

УДК 539.122:518.5

## МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ СО СТОХАСТИЧЕСКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Д. Г. Модестов  
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Предлагается построение схемы численного решения системы нелинейных уравнений, для вычисления правых частей которых используются методы статистического моделирования. Приводятся результаты решения по указанной схеме двух простых методических задач. На основе этих результатов оценивается влияние параметров схемы.

*Ключевые слова:* методы статистического моделирования, методы Монте-Карло, численные методы, метод простой итерации, метод последовательных приближений, марковская цепь.

### Введение

Наиболее универсальным из методов, используемых для решения систем нелинейных уравнений вида

$$x = S(x), \quad (1)$$

является метод простой итерации, иначе называемый методом последовательных приближений. При его использовании решение получается как предел последовательности

$$x_n = S_n(x_{n-1}) \quad (2)$$

с некоторым начальным значением  $x_0$  и такой функцией  $S_n$ , что корень уравнения  $x = S_n(x)$  равен корню уравнения (1). Например:

$$S_n(x) = (1 - \varepsilon_n)x + \varepsilon_n S(x), \quad (3)$$

где  $\varepsilon_n$  — произвольная числовая последовательность. Как известно (см., например, [1] или [2]), достаточным условием как сходимости последовательности (2), так и существования единственного решения для стационарного случая ( $S_n(x) = S(x)$ ), является то, что отображение  $S_n(x)$  — сжимающее. Данное условие легко обобщается и на тот случай, когда отображение зависит от номера итерации. В частности, если рассматривать значения  $x$  как элементы векторного пространства со скалярным произведением и индуцируемой последним нормой

$$\|x\|^2 = (x, x), \quad (4)$$

то достаточным условием сходимости является существование последовательности положительных чисел  $\alpha_n$  таких, что для любых элементов  $x$  и  $y$  справедливо

$$\|S_n(x) - S_n(y)\| \leq \alpha_n \|x - y\|, \quad \prod_{n=0}^{\infty} \alpha_n = 0. \quad (5)$$

В этом случае последовательность (2) сходится к корню уравнения (1), причем этот корень единственный. Удобно ввести для него специальное обозначение, например

$$x^*: x^* = S(x^*), \quad (6)$$

которое и будет использоваться в дальнейшем.

Однако в ряде практических задач, описание которых выходит за рамки настоящей статьи, правая часть (2) оценивается с помощью методов статистического моделирования и соответственно является выборочным значением некоторой векторной случайной величины с *условным математическим ожиданием*  $S_n(x_n)$ . Сама последовательность  $x_n$  является выборочным значением марковской цепи [3] с некоторой, в общем случае неизвестной явно, переходной вероятностью  $p_n(y|x)$ , удовлетворяющей соотношению

$$\int y p_n(y|x) dy = S_n(x). \quad (7)$$

В дальнейшем, если не оговорено противное, будет предполагаться, что для условного математического ожидания выполняется условие (5).

С учетом используемого скалярного произведения и соответствующей ему нормы (4) можно ввести понятие *условной дисперсии*:

$$D_n(x) = \int \|y\|^2 p_n(y|x) dy - \|S_n(x)\|^2. \quad (8)$$

Здесь для простоты будет рассматриваться случай, когда условная дисперсия ограничена, т. е.

$$\sup_x D_n(x) = D_{n,\max} < \infty. \quad (9)$$

Сразу следует отметить, что, поскольку при численных расчетах точки траектории реализуются как результат статистического моделирования, условная дисперсия получается обратно пропорциональной объему выборки. В частности, увеличивая этот объем, можно сделать дисперсию (8) и соответственно ее максимальное значение (9) сколь угодно малыми.

Для оценки характеристик рассматриваемой марковской цепи удобно проанализировать ее траекторию. Если  $x_n$  — последовательность точек траектории, то, учитывая свойства нормы (4), несложно показать справедливость следующего соотношения:

$$\|x_n - x^*\|^2 = \Delta_n + \|S_n(x_{n-1}) - x^*\|^2, \quad (10)$$

где

$$\Delta_n = \|x_n - S_n(x_{n-1})\|^2 + 2(x_n - S_n(x_{n-1}), S_n(x_{n-1}) - x^*). \quad (11)$$

В свою очередь, из (10), учитывая условие (5) и свойства корня (6), можно получить

$$\|x_n - x^*\|^2 \leq \Delta_n + \alpha_n^2 \|x_{n-1} - x^*\|^2, \quad (12)$$

или, повторяя  $n$  раз,

$$\|x_n - x^*\|^2 \leq \sum_{k=1}^n \tilde{\alpha}_{n-k}^2 \Delta_k + \tilde{\alpha}_n^2 \|x_0 - x^*\|^2,$$

