$

где K — линейный интегральный оператор, действующий в некотором банаховом пространстве L интегрируемых по Лебегу функций $p(x)$: $K \in \{L \to L\}$, $L = \{p(x)\}$, то решение уравнения (3) можно формально представить разложением в ряд Неймана: $p = (1-K)^{-1}p_1 = p_1 + Kp_1 + K^2p_1 + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} K^n p_1$. Здесь $[K^n p_1](x) = \int\limits_X \cdots \int\limits_X p_1(x_1)p(x_1 \to x_2)\ldots p(x_n \to x)dx_1 \ldots dx_n$, $(n \geq 1)$; $[K^0 p_1](x) = p_1(x)$. В теории переноса обычно полагают $L = L_1$ с нормой $\|p(x)\| = \int\limits_X |p(x)|\, dx$. Предполагают, что для $\|K\| \leq \sup\limits_x \int\limits_X |p(x' \to x)|\, dx'$ выполнены условия сходимости ряда. Легко показать, что для сходимости ряда достаточно выполнение условия $\|K^m\| < 1$, где m — некоторое натуральное число [9, 17]. В прикладных задачах сходимость ряда Неймана и, следовательно, существование решения уравнения (2) обеспечиваются наличием поглощения, конечностью размеров системы и т. п. Формально решение уравнения (3) можно получить методом последовательных приближений, начиная с некоторого $P^{(0)}$: $P^{(N+1)} = p_1 + KP^{(N)}$. Эти итерации эквивалентны оценке решения по первым N членам ряда Неймана: $p_1 + KP^{(N)} = (I + K + K^2 + \ldots + K^N)p_1 + K^{N+1}(P^{(0)})$. Если при $N \to \infty$ выполнены условия сходимости, то погрешность определяется формулой $P^{(N)} - p = K^N(P^{(0)} - p)$ [18]. При нормировке источника на 1 и отсутствии размножения члены ряда Неймана имеют прозрачный физический и вероятностный смысл: n-й член ряда — это рассчитанная на одну *среднюю* частицу источника плотность вероятности n-го (после рождения в источнике) столкновения в точке x:

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) = p_1(x) + p_2(x) + \ldots + p_n(x) + \ldots.$$

2. Полное макроскопическое сечение. Плотность распределения длины свободного пробега частицы. Оптическое расстояние между точками

Для перехода от уравнения (2) к уравнению (1) необходимо конкретизировать вид ядра интегрального оператора уравнения (2), определив пространство состояний частицы и вероятностный механизм перескоков частицы из одного состояния в другое в согласии с основными предположениями линейной теории переноса, перечисленными в разд. 1.

Сначала рассмотрим стационарную задачу, в которой в уравнении (1) плотность частиц не зависит от времени. Состояние частицы x — набор координат фазового пространства $X = R^3 \times R^3$ — будем обозначать $\left(\vec{r}, \vec{V}\right)$ либо $(\vec{r},\ \vec{\omega}, V)$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор положения частицы в пространстве R^3; $\vec{V}$ — вектор скорости; $\vec{\omega}$ — единичный вектор направления полета; V — модуль скорости. Интегрирование по всему фазовому пространству $X = R^3 \times R^3$ будем обозначать двумя знаками интеграла подряд, а интегрирование по R^3 или по R^1 — одним знаком интеграла.

Предположим, что ядро $p(x' \to x)$ интегрального уравнения (2) — плотность вероятности перехода частицы из состояния x' в состояние x — представимо суперпозицией двух функций: $p(x' \to x) = [T \circ C](x') = T(C(x'))$. Здесь столкновительная функция C меняет параметры состояния частицы в акте столкновения, а транспортная функция T меняет параметры состояния в результате прямолинейного движения частицы после столкновения [7]. Вероятностный смысл этих функций: C — условная плотность распределения новых параметров $(\vec{\omega}, V)$ при условии столкновения в точке $x' = (\vec{r}\,', \vec{\omega}\,', V')$; T — условная плотность распределения очередной пространственной точки столкновения $\vec{r}$ при условии, что после столкновения в точке $\vec{r}\,'$ частица летит в направлении $\vec{\omega}$ с постоянной скоростью V. Опираясь на марковское свойство независимости прошлого и будущего, $p(x' \to x)$ можно записать в виде произведения этих плотностей:

$$p\left(x' \to x\right) = T\left(C(x')\right) = C\left(\vec{V}' \to \vec{V}|\vec{r}'\right) T\left(\vec{r}' \to \vec{r}|\vec{V}\right). \tag{4}$$

Термин *суперпозиция* подчеркивает некоммутативность умножения функций C и T, переводящих x' в x. Заметим, что запись правой части соотношения (4) означает, что первой на x' действует функция C.

Физически реальный смысл уравнение переноса приобретает, когда функции T и C определяются эффективными макроскопическими сечениями взаимодействия частиц со средой — полным и дифференциальным. Обратим внимание на то, что для вывода уравнения (1) из уравнения (2) явный вид дифференциального сечения, т. е. функции C, не существенен. Достаточно чтобы функция C удовлетворяла требованиям ограниченности, дифференцируемости и т. п., необходимым для математической корректности преобразований, связанных с этим выводом.

Явный вид функции T, имеющей смысл плотности распределения длины свободного пробега частицы, вытекает из следующего вероятностного определения полного макроскопического сечения $\Sigma(\vec{r}, V)$ для изотропной среды, т. е. в предположении, что $\Sigma(\vec{r}, V)$ не зависит от направления полета $\vec{\omega}$.

