

УДК 519.6:536.71

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ СКЛЕЙКИ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С P_1 -ПРИБЛИЖЕНИЕМ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Н. Г. Карлыханов, Н. В. Селиванова
(РФЯЦ-ВНИИТФ), Томский ГУ

Исследуется алгоритм склейки кинетического уравнения с P_1 -приближением уравнения переноса. Проведено исследование области применимости P_1 -приближения уравнения переноса. Рассмотрена постановка внутренних граничных условий в точке склейки. Предложен критерий автоматического выбора точки склейки. Применимость предложенного алгоритма исследовалась на решении ряда методических задач.

Ключевые слова: перенос излучения, P_1 -приближение, склейка.

Введение

Для расчета ряда практических задач переноса излучения приходится решать кинетическое уравнение, расчет которого требует больших вычислительных ресурсов. Довольно часто встречаются случаи, когда рассчитываемая система состоит из чередующихся оптически прозрачных и оптически плотных областей. Рассчитывать такую систему в кинетической постановке нецелесообразно, а решение уравнения в P_1 -приближении может дать неудовлетворительный результат.

Весьма полезным оказывается подход, при котором в каждой области рассчитывается то уравнение, которое обеспечивает приемлемую точность при минимальных затратах машинных ресурсов. В процессе счета оптическая толщина может меняться в широком диапазоне как в пространстве, так и во времени, поэтому требуется разработка простого и надежного критерия применимости уравнения в P_1 -приближении. При организации таких вычислений необходимо провести склейку кинетического уравнения с уравнением в P_1 -приближении. Для этого нужно корректно поставить внутренние граничные условия.

Исследованию указанных проблем посвящена данная работа.

Постановка задачи

Для простоты изложения рассмотрим перенос излучения в плоском одномерном случае. Уравнение Больцмана в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \mu \frac{\partial I}{\partial x} + \left(\chi_a(x, t) + \chi_s(x, t) \right) I - \frac{\chi_s(x, t)}{2} \int_{-1}^1 I d\mu' = Q(x, t), \quad (1)$$

где c — скорость света; $I(x, t, \mu)$ — интенсивность излучения; x — пространственная координата; $\mu = \cos \varphi$ ($-1 < \mu < 1$) — косинус угла распространения излучения относительно оси x ; $\chi_a(x, t)$ — коэффициент поглощения излучения; $\chi_s(x, t)$ — коэффициент рассеяния излучения; $Q(x, t)$ — изотропный источник излучения. Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями. Способ задания начальных условий для дальнейшего изложения не существен. Для постановки граничных условий применяются два способа.

Первый способ: на левой границе задается падающий поток в виде

$$I(\mu > 0) = f(\mu, t),$$

на правой границе — в виде

$$I(\mu < 0) = \varphi(\mu, t).$$

Здесь f и φ — известные положительные функции времени и угла.

Второй способ постановки граничных условий — *зеркальное отражение*. В этом случае распределение интенсивности излучения на границе подчиняется следующему закону:

$$I(\mu) = I(-\mu). \quad (2)$$

Граничное условие (2) можно задавать как на правой, так и на левой границе.

Уравнение переноса излучения в P_1 -приближении

Воспользуемся разложением функции интенсивности излучения в ряд относительно угловой переменной μ по полиномам Лежандра. Ограничившись первым членом разложения, ее можно представить в виде

$$I = 0,5(cU + 3\mu S). \quad (3)$$

Проинтегрируем уравнение (1) по угловой переменной с весом 1 и μ . В результате с учетом соотношения (3) получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} + \chi_a(x, t)cU = 2Q(x, t); \quad (4)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{3} \frac{\partial U}{\partial x} + (\chi_a(x, t) + \chi_s(x, t))c^{-1}S = 0. \quad (5)$$

Здесь введены обозначения

$$U = \frac{1}{c} \int_{-1}^1 Id\mu; \quad S = \int_{-1}^1 \mu Id\mu,$$

где U — плотность энергии излучения; S — поток излучения. Система уравнений (4), (5) называется системой уравнений переноса излучения в P_1 -приближении [1].

Граничные условия для уравнения переноса излучения в P_1 -приближении формулируются следующим образом. Поток на левой границе можно записать в виде

$$S = \int_0^1 \mu f(\mu, t) d\mu + \int_{-1}^0 \mu Id\mu. \quad (6)$$

Если в выражении (6) значение I заменить равенством (3), то граничные условия примут вид [2]

$$\alpha_{left}S + \beta_{left}U + \gamma_{left} = 0, \quad (7)$$

где

$$\alpha_{left} = 0,5; \quad \beta_{left} = 0,25c; \quad \gamma_{left} = \int_0^1 \mu f(\mu, t) d\mu.$$

Аналогичным образом падающий поток на правой границе представляется в виде

$$\alpha_{right}S + \beta_{right}U + \gamma_{right} = 0, \quad (8)$$

где

$$\alpha_{right} = 0,5; \quad \beta_{right} = -0,25 c; \quad \gamma_{right} = \int_{-1}^0 \mu \varphi(\mu, t) d\mu.$$