где  $\tilde{\alpha}_n = \prod_{k=1}^n \alpha_k$ ,  $\tilde{\alpha}_0 = 1$ . Как можно видеть, математическое ожидание случайной величины (11) с учетом (8) удовлетворяет следующим соотношениям:

$$M\Delta_n = M\|x_n - S_n(x_{n-1})\|^2 = MD_n(x_{n-1}) \leq D_{n,\max}.$$

Поэтому в силу неравенства Чебышева [3] вероятность того, что  $n$ -я точка траектории лежит вне круга радиусом  $\rho$ , имеет следующую аппроксимацию:

$$P\left(\|x_n - x^*\| > \rho\right) \leq \frac{1}{\rho^2} \left( \sum_{k=1}^n \tilde{\alpha}_{n-k}^2 D_{k,\max} + \tilde{\alpha}_n^2 \|x_0 - x^*\|^2 \right). \quad (13)$$

Для более детального анализа поведения траекторий необходимо рассмотреть конкретные типы процессов.

### Стационарная цепь

Наиболее простой случай реализуется тогда, когда переходная вероятность не зависит от момента времени  $n$ :  $p_n(y|x) \equiv p(y|x)$ , т. е. марковская цепь является стационарной. Следует отметить, что фактически стационарная цепь возникает тогда, когда в методе простой итерации детерминистический подход заменяется в некотором смысле методом статистического моделирования. Так, в качестве примера можно привести работы сотрудников ИЯР РИЦ "Курчатовский институт" М. А. Калугина, Д. А. Шкаровского и др., которые посвящены расчету стационарного состояния реактора ВВЭР с учетом обратных связей по теплогидравлическим характеристикам, а также аналогичные работы сотрудников РФЯЦ-ВНИИТФ Г. Н. Малышкина, автора этой статьи и др. Во всех этих работах для оценки радиационного энерговыделения в критической системе применялся метод поколений с заданным числом поколений и размером поколения. Для согласования с теплогидравликой, в которой энерговыделение рассматривалось как источник тепла, использовался метод простой итерации. Соответственно каждую итерацию при таком подходе можно рассматривать как выборку случайной величины (энерговыделения) из условного распределения, дисперсия которого определяется параметрами метода поколений.

В стационарном случае от  $n$  не зависят математическое ожидание (7), дисперсия (8), а также число  $\alpha$ , которое, как следует из (5), удовлетворяет соотношению  $\alpha < 1$ . Учитывая это соотношение, из неравенства (13) несложно вывести, что

$$P\left(\|x_n - x^*\| > \rho\right) \leq \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{D_{\max}}{1 - \alpha^2} + \alpha^{2n} \|x_0 - x^*\|^2 \right).$$

Таким образом, справедливо следующее предельное неравенство:

$$P\left(\|x_n - x^*\| > \rho\right) \leq \frac{1}{\rho^2} \frac{D_{\max}}{1 - \alpha^2}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

В частности, можно утверждать, что вероятность ухода траектории в бесконечность равна нулю, а при  $D_{\max} \rightarrow 0$  предельное распределение стремится к точечному, которое сосредоточено на корне уравнения (1).

Сравнивая (14) с неравенством Чебышева [3], можно предположить, что величина  $D_{\max}/(1 - \alpha^2)$  является некоторой оценкой дисперсии предельного распределения и, в частности, превышает условную дисперсию (8). Не останавливаясь на доказательствах, можно отметить, что для большинства практических задач это предельное распределение существует и удовлетворяет условию стационарности цепи, т. е. его плотность  $p^*(x)$  удовлетворяет уравнению

$$p^*(x) = \int p(x|y) p^*(y) dy. \quad (15)$$

Как можно видеть, математическое ожидание удовлетворяет соотношению

$$\int y p^*(y) dy = \int y p(y|x) p^*(x) dx dy = \int S(x) p^*(x) dx. \quad (16)$$

Используя это соотношение и условие стационарности (15), можно показать, что дисперсия  $D^*$  удовлетворяет неравенству

$$D^* \geq \int D(x) p^*(x) dx, \quad (17)$$

т. е. в некотором смысле подтверждает выводы, сделанные при рассмотрении соотношения (14).

Как можно видеть из (14), в предельном случае  $D_{\max} \rightarrow 0$  соотношение (16) превращается в тождество (6). Однако интересно рассмотреть случай малой конечной дисперсии, а именно отклонение значения математического ожидания стационарного распределения, определяемого левой частью (16), от корня уравнения (1).