Определение. *Вероятность того, что частица, долетевшая без столкновений до точки $\vec{r}$ со скоростью $\vec{V}$, испытает столкновение в малом интервале $(\vec{r}, \vec{r} + \vec{V}\Delta t)$, равна $\Sigma(\vec{r}, V)\Delta s + o(\Delta s)$, где расстояние $\Delta s = V\Delta t$.*

Обозначим через ξ случайную длину свободного пробега частицы от точки $\vec{r}'$ до точки $\vec{r}$ в направлении $\vec{\omega}$ (рис. 1).

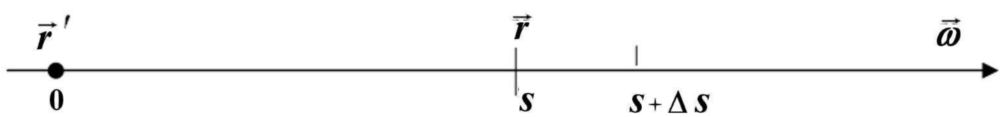

Рис. 1. Свободный пробег частицы от точки $\vec{r}'$ в направлении $\vec{\omega}$

Из приведенного выше определения полного сечения $\Sigma(\vec{r}, V)$ получаем уравнение для функции распределения $F_\xi(s) = P\{\xi \le s\} = F(s)$ случайной величины ξ при $s \ge 0$:

$$P\{\xi \in (s, s + \Delta s)\} \equiv F(s + \Delta s) - F(s) = (1 - F(s))(\Sigma(s)\Delta s + o(\Delta s)).$$

В правой части последнего равенства первый множитель $1 - F(s) = P\{\xi > s\}$ есть вероятность пролететь без столкновения расстояние s от точки $\vec{r}'$, второй множитель — вероятность столкнуться в интервале $(s, s + \Delta s)$. В этом представлении вероятности сложного события в виде произведения вероятностей опять использовано марковское свойство условной независимости прошлого и будущего при фиксированном настоящем. Разделив обе части последнего равенства на Δs и перейдя к пределу при $\Delta s \to 0$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dF}{ds} = (1 - F(s))\,\Sigma(s)$$

с начальным условием $F(0) = 0$. Решение этого уравнения $F(s) = 1 - \exp\left(-\int\limits_0^s \Sigma(l)dl\right)$. Отсюда плотность распределения случайной длины свободного пробега

$$p_\xi(s) = \begin{cases} \dfrac{dF}{ds} = \Sigma(s)\exp\left(-\displaystyle\int\limits_0^s \Sigma(l)dl\right) \quad \text{при} \quad s \ge 0; \\ 0 \quad \text{при} \quad s < 0. \end{cases} \tag{5}$$

Такое распределение пробега (5) означает, что в форме интегрирования вдоль луча от фиксированной точки $\vec{r}$ до точки $\vec{r}\,'$ (в направлении, противоположном направлению $\vec{\omega}$) функция $T(\vec{r}\,' \to \vec{r}\,|\,\vec{\omega}, V)$ имеет следующий вид:

$$T\left(\vec{r}\,' \to \vec{r}\,|\,\vec{\omega}, V\right) = \Sigma\left(\vec{r}, V\right) \exp\left(-\int\limits_0^s \Sigma(\vec{r} - l\vec{\omega}, V) dl\right), \qquad (6)$$

где $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{\omega}s$, $s = |\vec{r}\,' - \vec{r}|$.

Величина $\tau\left(\vec{r}\,', \vec{r}\right) = \int\limits_0^s \Sigma\left(\vec{r} - l\vec{\omega}\right) dl$, где $s = |\vec{r}\,' - \vec{r}\,|$, $\vec{\omega} = \dfrac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$, называется *оптическим расстоянием* между точками $\vec{r}\,'$ и $\vec{r}$. Если вдоль направления $\vec{\omega}$ между точками $\vec{r}\,'$ и $\vec{r}$ полное сечение не меняется, т. е. $\Sigma(s) = \mathrm{const} = \Sigma$ (случай однородной среды), оптическое расстояние $\tau(\vec{r}\,', \vec{r}) = \Sigma|\vec{r}\,' - \vec{r}\,|$.

В однородной среде ($\Sigma = \mathrm{const}$) формулы для функции распределения и плотности распределения длины свободного пробега приобретают простой вид: $F_\xi\left(s\right) = 1 - e^{-\Sigma s}$; $p_\xi\left(s\right) = \Sigma e^{-\Sigma s}$. В случае бесконечной однородной среды несложные вычисления позволяют получить следующее известное соотношение между математическим ожиданием длины l свободного пробега в направлении $\vec{\omega}$ и полным макроскопическим сечением Σ:

$$l = E\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} sp_\xi\left(s\right) ds = \int\limits_0^{\infty} s\Sigma e^{-\Sigma s} ds = \frac{1}{\Sigma}.$$

3. Переход от интегрирования по объему к интегрированию вдоль луча. Интегральное уравнение переноса в форме интегрирования вдоль луча

Определение функции T как плотности распределения длины свободного пробега позволяет следующим образом выразить плотность распределения первых столкновений $p_1(\vec{r}, \vec{V})$ через плотность частиц независимого источника $n_0(\vec{r}, \vec{V})$:

$$p_1\left(\vec{r}, \vec{V}\right) = \int n_0\left(\vec{r}\,', \vec{V}\right) T\left(\vec{r}\,' \to \vec{r}\,|\,\vec{V}\right) d\vec{r}\,'. \qquad (7)$$