Выражение для полного потока на левой границе с учетом уравнения (2) примет вид (7) с коэффициентами

$$\alpha_{left} = 1; \quad \beta_{left} = 0; \quad \gamma_{left} = 0.$$

Аналогичным образом записываются коэффициенты на правой границе:

$$\alpha_{right} = 1; \quad \beta_{right} = 0; \quad \gamma_{right} = 0.$$

Разностная аппроксимация кинетического уравнения

Запишем кинетическое уравнение переноса в конечно-разностном виде [3]. Интенсивность излучения определим в центре ячейки и для ее обозначения будем использовать полуцелый нижний индекс. Интенсивности излучения на гранях ячеек соответствует целый нижний индекс. В этом случае на равномерной сетке по времени и пространству для уравнения (1) имеем разностную схему

$$\begin{aligned} & \frac{I_{i+1/2,j}^{n+1} - I_{i+1/2,j}^n}{c\tau} + \frac{\mu_j}{h} \left(I_{i+1,j}^{n+1} - I_{i,j}^{n+1} \right) + (\chi_a + \chi_s)_{i+1/2}^{n+1} I_{i+1/2,j}^{n+1} - \\ & - \frac{(\chi_s)_{i+1/2}^{n+1}}{2} \sum_{j' \neq j} I_{i+1/2,j'}^{n+1} \Delta\mu_{j'} = Q_{i+1/2}^{n+1}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь приняты следующие обозначения: n — номер шага по времени; $i + 1/2$ — номер ячейки; i — номер грани; j — номер направления по угловой переменной; τ — шаг по времени; h — шаг по пространству; N — количество граней ячеек; M — количество угловых направлений.

Отметим, что разностная аппроксимация (9) является консервативной, т. е. законы сохранения энергии тождественно выполняются на любой сетке по пространству, времени и угловой переменной.

Для замыкания системы уравнений (9) вводится дополнительное соотношение связи. В соответствии с TVD-методологией соотношение связи можно представить в следующем виде:

— для $\mu > 0$

$$I_{i+1}^{n+1} = I_{i+1/2}^{n+1} + 0,5\phi_{i+1/2}(\theta_{i+1/2}) \left(I_{i+1/2}^{n+1} - I_{i-1/2}^{n+1} \right); \quad (10)$$

— для $\mu < 0$

$$I_i^{n+1} = I_{i+1/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i-1/2}(\theta_{i-1/2}) \left(I_{i+3/2}^{n+1} - I_{i+1/2}^{n+1} \right), \quad (11)$$

где $\theta_{i+1/2} = \frac{I_{i+3/2} - I_{i+1/2}}{I_{i+1/2} - I_{i-1/2}}$.

Отметим, что при значении $\phi(\theta) = 0$ соотношения связи (10), (11) дают первый порядок аппроксимации по пространству. В уравнениях (10), (11) индекс i меняется от 2 до $N - 1$. При $i = 1$ и $i = N$ функция $\phi(\theta) = 0$. Таким образом, в приграничных точках всегда реализуется схема первого порядка точности по пространству.

Функция $\phi(\theta)$ вычисляется по значениям интенсивностей излучения, взятым с предыдущего шага, как это было сделано в работах [3, 4]. При реализации расчета с применением ограничителя $\min \text{ mod}$ функция $\phi(\theta)$ примет вид [3]

$$\phi_{i+1/2} = \frac{1 + \text{sign}(\theta_{i+1/2})}{2} \min \{1, |\theta_{i+1/2}|\}.$$

При использовании ограничителя $\min \text{mod}$ исходная система разностных уравнений имеет почти всюду второй порядок аппроксимации по пространству.

Падающий поток на левой границе запишем в разностном виде:

$$I_{1,j}^{n+1} = f(\mu_j, t), \quad j = \frac{M}{2} + 1, \dots, M;$$

на правой границе

$$I_{N,j}^{n+1} = \varphi(\mu_j, t), \quad j = 1, \dots, \frac{M}{2}.$$

Разностный вид уравнения (2) на левой границе:

$$I_{1,j}^{n+1} = I_{1,M-j+1}^{n+1}.$$

На правой границе аппроксимация производится аналогичным образом.

Разностная аппроксимация уравнений переноса излучения в P_1 -приближении

Запишем уравнение переноса излучения в P_1 -приближении в конечно-разностном виде; плотность энергии U определим в центре интервала и для ее обозначения будем использовать полуцелые пространственные индексы, поток энергии S отнесем к граням ячеек с сопоставлением целых индексов:

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^n}{\tau} + \frac{S_{i+1}^{n+1} - S_i^n}{h} + (\chi_a)_{i+1/2}^{n+1} c U_{i+1/2}^{n+1} = 2Q_{i+1/2}^{n+1}, \quad i = 1, \dots, N-1; \quad (12)$$

$$\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{c^2 \tau} - \frac{1}{3} \frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i-1/2}^{n+1}}{h} + \frac{(\chi_a + \chi_s)_{i+1/2}^{n+1} + (\chi_a + \chi_s)_{i-1/2}^{n+1}}{2c} S_i^{n+1} = 0, \quad i = 2, \dots, N-1; \quad (13)$$

$$\frac{S_1^{n+1} - S_1^n}{c^2 \tau} - \frac{1}{3} \frac{U_{3/2}^{n+1} - U_{1/2}^{n+1}}{0,5h} + \frac{(\chi_a + \chi_s)_{1/2}^{n+1}}{c} S_1^{n+1} = 0; \quad (14)$$

$$\frac{S_N^{n+1} - S_N^n}{c^2 \tau} - \frac{1}{3} \frac{U_{N+1/2}^{n+1} - U_{N-1/2}^{n+1}}{0,5h} + \frac{(\chi_a + \chi_s)_{N-1/2}^{n+1}}{c} S_N^{n+1} = 0. \quad (15)$$

Уравнения (14), (15) отражают тот факт, что значения $U_{1/2}^{n+1}$, $U_{N+1/2}^{n+1}$ отнесены к левой грани первой ячейки и к правой грани последней ячейки соответственно. Отметим, что разностная аппроксимация (12) является консервативной.