Удобно использовать то обстоятельство, что согласно (14) плотность предельного распределения  $p^*(x)$  сосредоточена около  $x^*$  и, соответственно, можно провести разложение  $S(x)$  в степенной ряд вблизи указанной точки с точностью до второго порядка малости:

$$S(x) = x^* + \hat{A}(x - x^*) + \hat{B}(x - x^*)(x - x^*) + o\|x - x^*\|^2,$$

где  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  — линейный и квадратичный операторы соответственно, определяемые первыми и вторыми производными функции  $S(x)$  в корне уравнения (1). В указанном приближении и пренебрежении членами высокого порядка малости соотношение (16) представляется в следующем виде:

$$\Delta x = \hat{A}\Delta x + \hat{B} \int f(x) (x - \langle x \rangle) (x - \langle x \rangle) dx + \hat{B}\Delta x\Delta x,$$

где  $\langle x \rangle = \int x p^*(x) dx$ ;  $\Delta x = \langle x \rangle - x^*$ . Учитывая, что согласно (5)  $\|\hat{A}\| \leq \alpha < 1$ , а значит, существует  $(1 - \hat{A})^{-1}$ , и обозначая  $\hat{C} = (1 - \hat{A})^{-1} \hat{B}$ , указанное соотношение можно записать следующим образом:

$$\Delta x = \hat{C} \int f(x) (x - \langle x \rangle) (x - \langle x \rangle) dx + \hat{C}\Delta x\Delta x.$$

Здесь следует отметить, что интеграл, присутствующий в данном выражении, представляет собой ковариационную матрицу, которая будет обозначаться как  $\hat{K}$ . Учитывая, что  $\hat{K} \sim 1/N$ , где  $N$  — размер выборки, используемой для получения следующего элемента марковской цепи, а  $\hat{C}$  не зависит от этой величины, можно получить следующее выражение для отклонения математического ожидания от корня при  $N \rightarrow \infty$ :

$$\Delta x \sim \frac{1}{N}, \text{ или } \Delta x = \hat{C}\hat{K} + o\left(\frac{1}{N}\right). \quad (18)$$

То есть, принимая во внимание, что дисперсия пропорциональна ковариационной матрице,

$$\|\Delta x\| = \gamma D^* + o(D^*), \quad (19)$$

где коэффициент  $\gamma$  пропорционален второй производной  $S(x)$ .

Таким образом, алгоритм, построенный на использовании стационарной цепи, в общем случае согласно (18) или (19) дает смещенную оценку. В частности, данное обстоятельство не позволяет использовать эргодичность цепи для уточнения значения корня. Единственным путем достижения необходимой точности представляется уменьшение дисперсии и соответственно увеличение объема выборки. Однако данный подход приводит к пропорциональному увеличению времени расчета, что может быть нерациональным, по крайней мере на начальных шагах, когда отклонение выборочно-го значения от корня намного превышает дисперсию. Кроме того, при реализации этого подхода возникает некоторое методическое неудобство, связанное с тем, что при достаточно малых задаваемых погрешностях, меньших корня стационарной дисперсии, длина моделируемой цепи может быть сколь угодно большой.

### Нестационарная цепь

Представляется, что более эффективный алгоритм, чем тот, который основан на использовании стационарной цепи, можно построить, проводя расчеты с плохой статистикой на начальных шагах и с хорошей — на последующих. Для этого можно построить нестационарную марковскую цепь с дисперсией (8), изменяющейся по закону

$$D_n(x) = \beta_n D(x),$$

и математическим ожиданием (7), удовлетворяющим предельному соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x).$$

Здесь числовая последовательность  $\beta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  обратно пропорциональна последовательности размеров выборок, а  $S_n(x) = S(x)$  в случае несмещенности оценки. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что в неравенстве (5) выполняется условие  $\alpha_n \leq \alpha < 1$ .

Повторяя те же рассуждения, что при выводе (13), можно показать, что

$$M \|x_n - x^*\|^2 \leq D_{\max} \sum_{k=1}^n \alpha^{2(n-k)} \beta_k + \alpha^{2n} M \|x_0 - x^*\|^2, \quad (20)$$

где  $D_{\max} = \sup_x D(x)$ . В случае, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha^{2(n-k)} \beta_k = 0, \quad (21)$$

последовательность случайных величин сходится к корню уравнения (1) с вероятностью 1. В частности, этот случай реализуется, когда  $\beta_n = \beta^{2n-2}$ , где  $\beta < 1$ . Действительно,

$$\sum_{k=1}^n \alpha^{2(n-k)} \beta^{2k-2} = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha^2 - \beta^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Практический интерес для определения окончания итерационного процесса представляет условная вероятность  $P(\|x_n - x^*\| > \rho \mid \|x_n - x_{n-1}\| \leq \delta)$ . Для оценки этой вероятности удобно использовать следующее неравенство:

$$\|x_{n-1} - x^*\| \leq \|x_n - x^*\| + \|x_n - x_{n-1}\| \leq \|x_n - x^*\| + \delta.$$