Подставив $p_1\left(\vec{r}, \vec{V}\right)$ из (7) и $p(x' \to x)$ из (4) в уравнение (2), получим:

$$p\left(\vec{r}, \vec{V}\right) = \int n_0\left(\vec{r}\,', \vec{V}\right) T\left(\vec{r}\,' \to \vec{r}\,|\,\vec{V}\right) d\vec{r}\,' + \\ + \int\int p\left(\vec{r}\,', \vec{V}'\right) C\left(\vec{V}' \to \vec{V}\,|\,\vec{r}\,'\right) T\left(\vec{r}\,' \to \vec{r}\,|\,\vec{V}\right) d\vec{V}' d\vec{r}\,'. \qquad (8)$$

Когда система определена в ограниченной области пространства R^3, *естественные* граничные условия — внешний поток частиц с поверхности внутрь системы — можно рассматривать в качестве источников. Для существования T на любом отрезке $(\vec{r}\,', \vec{r}\,)$ требуется выпуклость множества точек $\vec{r}$, образующих ограниченную систему. Для решения задач методом Монте-Карло обычно не представляет трудностей "аккуратная" трактовка условий на границах невыпуклой системы. Например, можно невыпуклую систему окружить сферой с большим радиусом $\vec{R}$, область между внутренней границей этой сферы и границей системы считать вакуумом, а область вне этой сферы трактовать как поглощающую: $p_c\left(\vec{r}, \vec{V}\right) = 1$ при $\vec{r} \geq \vec{R}$. В работах [10—12] проблема невыпуклости изящно решается методом коэффициентов видимости.

Важную роль в выводе уравнения (1) из уравнения (8) играет форма интегрального уравнения, в которой интегрирование по объему конфигурационного пространства заменено интегрированием вдоль луча. Возможность перехода к такой форме уравнения следует из определения функции T, которая в уравнении (8) описывает прямолинейное движение между двумя последовательными столкновениями в точках $\vec{r}\,'$ и $\vec{r}$. При записи уравнения в форме (8) связь между направлением прямолинейного движения $\vec{\omega} = \dfrac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ и вектором $\vec{r}-\vec{r}\,'$ выражается в том, что функция T в подынтегральном выражении содержит δ-функцию $\delta\left(\vec{\omega}-\dfrac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)$, из-за которой уравнение (8) называется интегральным уравнением переноса с обобщенным ядром [9].

Переход от уравнения (8) с интегрированием по объему к уравнению с интегрированием вдоль луча (и обратный переход) основан на справедливости следующего интегрального равенства [6]:

$$\int\limits_{W\in R^3} f\left(\vec{r}\,',\vec{r},\vec{\omega}\right)\delta\left(\vec{\omega}-\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\frac{1}{4\pi\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}\,d\vec{r}\,' = \int\limits_0^{l_0} f\left(\left(\vec{r}-l\vec{\omega}\right),\vec{r},\vec{\omega}\right)dl. \tag{9}$$

Обратим внимание на смысл обозначений в равенстве (9). Здесь $f(\vec{r}\,',\vec{r},\vec{\omega})$ рассматривается как интегрируемая по переменной $\vec{r}\,'$ функция при фиксированных значениях $\vec{r}$ и $\vec{\omega}$. При фиксированных $\vec{r}$ и $\vec{\omega}$ δ-функция связывает *переменную* точку $\vec{r}\,'$ объема W с *переменной* интегрирования l луча: $\vec{r}\,' = \vec{r}-l\vec{\omega}$. Верхний предел интегрирования по переменной l, обозначенный в правой части равенства (9) как l_0 (l_0 может быть равен ∞), равен расстоянию от *фиксированной* точки $\vec{r}$ пространства R^3 до точки пересечения луча $\vec{r}-l\vec{\omega}$ с внешней границей ограниченной области интегрирования W. Расстояние $l \geq 0$ измеряется в направлении, противоположном *фиксированному* направлению $\vec{\omega}$. Наличие δ-функции означает, что вклад в интеграл в левой части равенства при интегрировании по всей области W пространства R^3 дают лишь точки луча $\vec{r}-l\vec{\omega}$.

Формальное доказательство равенства (9) следует из определения δ-функции на вероятностном пространстве направлений $\Omega(\int\limits_\Omega d\vec{\omega}=1)$ как меры Дирака $\delta(\vec{\omega}_0)\,d\vec{\omega}$, сосредоточенной в точке $\vec{\omega}_0$ так, что $\int\limits_B \delta\left(\vec{\omega}_0\right)d\vec{\omega} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \vec{\omega}_0 \in B; \\ 0, & \text{если} \quad \vec{\omega}_0 \notin B \end{cases}$ для любой измеримой области $B \subseteq \Omega$ [19]. Для вещественной прямой R^1 это соответствует определению δ-функции в качестве линейного функционала на пространстве функций $f(x)$ такого, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)\delta\left(x-x_0\right)\,dx = f\left(x_0\right)$.