Уравнения (12)–(15) дополняются граничными условиями (7), (8), записанными в разностном виде:

— на левой границе

$$\alpha_{left} S_1^{n+1} + \beta_{left} U_{1/2}^{n+1} + \gamma_{left} = 0;$$

— на правой границе

$$\alpha_{right} S_N^{n+1} + \beta_{right} U_{N+1/2}^{n+1} + \gamma_{right} = 0.$$

Исследование области применимости P_1 -приближения уравнения переноса излучения (качественная оценка)

По порядку величины $\frac{\partial I}{\partial t} \approx \frac{I}{T}$, где T — характерный масштаб времени; $\frac{\partial I}{\partial x} \approx \frac{I}{H}$, где H — характерный пространственный масштаб; $\frac{\chi_s}{2} \int_{-1}^1 I d\mu \approx \chi_s I$ [5]. Используя эти соотношения, уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{I}{cT} + \mu \frac{I}{H} + \chi_a I = Q. \quad (16)$$

Решив уравнение (16) относительно I , получим следующее выражение:

$$I = \frac{QH}{\left(\frac{H}{cT} + \chi_a H\right) + \mu}. \quad (17)$$

Очевидно, что I является линейной функцией от угловой переменной μ , если выполняется условие

$$\frac{H}{cT} + \chi_a H \gg 1. \quad (18)$$

Неравенство (18) означает, что излучение за характерное время распространяется на расстояние, много меньшее, чем характерный пространственный масштаб, и (или) длина свободного пробега по поглощению ($l = 1/\chi_a$) много меньше характерного пространственного масштаба. Области, в которых выполняется условие (18), называются оптически плотными.

Линейная зависимость интенсивности излучения от угловой переменной μ является достаточным условием применимости P_1 -приближения уравнения переноса, но не является необходимым. Если условие (18) выполнено, то применимо уравнение в P_1 -приближении. При невыполнении условия (18) уравнение в P_1 -приближении все же может давать приемлемый результат, что будет показано ниже.

С учетом соотношения (18) преобразуем выражение (17) к следующему виду:

$$I \approx A(1 - B\mu), \quad A = QHB, \quad B = \left(\frac{H}{cT} + \chi_a H\right)^{-1}. \quad (19)$$

Проинтегрировав выражение (19) по всем углам с весом $1/c$ и μ , получим соотношения

$$U \approx \frac{2A}{c}, \quad S \approx -\frac{2}{3}BA.$$

В силу соотношения (18) очевидно, что

$$|S| \approx \frac{1}{3}BcU \ll cU. \quad (20)$$

Таким образом, в области применимости P_1 -приближения уравнения переноса абсолютное значение потока много меньше, чем предельно допустимый поток¹.

Постановка внутренних граничных условий

Для определенности без ограничения общности допустим, что слева от точки склейки решается кинетическое уравнение, справа от точки склейки — P_1 -приближение уравнения переноса.

Считаем, что в точке склейки применимо уравнение в P_1 -приближении. Тогда интенсивность излучения в этой точке может быть записана в виде (3). Исходя из этого соотношения условие на правой границе для кинетического уравнения примет вид

$$I(\mu < 0) = 0,5(cU + 3\mu S), \quad (21)$$

где значения S и U взяты из расчета уравнений в P_1 -приближении². Если P_1 -приближение уравнения переноса применимо, то соотношение (21) обеспечивает положительность значений интенсивности.

¹Предельно допустимый поток реализуется в том случае, когда все частицы летят в направлении $\mu = 1$. Тогда $S = cU$.

²Граничное условие не удовлетворяет принципу максимума [6]. Граничное условие $I(\mu < 0) = 0,5cU$, удовлетворяющее принципу максимума, было исследовано М. Ю. Козмановым.

Граничное условие для P_1 -приближения уравнения переноса излучения задается в виде (7). При этом коэффициенты принимают следующий вид:

$$\alpha_{left} = 0,5; \quad \beta_{left} = 0,25c; \quad \gamma_{left} = -S_+, \quad (22)$$

где S_+ рассчитывается по формуле

$$S_+ = \int_0^1 \mu I d\mu. \quad (23)$$

Значения интенсивностей в формуле (23) берутся из решения кинетического уравнения.

При организации вычислений с использованием алгоритма склейки в расчете кинетического уравнения значения S , U в формуле (21) берутся с предыдущего шага по времени или с предыдущей итерации (в случае организации итерационного процесса). В расчете P_1 -приближения уравнения переноса значение S_+ вычисляется по значениям интенсивности, взятым с предыдущего шага по времени или с предыдущей итерации.

При счете задач итерационным методом итерации проводились до сходимости. Сходимость проверялась по плотности энергии излучения по следующему критерию:

$$|U^{s+1} - U^s| < \varepsilon (|U^s| + \eta). \quad (24)$$

Критерий (24) проверялся во всех точках по пространству. Константы сходимости в практических расчетах принимали значения $\varepsilon = 10^{-5}$, $\eta = 10^{-3}$.