Для доказательства перейдем от координат с центром $\vec{r}=0$ к сферической системе координат (l,ψ,θ) с центром в *фиксированной* точке $\vec{r}$ [6]. В этой вспомогательной системе $\vec{l}$ — радиус-вектор точки $\vec{r}\,'$, $l = |\vec{r}-\vec{r}\,'|$; $d\vec{r}\,' = dl\cdot l\cdot d\theta\cdot l\cdot\sin\theta\cdot d\psi$ — элемент объема около $\vec{r}\,'$. Углы — полярный θ и азимутальный ψ, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$ — определяют направление $\vec{\omega}\,' = \dfrac{\vec{l}}{l} = \dfrac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{l}$ от фиксированной точки $\vec{r}$ к точке $\vec{r}\,'$. Отсюда в координатах $(l,\vec{\omega}\,')$ $\vec{r}\,'\left(l,\vec{\omega}\,'\right) = \vec{r}-l\vec{\omega}\,'$, и при нормировке меры $d\vec{\omega}\,'$ телесного угла на 1 $\left(\int\limits_\Omega d\vec{\omega}\,'=1\right)$ получим $d\vec{r}\,' = dl\cdot 4\pi\cdot l^2\cdot d\vec{\omega}\,'$. По теореме Фубини левая часть равенства (9) превращается в повторный интеграл по l и $\vec{\omega}\,'$ от функции $f\left((\vec{r}-l\vec{\omega}\,'),\vec{r},\vec{\omega}\right)$. После интегрирования по $\vec{\omega}\,'$ с подстановкой по определению δ-функции $\vec{\omega}\,'=\vec{\omega}$ и очевидных сокращений этот интеграл равен интегралу по l в правой части (9).

На основании равенства (9) в дальнейших преобразованиях применяются две эквивалентные формы записи соотношений. Интегрирование по объему с короткой записью $T(\vec{r}\,' \to \vec{r}\,|\,\vec{V})$ неявно подразумевает зависимость функции T от полного сечения $\Sigma(\vec{r},V)$, наличие в подынтегральном выражении множителя $\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}$ и δ-функции $\delta\left(\vec{\omega}-\dfrac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)$. Длинная запись T в виде (6) с явно выраженной зависимостью от полного сечения (но без этого множителя и δ-функции) используется при переходе к интегрированию вдоль луча согласно (9).

Введем *плотность потока частиц* $\varphi\left(\vec{r},\vec{V}\right)$, связанную с *плотностью частиц* $n\left(\vec{r},\vec{V}\right)$ и *плотностью столкновений* $p\left(\vec{r},\vec{V}\right)$ формулами

$$\varphi\left(\vec{r},\vec{V}\right) = Vn\left(\vec{r},\vec{V}\right); \tag{10}$$

$$p\left(\vec{r},\vec{V}\right) = \Sigma\left(\vec{r},V\right)\varphi\left(\vec{r},\vec{V}\right) = \Sigma\left(\vec{r},V\right)Vn\left(\vec{r},\vec{V}\right). \tag{11}$$

Введем *плотность эмиссии частиц*:

$$\chi\left(\vec{r},\vec{V}\right) = n_0\left(\vec{r},\vec{V}\right) + \int p\left(\vec{r},\vec{V}'\right)C\left(\vec{V}' \to \vec{V}\,|\,\vec{r}\right)d\vec{V}'. \tag{12}$$

Пользуясь определением (12), уравнение (8) можно записать в виде

$$p\left(\vec{r},\vec{V}\right) = \int \chi\left(\vec{r}\,',\vec{V}\right)T\left(\vec{r}\,' \to \vec{r}\,|\,\vec{V}\right)d\vec{r}\,'. \tag{13}$$

Пользуясь по определению (11) связью плотности столкновений с плотностью потока $p(\vec{r},\vec{V}) = \Sigma\left(\vec{r},V\right)\varphi\left(\vec{r},\vec{V}\right)$ и подставляя в соответствии с равенством (9) в уравнение (13) вид функции $T\left(\vec{r}\,' \to \vec{r}\,|\,\vec{V}\right) = \Sigma\left(\vec{r},V\right)\exp\left(-\int\limits_0^s \Sigma(\vec{r}-l\vec{\omega},V)dl\right)$ в форме (6) интегрирования вдоль луча, получаем уравнение

$$\varphi\left(\vec{r},\vec{V}\right) = \int\limits_0^{l_0} \chi\left(\vec{r}-s\vec{\omega},\vec{V}\right)\exp\left(-\int\limits_0^s \Sigma(\vec{r}-l\vec{\omega},V)dl\right)ds. \tag{14}$$

Уравнения (13), (14) имеют прозрачный физический смысл. Обсуждению геометрического смысла линейных уравнений переноса посвящен разд. 6.

Уравнения (13), (14) являются стационарными уравнениями[3]. Для получения нестационарных уравнений требуется кроме зависимости функций n, φ, χ от времени ввести в подынтегральное выражение уравнений (13), (14) δ-функцию $\delta\left(t' - \left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{V}\right)\right)$, которая при интегрировании по пространству и времени учитывает связь расстояния между точками $\vec{r}\,'$ и $\vec{r}$ со временем пролета частицей этого расстояния (время *запаздывания*):

$$p\left(t,\vec{r},\vec{V}\right) = \int\int\limits_{-\infty}^{t} \chi\left(t',\vec{r}\,',\vec{V}\right)T\left(\vec{r}\,' \to \vec{r}\,|\,\vec{V}\right)\delta\left(t' - \left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{V}\right)\right)d\vec{r}\,'dt'. \tag{15}$$

Переходя к форме интегрирования вдоль луча и пользуясь по определению (11) связью $p\left(\vec{r},\vec{V}\right) = \Sigma\left(\vec{r},V\right)\varphi\left(\vec{r},\vec{V}\right)$, получаем нестационарное уравнение

$$\varphi\left(t,\vec{r},\vec{V}\right) = \int\limits_0^{l_0} \chi\left(t-\frac{s}{V},\vec{r}-s\vec{\omega},\vec{V}\right)\exp\left(-\int\limits_0^s \Sigma(\vec{r}-l\vec{\omega},V)\,dl\right)ds. \tag{16}$$

[3] Впервые в приближении изотропного источника и изотропности рассеяния интегральное уравнение вида (14) было получено в 1939 г. Рудольфом Пайерлсом для описания диффузии моноэнергетических нейтронов [13].