Разностная аппроксимация внутренних граничных условий

Разностный аналог уравнения (21) имеет вид

$$I_{\bar{i},j} = 0,5 \left(cU_{\bar{i}-1/2} + 3\mu_j S_{\bar{i}} \right), \quad j = \frac{M}{2}, \dots, M.$$

Отметим, что в разностной аппроксимации P_1 -приближения значение $U_{\bar{i}-1/2}$ относится к граничной точке (см. уравнение (14)). Таким образом, $U_{\bar{i}-1/2}$ и $S_{\bar{i}}$ определяются на одной грани в точке склейки \bar{i} .

Для уравнения переноса излучения в P_1 -приближении разностное выражение для расчета S_+ принимает вид

$$S_+ = \sum_{j=M/2}^M \mu_j I_{\bar{i},j} \Delta\mu_j.$$

Здесь $I_{\bar{i},j}$ берется из расчета кинетического уравнения в точке склейки.

О консервативности алгоритма склейки

Поток излучения в точке склейки \bar{i} вычисляется дважды: исходя из расчета интенсивности излучения в точке склейки по кинетическому уравнению и исходя из расчета P_1 -приближения уравнения переноса излучения. Поток излучения на границе склейки можно записать следующим образом:

$$\int_{-1}^1 \mu I d\mu = \int_{-1}^0 \mu I d\mu + \int_0^1 \mu I d\mu. \quad (25)$$

Второе слагаемое в выражении (25) представляет собой S_+ (23). Если в первое слагаемое вместо интенсивности излучения поставить выражение (21), получим

$$S = \int_{-1}^1 \mu I d\mu = -0,25cU + 0,5S + S_+. \quad (26)$$

Выражение (26) можно записать в следующем виде:

$$0,25cU + 0,5S - S_+ = 0. \quad (27)$$

Соотношение (27) тождественно граничному условию для уравнения в диффузионном приближении (7) с коэффициентами (22).

Таким образом, если значения интенсивности излучения и величин U, S брать на одном временном слое, то алгоритм склейки будет консервативным. На практике возможна ситуация, когда значения указанных величин берутся с разных шагов по времени. Тогда о консервативности говорить не приходится.

Для контроля выполнения законов сохранения рассчитывается дисбаланс энергии системы. Закон сохранения энергии в интегральной форме записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_0^L U(x, t = T) dx - \int_0^L U(x, t = 0) dx + \int_0^T S_{right} dt - \int_0^T S_{left} dt + \\ + \int_0^L \int_0^T \chi_a(x, t) U(x, t) dt dx = \int_0^L \int_0^T Q(x, t) dt dx. \end{aligned}$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} B_r &= \int_0^L U(x, t = T) dx - \int_0^L U(x, t = 0) dx; \\ B_l &= \int_0^L \int_0^T \chi_a(x, t) U(x, t) dt dx - \int_0^L \int_0^T Q(x, t) dt dx - \int_0^T S_{right} dt + \int_0^T S_{left} dt, \end{aligned}$$

то дисбаланс энергии системы (в процентах) будет рассчитываться по следующей формуле:

$$Db = \frac{B_r - B_l}{0,5(B_r + B_l)} \cdot 100.$$

Критерий выбора точки склейки

Использовать качественный критерий применимости P_1 -приближения уравнения переноса на практике не всегда возможно в силу сложности получения априорной оценки. Наиболее удобным с точки зрения проведения практических расчетов является критерий (20). На практике данный критерий применяется в следующем виде:

$$|S| < \frac{1}{3} C_d c U, \quad (28)$$

где $C_d < 1$ — константа, подбираемая для каждого класса задач индивидуально. Очевидно, если $C_d = 0$, то критерий (28) указывает на то, что во всей системе будет рассчитываться кинетическое уравнение. Если $C_d > 1$, то на границе соотношение (21) может давать отрицательное значение интенсивности излучения. При малых значениях C_d область применимости P_1 -приближения сужается и, как следствие, увеличиваются время решения и точность расчета.

В разностном виде соотношение (28) выглядит следующим образом:

$$\max \{ |S_i^n|, |S_{i+1}^n| \} < \frac{1}{3} C_d c U_{i+1/2}^n. \quad (29)$$

Условие (29) проверяется в каждой пространственной точке по значениям с предыдущего шага по времени. Если условие (29) выполнено, то в интервале $i + 1/2$ рассчитывается уравнение в P_1 -приближении.

Примеры численных расчетов

Приведенные ниже задачи рассчитывались в четырех постановках:

1. Решение кинетического уравнения переноса излучения по TVD-схеме с ограничителем $\min \text{mod}$ второго порядка точности по пространству.
2. Решение уравнения переноса излучения в P_1 -приближении по схеме второго порядка точности по пространству.
3. Комбинированный счет с использованием кинетического уравнения переноса излучения и уравнения в P_1 -приближении, выполненный без итераций.
4. Комбинированный счет с использованием кинетического уравнения переноса излучения и уравнения в P_1 -приближении, выполненный итерационным методом.

Задача 1. Практический интерес представляет задача, в которой склейка кинетического уравнения с уравнением в P_1 -приближении проходит в точках, где использование P_1 -приближения находится на грани применимости.

В качестве такого примера рассматривается задача о распространении излучения в нерассеивающей среде ($\chi_s = 0$). Расчетная область $L [0; 1,02]$ делится на три части координатами $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$. В области $[x_1, x_2]$ задается коэффициент поглощения и изотропный источник $\chi_a = Q = 10$. В остальных областях $\chi_a = Q = 0$. Скорость света $c = 1$.

Постановка граничных условий на левой и правой границах осуществлялась в виде (2). Расчеты проводились с числом граней ячеек $N = 103$ и числом направлений по угловой переменной $M = 9$. Значения числа Куранта для кинетического уравнения: $K_k = c\tau/h = 0,5$ и $K_k = 10$. Для уравнения переноса в P_1 -приближении в оптически плотной области $K_{P_1} = \frac{c\tau}{3h^2 [1/(c\tau) + \chi_a + \chi_s]} \approx 0,08$ и $K_{P_1} \approx 16,7$. Для оптически прозрачных областей число Куранта принимает значения $K_{P_1} = \frac{1}{3} (c\tau/h)^2 \approx 0,08$ и $K_{P_1} \approx 33,3$.

Отметим, что в точках с координатами x_1 , x_2 нельзя проводить склейку кинетического уравнения с уравнением в P_1 -приближении, поскольку в этих точках не выполняется критерий (20). Поэтому от точки с координатой x_1 отступаем вправо, а от точки x_2 — влево на некоторую *глубину* Δ (сдвиг в оптически плотную область). Области $[0; x_1 + \Delta]$ и $[x_2 - \Delta; 1,02]$ представляют собой области решения кинетического уравнения. В области $[x_1 + \Delta; x_2 - \Delta]$ решается уравнение переноса излучения в P_1 -приближении. Таким образом, имеются две точки склейки, отнесенные к координатам $x_1 + \Delta$ и $x_2 - \Delta$ соответственно.

Согласно критерию (18) P_1 -приближение уравнения переноса в поставленных условиях в оптически плотной области находится на грани применимости. Действительно, если за характерный размер взять размер оптически плотной области, а за характерное время взять время прохождения излучения через оптически плотную область, то $H/(cT) + \chi_a H = 4 \gg 1$.

Как показал расчет кинетического уравнения для предложенной задачи, угловая зависимость интенсивности излучения в указанных точках при различных значениях Δ не линейна (рис. 1). Казалось бы, в таких условиях невозможно проводить склейку кинетического уравнения с P_1 -приближением уравнения переноса. Единственное, что указывает на возможность такой склейки — это то, что в точках склейки обеспечивается положительность интенсивности излучения согласно (21). Это видно из рис. 2 и табл. 1. Отметим, что на рис. 1 и в табл. 1 величина Δ выражается в единицах длины свободного пробега $l = 1/\chi_a$.

Критерий применимости P_1 -приближения (28)

Δ	0,1l	0,2l	0,4l	l
$C_d = \frac{3 S }{cU}$	0,98663235	0,74357973	0,46717590	0,14799324

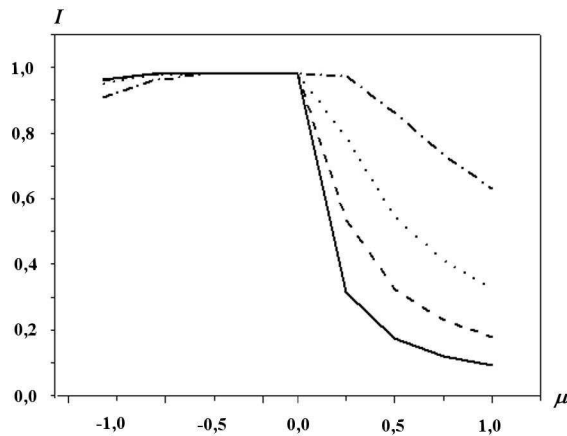


Рис. 1. Задача 1. Угловое распределение интенсивности излучения в точке $x = x_1 + \Delta$: — $\Delta = 0,1l$; --- $\Delta = 0,2l$; ... $\Delta = 0,4l$; - . - $\Delta = l$

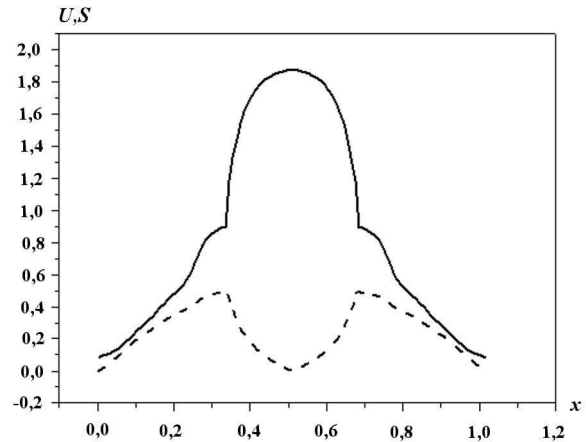


Рис. 2. Задача 1. Профили плотности энергии излучения (—) и абсолютного значения потока (---), рассчитанные из кинетического уравнения на момент времени $t = 0,4$

Величина C_d в табл. 1 вычислена по значениям S , U , полученным из расчета интенсивности излучения по кинетическому уравнению в точке склейки $x_1 + \Delta$. Исходя из данных табл. 1 можно сделать следующий вывод: с увеличением сдвига точки склейки в сторону оптически плотной области полученное значение критерия применимости все более удаляется от критического значения $C_d = 1$, что дает основание с большей уверенностью применять алгоритм склейки.