4. Вывод линейного интегродифференциального кинетического уравнения Больцмана из интегрального транспортного уравнения

В этом разделе дается достаточно прозрачный вывод интегродифференциального уравнения переноса из интегрального. Доказательство стартует от уравнения (14) и существенно использует *лучевую* форму записи этого интегрального уравнения. В (14) не трудно узнать уравнение, которое получается в процессе традиционного вывода интегрального уравнения из интегродифференциального. Например, это интегральное соотношение приведено под номером (1.27) на странице 22 одной из лучших книг по теории переноса нейтронов — книге Д. Белла и С. Глесстона "Теория ядерных реакторов" [5].

Как написать интегральное уравнение (14) для фиксированного состояния, близкого к $\left(\vec{r},\vec{V}\right)$? Предположим, что $\left(\vec{r},\vec{V}\right)$ является внутренней точкой замкнутого множества состояний, для которых справедливо уравнение (14). Тогда можно выбрать h настолько малым, что точка $\left(\vec{r}_1,\vec{V}\right)$, где $\vec{r}_1 = \vec{r} - h\vec{\omega}$, принадлежит этому множеству состояний. Заметив, что точка $\vec{r}_1$ находится на луче $\vec{r} - s\vec{\omega}$, перейдем к записи уравнения (14) для фиксированного состояния $\left(\vec{r}_1,\vec{V}\right)$ с интегрированием вдоль этого луча, приняв по-прежнему в качестве переменных интегрирования s и l, отсчитываемых от точки $\vec{r}$: $l_0 \geq s \geq l \geq h \geq 0$. Обратив внимание на изменившиеся пределы интегрирования при такой подстановке переменных в уравнение (14) для $\left(\vec{r}_1,\vec{V}\right)$, получим уравнение

$$\varphi\left(\vec{r}-h\vec{\omega},\vec{V}\right) = \int\limits_h^{l_0} \chi\left(\vec{r}-s\vec{\omega},\vec{V}\right)\exp\left(-\int\limits_h^s \Sigma(\vec{r}-l\vec{\omega},V)\,dl\right)ds. \tag{17}$$

Рассматривая h в качестве непрерывного параметра, из уравнения (17) дифференцированием по h можно получить интегродифференциальное кинетическое уравнение (1), смысл которого состоит в описании локального изменения плотности частиц (или плотности потока). В предположении локальной дифференцируемости этой плотности продифференцируем по h обе части равенства (17). Найдя значения производных при $h = 0$, тем самым найдем производную функции $\varphi(\vec{r},\vec{V})$ в точке $\vec{r}$ по направлению $\vec{\omega}$:

$$\frac{d\varphi(\vec{r}(h))}{dh} = \frac{d\varphi(\vec{r}-h\vec{\omega})}{d\vec{r}}\,\frac{d(\vec{r}-h\vec{\omega})}{dh}; \quad \left.\frac{d\varphi}{dh}\right|_{h=0} = -\vec{\omega}\nabla\varphi\left(\vec{r},\vec{V}\right).$$

Обозначим через $f(s,h)$ подынтегральную функцию в правой части равенства (17):

$$f(s,h) = \chi\left(\vec{r}-s\vec{\omega},\vec{V}\right)\exp\left(-\int\limits_h^s \Sigma(\vec{r}-l\vec{\omega},V)\right)dl$$

и для $I(h) = \int\limits_h^{l_0} f(s,h)\,ds$ воспользуемся известной формулой $\dfrac{dI}{dh} = \int\limits_h^{l_0} f'_h(s,h)\,ds - f(h,h)\dfrac{dh}{dh}$ дифференцирования по параметру определенного интеграла, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от этого параметра:

$$f(h,h) = \chi\left(\vec{r}-h\vec{\omega},\vec{V}\right)\exp\left(-\int\limits_h^h \Sigma(\vec{r}-l\vec{\omega},V)\,dl\right) = \chi\left(\vec{r}-h\vec{\omega},\vec{V}\right);$$

$$f'_h(s,h) = \chi\left(\vec{r}-s\vec{\omega},\vec{V}\right)\exp\left(-\int\limits_h^s \Sigma\left(\vec{r}-l\vec{\omega},V\right)dl\right)\frac{d}{dh}\left(-\int\limits_h^s \Sigma\left(\vec{r}-l\vec{\omega},V\right)dl\right);$$

$$\frac{d}{dh}\int\limits_h^s \Sigma\left(\vec{r}-l\vec{\omega},V\right)dl=-\Sigma(\vec{r}-h\vec{\omega},V);$$

$$\int\limits_h^{l_0} f_h'(s,h)\,ds=\Sigma(\vec{r}-h\vec{\omega},V)\int\limits_h^{l_0}\chi\left(\vec{r}-s\vec{\omega},\vec{V}\right)\exp\left(-\int\limits_h^s\Sigma(\vec{r}-l\vec{\omega},V)\,dl\right)ds=$$
$$=\Sigma\left(\vec{r}-h\vec{\omega},V\right)\varphi\left(\vec{r}-h\vec{\omega},\vec{V}\right)$$

(переход к последнему равенству следует из уравнения (17)).