Как видно из рис. 3, а, слева, решение кинетического уравнения имеет заметные отличия от решения уравнения в P_1 -приближении. Как показала практика расчетов, применение алгоритма склейки в данной задаче допустимо с приемлемой точностью, которая зависит от положения точки склейки в глубине оптически плотной области и от наличия (отсутствия) итерационного процесса. В качестве критерия точности при расчете с применением алгоритма склейки выбрано отклонение от точного (кинетического) решения

$$L_1 = \frac{\int_0^L |U_s - U_c| dx}{\int_0^L |U_s| dx},$$

где U_s — эталонное решение кинетического уравнения; U_c — решение, полученное с использованием алгоритма склейки с различными параметрами.

На рис. 3 приведены результаты расчетов с учетом положения точек склейки, смещенных на $\Delta = 0,1l$. Можно заметить, что применение алгоритма склейки, особенно при счете с итерациями, существенно улучшает качество решения в сравнении с результатом расчета в P_1 -приближении, выполненного без применения алгоритма склейки. Влияние положения точки склейки кинетического уравнения с уравнением в P_1 -приближении и числа Куранта на решение представлено в табл. 2 и на рис. 4.

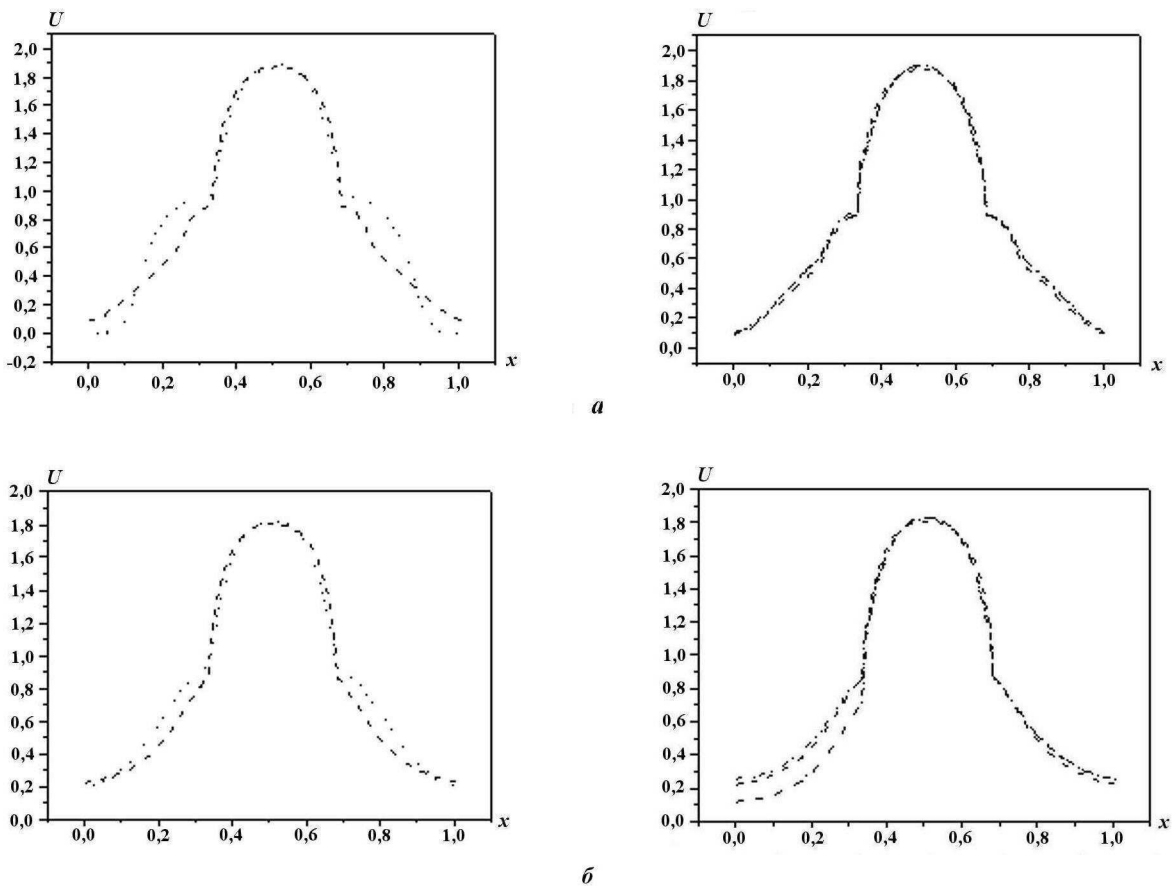


Рис. 3. Пространственное распределение плотности энергии излучения, полученное при расчете задачи 1 в различных постановках при $K_k = 0,5$ (а) и $K_k = 10$ (б): - - - — постановка 1; \cdots — постановка 2; - · - — постановка 3; - - - - — постановка 4

Таблица 2

Задача 1. Погрешность L_1 (%) алгоритма склейки относительно эталонного решения

K_k	Расчет	Δ		
		0,1l	0,2l	0,4l
0,5	С итерациями	3,33	3,11	1,81
	Без итераций	3,45	3,08	2,17
2	С итерациями	3,34	2,77	1,83
	Без итераций	2,74	2,6	2,02
10	С итерациями	3,25	2,71	1,79
	Без итераций	7,81	6,68	5,08

Из табл. 2 видно, что точность решения в сравнении с эталонным решением возрастает с увеличением значения Δ . Как показывают данные табл. 3, расчет без итераций с изменением значений Δ увеличивает дисбаланс энергии системы. Отметим, что при расчетах в постановке 4 количество итераций не превышает четырех.

Задача 2. Интересным для исследования представляется случай, когда коэффициент поглощения и источник излучения являются функциями координаты и времени. Рассматривается следу-

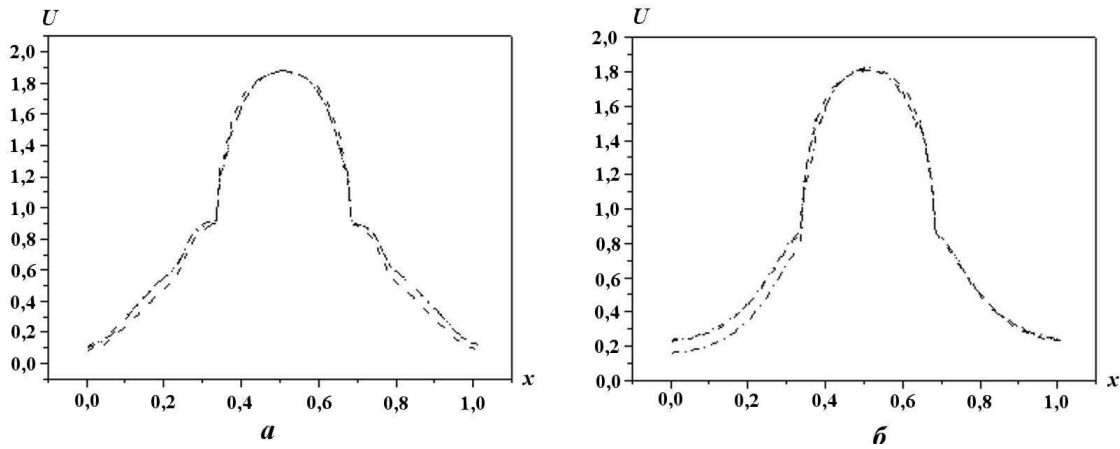


Рис. 4. Пространственное распределение плотности энергии излучения, полученное при расчете задачи 1 в различных постановках, $\Delta = 0,4l$: *a* — $K_k = 0,5$; *б* — $K_k = 10$; - - - постановка 1; - · - постановка 3; · · · · - постановка 4

Таблица 3

Задача 1. Дисбаланс энергии системы (%) в расчетах без итераций по алгоритму склейки

K_k	Δ		
	0,1l	0,2l	0,4l
0,5	0,59	0,67	0,7
2	1,85	2,14	2,38
10	4,9	5,56	6,4

ющая задача. Коэффициент рассеяния $\chi_s = 0$; коэффициент поглощения и источник излучения рассчитываются по формулам

$$Q(x, t) = \chi_a(x, t) = C_1 \exp\left(-\left(\frac{x - x_0}{\Delta}\right)^2\right), \quad x_0 = \frac{L}{2} + \frac{L}{4} \sin\left(2\pi \frac{t}{t_{end}}\right). \quad (30)$$

Здесь $C_1 = 90 = \text{const}$; x — координата; t — время; $L [0; 1,02]$ — размер системы; $t_{end} = 0,4$ — время окончания счета. Графическое изображение функции (30) представлено на рис. 5. На границах рассчитываемой системы задается нулевой поток.

Задача рассчитывается с теми же шагами по пространству и времени, что и задача 1. Константы автоматического выбора точек склейки: $C_d = 0,05$; $C_d = 0,25$; $C_d = 0,8$.

Как видно из рис. 6, *a, б* и табл. 4, решения, полученные с использованием алгоритма склейки при значении $C_d = 0,05$, дают минимальные отклонения от эталонного решения для всех приведенных значений чисел Куранта. Из табл. 4 видно, что с увеличением константы C_d количество интервалов,

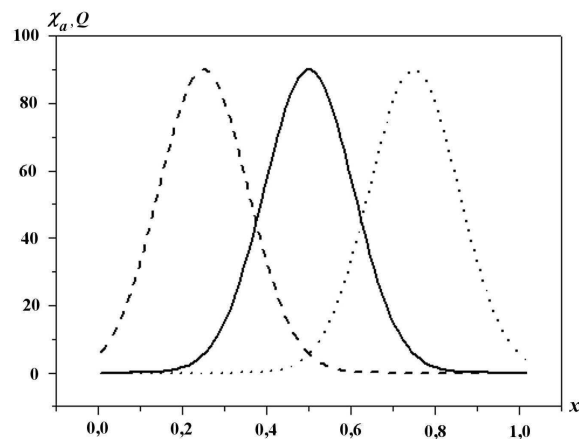


Рис. 5. Задача 2. Распределение коэффициента поглощения χ_a и источника излучения Q на различные моменты времени: — — — $t = 0$; - - - — $t = \frac{1}{4}t_{end}$; · · · · — $t = \frac{3}{4}t_{end}$

в которых рассчитывается уравнение в P_1 -приближении, увеличивается, а точность решения падает (рис. 6, δ – e). Отметим, что число итераций во всех расчетах не превышало четырех.