При $h=0$ полученные выражения приводят к уравнению, связывающему изменение плотности потока частиц в точке $\left(\vec{r},\vec{V}\right)$ с плотностью эмиссии в этой же точке:

$$\vec{\omega}\nabla\varphi\left(\vec{r},\vec{V}\right)+\Sigma\left(\vec{r},V\right)\varphi\left(\vec{r},\vec{V}\right)=\chi\left(\vec{r},\vec{V}\right). \tag{18}$$

Подставив в уравнение (18) выражение $\chi\left(\vec{r},\vec{V}\right)$ из определения (12), получим стационарное уравнение для плотности потока частиц:

$$\vec{\omega}\nabla\varphi\left(\vec{r},\vec{V}\right)+\Sigma\left(\vec{r},V\right)\varphi\left(\vec{r},\vec{V}\right)=\int\Sigma\left(\vec{r},V'\right)\varphi\left(\vec{r},\vec{V}'\right)C\left(\vec{V}'\to\vec{V}\,|\,\vec{r}\right)d\vec{V}'+n_0\left(\vec{r},\vec{V}\right), \tag{19}$$

которое, пользуясь определением (10), можно записать для плотности частиц:

$$\vec{V}\nabla n\left(\vec{r},\vec{V}\right)+V\Sigma\left(\vec{r},V\right)n\left(\vec{r},\vec{V}\right)=\int V'\Sigma\left(\vec{r},V'\right)n\left(\vec{r},\vec{V}'\right)C\left(\vec{V}'\to\vec{V}\,|\,\vec{r}\right)d\vec{V}'+n_0\left(\vec{r},\vec{V}\right). \tag{20}$$

Для вывода нестационарного уравнения (1) достаточно рассмотреть уравнение

$$\varphi\left(t-\frac{h}{V},\vec{r}-h\vec{\omega},\vec{V}\right)=\int\limits_h^{l_0}\chi\left(t-\frac{s}{V},\vec{r}-s\vec{\omega},\vec{V}\right)\exp\left(-\int\limits_h^s\Sigma(\vec{r}-l\vec{\omega},V)\,dl\right)ds, \tag{21}$$

которое с помощью параметра h получается из уравнения (16) точно так же, как уравнение (17) получается из (14).

Дифференцируя левую часть уравнения (21) по h,

$$\frac{d\varphi}{dh}=\frac{\partial\varphi\left(t-\dfrac{h}{V}\right)}{\partial t}\,\frac{\partial\left(t-\dfrac{h}{V}\right)}{\partial h}+\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{r}}\frac{\partial\vec{r}}{\partial h}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{1}{V}+\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{r}}\frac{\partial\vec{r}}{\partial h},$$

получаем нестационарное интегродифференциальное уравнение (1) с недостающей в уравнениях (19), (20) производной по времени. Заметим, что дифференцирование правой части уравнения (21), как и переход от уравнений (13), (14) к нестационарным уравнениям (15), (16), предполагает отсутствие зависимости функций $C\left(\vec{V}'\to\vec{V}\,|\,\vec{r}\right)$ и $T\left(\vec{r}\,'\to\vec{r}\,|\,\vec{V}\right)$ от времени. Независимость от времени функций C и T в линейных задачах переноса соответствует предположению 5 (см. разд. 1) о стационарности среды, в которой происходит перенос частиц. Имея в виду стационарность среды, уравнения (1), (15), (16) нередко называют квазистационарными, поскольку вывод этих уравнений предполагает, что искомые функции (плотность, поток частиц) зависят от времени, но среда, в которой происходит блуждание частиц, остается стационарной и переходная вероятность инвариантна относительно сдвигов по времени.

5. Интегральное уравнение для плотности эмиссии частиц

Уравнение для плотности эмиссии частиц можно получить, если подставить в определение (12) выражение для плотности столкновений из уравнения (13):

$$\chi\left(\vec{r},\vec{V}\right) = n_0\left(\vec{r},\vec{V}\right) + \int \left(\int \chi\left(\vec{r}\,',\vec{V}'\right) T\left(\vec{r}\,' \to \vec{r}\,|\,\vec{V}'\right) d\vec{r}\,' \right) C\left(\vec{V}' \to \vec{V}\,|\,\vec{r}\right) d\vec{V}'. \tag{22}$$

В этом интегральном уравнении по сравнению с уравнением (8) для плотности столкновений источник входит явно, а не в виде первых столкновений. Поменялся по сравнению с уравнением (8) физический смысл координат $\left(\vec{r},\vec{V}\right)$. В уравнениях (8), (13)—(16) они были состоянием частицы перед столкновением, а в уравнении (22) эти координаты описывают состояние частицы после столкновения (или в результате рождения в источнике). Эти изменения связаны с тем, что в подынтегральном выражении поменялись местами функции C и T. При попытке перехода к интегрированию вдоль луча эти изменения приводят уравнение (22) к следующему виду:

$$\chi\left(\vec{r},\vec{V}\right) = \int\limits_{R^3} I\left(\vec{\omega}',V'\right) C\left(\vec{V}' \to \vec{V}\,|\,\vec{r}\right) d\vec{\omega}' dV' + n_0\left(\vec{r},\vec{V}\right), \tag{23}$$

где $I\left(\vec{\omega}',V'\right) = \int\limits_0^{l_0(\vec{\omega}')} \chi\left(\vec{r}-s\vec{\omega}',\vec{V}'\right) \exp\left(-\int\limits_0^{s} \Sigma\left(\vec{r}-l\vec{\omega}',V'\right) dl\right) ds.$

Уравнение (23) ясно выражает физический смысл того, что эмиссия в точке $\left(\vec{r},\vec{V}\right)$ зависит от всего пространства направлений и не может быть выражена в виде лучевой зависимости лишь по одному направлению. Этим обстоятельством можно объяснить сложности, возникшие у авторов работ [10—12] при попытке с помощью лучевой трактовки исследовать вопрос об эквивалентности так называемого *дополнительного* интегрального уравнения и интегродифференциального уравнения Больцмана (1). Дополнительное уравнение было предложено в этих работах для задач переноса лучистой энергии. На некотором этапе исследований авторы даже выражали сомнение в эквивалентности интегродифференциального уравнения Больцмана (1) и дополнительного уравнения [11, стр. 37]. В книге [12] нет сомнений в эквивалентности дополнительного интегрального уравнения и интегродифференциального уравнения. Однако нет и каких-либо преобразований дополнительного интегрального уравнения к виду интегрального уравнения, который был бы явно эквивалентен линейному интегродифференциальному уравнению Больцмана. Из уравнения (23) и комментария к смыслу приводимых в работах [10—12] формул метода коэффициентов ослабления с акцентированием внимания читателя на *фиксированном точечном источнике*, *пучке расходящихся лучей, времени запаздывания* и т. п. видно, что в работах [10—12] реализована явная схема решения квазистационарного уравнения для эмиссии частиц.

6. Заключительные замечания о геометрическом смысле интегрального и интегродифференциального уравнений переноса и о численном решении задачи переноса

Физический смысл различных конкретных форм уравнения переноса (1), (14), (23) можно с некоторой долей наглядности (*геометрически*) изобразить на плоскости. На рис. 2 жирная точка с исходящей из нее пунктирной жирной стрелкой символизируют точку $\left(\vec{r},\vec{V}\right)$ шестимерного фазового пространства состояний. Короткие стрелки разной длины изображают, как частицы формируют вклад в искомое решение в точке $\left(\vec{r},\vec{V}\right)$. Концентрические пунктирные окружности с уменьшающимся радиусом соответствуют ε-окрестностям состояний процесса при дифференцировании — в

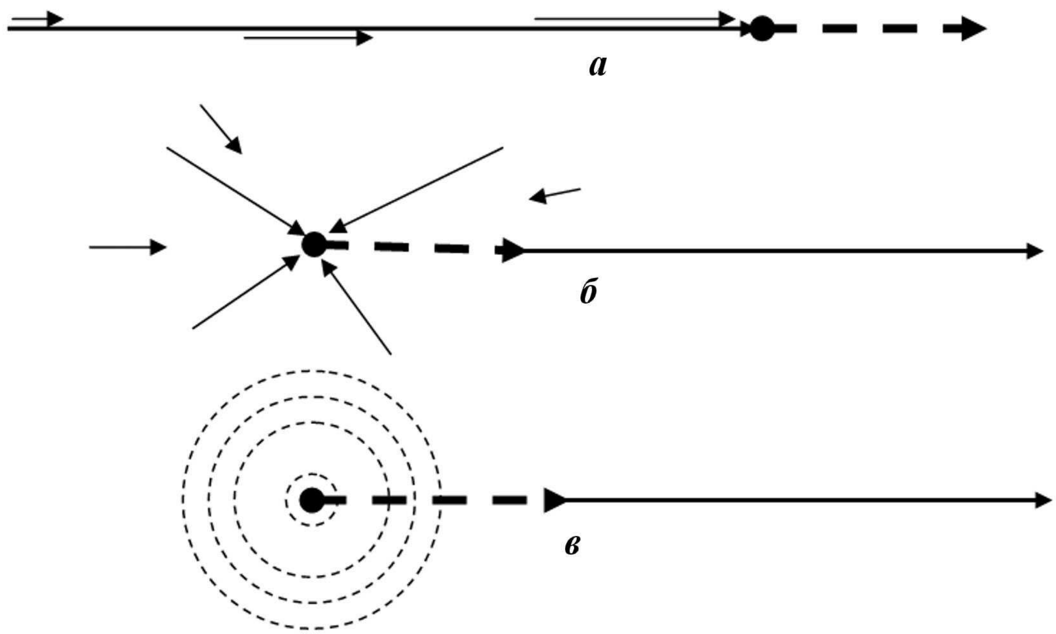

Рис. 2. Графическая иллюстрация смысла различных форм уравнения переноса: *а* — интегральное уравнение для плотности потока частиц; *б* — интегральное уравнение для плотности эмиссии частиц; *в* — интегро-дифференциальное уравнение для плотности частиц

процессе $\varepsilon \to 0$. Длинная стрелка, заканчивающаяся или начинающаяся в точке $\vec{r}$, символизирует полученное значение искомой функции $f\left(\vec{r}, \vec{V}\right)$, относительно которой написано уравнение.

Рисунок 2, *а* призван показать физический смысл уравнения (14), связывающего поток частиц в точке $\left(\vec{r}, \vec{V}\right)$ с эмиссией частиц в точках луча интегрирования, направленного из бесконечности в точку $\left(\vec{r}, \vec{V}\right)$. Ясно, что частицы, родившиеся в тех точках шестимерного пространства, которые не находятся на таком луче, пролетают мимо точки $\left(\vec{r}, \vec{V}\right)$. Следовательно, эти частицы не могут непосредственно внести вклад в поток в этой точке. Говоря иначе, плотность потока частиц в точке $\left(\vec{r}, \vec{V}\right)$ определяется *прямым прострелом* в точку $\left(\vec{r}, \vec{V}\right)$ из всех точек луча интегрирования $\vec{r} - s\vec{\omega}$. Внести свой вклад могут те и только те частицы, которые либо "родились" со скоростью $\vec{V}$ в какой-либо точке источника, принадлежащей лучу интегрирования, либо претерпели столкновение в точке пересечения траектории полета с этим лучом и получили после столкновения скорость $\vec{V}$. Результат всех таких столкновений и работа независимого источника учтены в эмиссии. Вклад из далеких точек луча интегрирования экспоненциально падает с расстоянием, и решение в основном определяется эмиссией в близких к $\vec{r}$ точках[4]. Суммарный вклад определяет плотность столкновений и в соответствии с определениями (10), (11) — плотность потока и плотность частиц в точке $\left(\vec{r}, \vec{V}\right)$. Искомая функция определена перед столкновением. Поэтому на рис. 2, *а* длинная стрелка упирается в точку $\left(\vec{r}, \vec{V}\right)$.