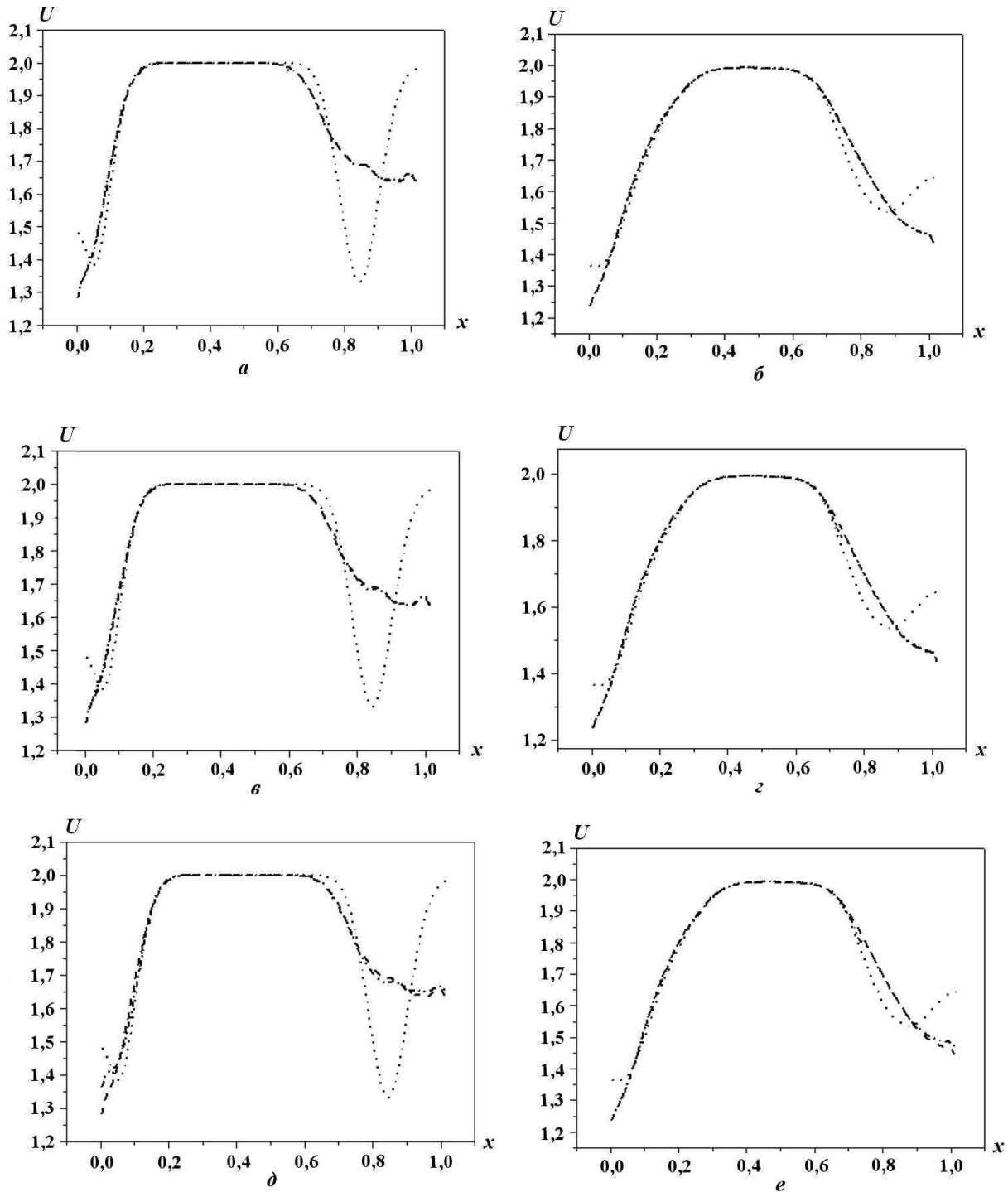


Рис. 6. Задача 2. Профили плотности энергии излучения, полученные при расчетах в разных постановках: a – $K_k = 0,5$, $C_d = 0,05$; b – $K_k = 10$, $C_d = 0,05$; c – $K_k = 0,5$, $C_d = 0,25$; z – $K_k = 10$, $C_d = 0,25$; d – $K_k = 0,5$, $C_d = 0,8$; e – $K_k = 10$, $C_d = 0,8$; - - - - постановка 1; \cdots – постановка 2; - \cdot - постановка 4

Задача 2. Количество диффузионных точек (%). Погрешность L_1 (%) алгоритма склейки относительно эталонного решения

C_d	$K_k = 0,5$		$K_k = 2$		$K_k = 10$	
	Кол-во диффуз. точек	L_1	Кол-во диффуз. точек	L_1	Кол-во диффуз. точек	L_1
0,05	29	0,0009	27	0,0014	21	0,0072
0,25	40	0,0024	38	0,003	30	0,01
0,8	48	0,022	47	0,65	39	0,061

Заключение

Предложен и исследован простой критерий автоматического выбора приближения. Для реализации алгоритма склейки рассмотрена постановка внутренних граничных условий. На примере расчета методических задач показана действенность алгоритма склейки кинетического уравнения с P_1 -приближением уравнения переноса.

Список литературы

1. Четверушкин Б. Н. Кинетически согласованные схемы в газовой динамике. М.: МГУ, 1999.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
3. Гаджиев А. Д., Завьялов В. В., Шестаков А. А. Применение TVD-подхода к DS_n -методу решения уравнения переноса теплового излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 37–48.
4. Егорова А. С., Карлыханов Н. Г. Решение кинетического уравнения переноса излучения методом усредненных косинусов // Там же. 2011. Вып. 3. С. 29–38.
5. Мигдал А. Б. Качественные методы в квантовой теории. М.: Наука, 1975.
6. Андреев Е. С., Козманов М. Ю., Рачилов Е. Б. Принцип максимума для системы уравнений энергии и нестационарного переноса излучения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1983. Т. 23, № 1. С. 152–159.

Статья поступила в редакцию 02.08.11.