Рис. 2, *б* показывает, что эмиссия в точке $\left(\vec{r}, \vec{V}\right)$ является результатом того, что частицы, добравшиеся со всех направлений в точку $\vec{r}$, испытали столкновение в этой точке и получили в результате

[4]В теории переноса излучения формулу $I_\nu = I_{\nu 0} \exp\left(-\int\limits_0^s K_\nu dl\right)$, описывающую экспоненциальное уменьшение интенсивности (прямой прострел) монохроматического излучения вдоль некоторого направления, принято называть законом Бугера (или Бугера—Ламберта).

столкновения скорость $\vec{V}$. По сравнению с рис. 2, *а* поменялся физический смысл координат $\left(\vec{r},\vec{V}\right)$. В уравнении (14) для плотности столкновений они были состоянием частицы перед столкновением, а в уравнении (23) для эмиссии координаты $\left(\vec{r},\vec{V}\right)$ — это состояние частицы после столкновения в точке $\vec{r}$ (или в результате рождения в источнике).

Рис. 2, *в* символизирует, что баланс частиц в точке $\left(\vec{r},\vec{V}\right)$ полностью определяется скоростью процессов, происходящих непосредственно в этой точке. Для вычисления этой скорости достаточно знаний о поведении функции плотности частиц в бесконечно малой окрестности этой точки. В этой локальности — смысл перехода от интегрального уравнения (2) к интегродифференциальному (1). Здесь, как и в уравнении (23) для эмиссии, $\left(\vec{r},\vec{V}\right)$ — это состояние частицы после столкновения. Такое толкование координат $\left(\vec{r},\vec{V}\right)$ на рис. 2, *б* и 2, *в* отражается в том, что длинная стрелка исходит из точки $\left(\vec{r},\vec{V}\right)$. Начало этой стрелки экранируется жирной пунктирной стрелкой.

Численное решение задачи переноса методом Монте-Карло сводится к последовательному моделированию событий *пробег* $\to$ *столкновение* $\to$ *пробег* ..., т. е. к циклическому вычислению функций T и C. Начинается цикл с моделирования стартовых координат траектории частицы в соответствии с функцией $n_0\left(\vec{r},\vec{V}\right)$. То есть формально, начиная с распределения независимого источника, решается уравнение (23) для эмиссии. Как отмечается в монографии [12], метод коэффициентов ослабления "по характеру вычислений имеет много общего с методом Монте-Карло". Фактически в том и другом методе моделированием обрывающегося с вероятностью 1 ряда Неймана для плотности величин фазовых состояний марковской цепи столкновений оцениваются функционалы от решения интегродифференциального уравнения Больцмана (1).

Список литературы

1. *Дэвисон Б.* Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1960.
2. *Владимиров В. С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Труды МИАН. 1961. Т. 61. М.: Издательство АН СССР.
3. Теория ядерных реакторов / Под ред. Г. Биркгофа и Э. Вигнера. М.: Госатомиздат, 1963.
4. *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.
5. *Белл Д., Глесстон С.* Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1974.
6. *Кольчужкин А. М., Учайкин В. В.* Введение в теорию прохождения частиц через вещество. М.: Атомиздат, 1978.
7. *Спанье Дж., Гелбард Э.* Метод Монте-Карло и задачи переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1972.
8. *Марчук Г. И., Михайлов Г. А., Назаралиев М. А. и др.* Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука (Сибирское отделение), 1976.
9. *Ермаков С. М., Михайлов Г. А.* Статистическое моделирование. Издание второе, дополненное. М.: Наука, 1982.
10. *Дементьев Ю. А., Карповцев Е. А., Нарожная И. А. и др.* Метод коэффициентов ослабления // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2001. Вып. 2. С. 28—36.
11. *Дементьев Ю. А., Карповцев Е. А., Морозова Е. В. и др.* Дополнительное интегральное уравнение переноса излучения // Там же. 2001. Вып. 4. С. 35—41.
12. *Дементьев Ю. А.* Распределение лучистой энергии точечного источника. Новая форма интегрального уравнения переноса излучения. М.: Физматлит, 2005.

13. *Peierls R.* Critical conditions in the neutron multiplication // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1939. Vol. 35. P. 610—615.
14. *Валландер С. В.* Уравнения и постановка задач в аэродинамике разреженных газов. Сборник I / Под ред. С. В. Валландера. Л.: Издательство ЛГУ, 1963. С. 7—37.
15. *Масленников М. В.* Аксиоматическая модель явлений переноса частиц. М.: Наука, 1989.
16. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
17. *Кочубей Ю. К.* Статистическое моделирование кинетических процессов. Саров: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2004.
18. *Кёртис Д.* Методы Монте-Карло для итерации линейных операторов: Пер. с англ. В. С. Владимирова // УМН. 1957. Т. 12. Вып. 5. С. 149—174.
19. *Миллер Б. М., Панков А. Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах / Под ред. А. И. Кибзуна. М.: Физматлит, 2007.

Статья поступила в редакцию 15.08.11.