То есть из (12) следует неравенство

$$\|x_n - x^*\|^2 \leq \Delta_n + \alpha^2 (\|x_n - x^*\| + \delta)^2.$$

Решение этого неравенства с учетом соотношения

$$M(\|x_n - x^*\| + \delta)^2 \leq \left( \sqrt{M \|x_n - x^*\|^2} + \delta \right)^2$$

позволяет получить следующую оценку:

$$M \|x_n - x^*\|^2 \leq \left( \frac{\alpha^2 \delta + \sqrt{(1 - \alpha^2) \beta_n D_{\max} + \alpha^2 \delta^2}}{1 - \alpha^2} \right)^2.$$

Следует отметить, что при  $D_{\max} \rightarrow 0$  получается соотношение  $\|x_n - x^*\| \leq \frac{\alpha \delta}{1 - \alpha}$ , которое обычно используется при оценке погрешности в детерминистическом методе простой итерации. Учитывая

оценку математического ожидания и используя неравенство Чебышева, условную вероятность в рассматриваемом случае можно представить следующим образом:

$$P\left(\|x_n - x^*\| > \rho \mid \|x_n - x_{n-1}\| \leq \delta\right) \leq \left(\frac{\alpha^2 \delta + \sqrt{(1 - \alpha^2) \beta_n D_{\max} + \alpha^2 \delta^2}}{\rho(1 - \alpha^2)}\right)^2. \quad (22)$$

Учитывая приведенные соотношения, можно построить безотказный алгоритм решения уравнения (1). Для его построения из практических соображений определяется вероятность выхода решения из круга радиусом  $\rho$ . Также оцениваются значения  $\alpha$  и  $D_{\max}$ . С учетом этих параметров строится последовательность  $\beta_n$ , а также определяются значения  $n_{\min}$  — минимальное число шагов до прекращения вычислений и  $\delta$  — максимальное отклонение выборочных значений на последующих итерациях. Далее с использованием этих значений выполняются следующие действия:

- 1)  $n = 0$ ,  $x_0$  выбирается из произвольного распределения;
- 2)  $n = n + 1$ ;
- 3) с использованием значения  $x_{n-1}$  методом статистического моделирования с размером выборки, обратно пропорциональным  $\beta_n$ , получается  $x_n$ ;
- 4) если  $n < n_{\min}$ , то переход к шагу 2;
- 5) если  $\|x_n - x_{n-1}\| > \delta$ , то переход к шагу 2.

Как можно видеть из (20) с учетом (21), этот алгоритм всегда сходится с вероятностной погрешностью, определяемой выражением (22). При этом вопрос об оптимизации встает при выборе последовательности  $\beta_n$ . В каждом конкретном случае он решается индивидуально, но, учитывая степенную сходимости последнего члена в правой части соотношения (20), можно рекомендовать степенную же зависимость  $\beta_n = \beta^{2n-2}$ , как приведено в замечании к (21). Для оценки влияния данного параметра на скорость сходимости полезно рассмотреть решение простых методических задач.

### Линейная функция

Наиболее простым примером, поддающимся аналитическому рассмотрению, представляется случай линейной функции. Пусть переходная вероятность имеет вид

$$p(y|x) = \varphi_D(y - ax - b), \quad \varphi_D(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \exp\left(-\frac{y^2}{2D}\right). \quad (23)$$

Из (7) и (8) следует, что в этом случае  $S(x) = ax + b$ , дисперсия равна  $D$  и не зависит от  $x$  и согласно (5)  $\alpha = a$ . Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{D_1}(y - a_1 z - b_1) \varphi_{D_2}(z - a_2 x - b_2) dz = \varphi_{D_1 + a_1^2 D_2}(y - a_1 a_2 x - b_1 - a_1 b_2),$$

можно вычислить переходную вероятность на  $n$  шагов для стационарной цепи (23):

$$p^{(n)}(y|x) \equiv \int p(y|z_1) \dots p(z_{n-1}|x) dz_1 \dots dz_{n-1} = \varphi_{D^{(n)}}(y - a^n x - b^{(n)}), \quad (24)$$

где  $D^{(n)} = D \sum_{k=0}^{n-1} a^{2k}$ ;  $b^{(n)} = b \sum_{k=0}^{n-1} a^k$ . При условии  $|a| < 1$  это распределение сходится к предельному  $p^*(y|x) = \varphi_{D/(1-a^2)}\left(y - \frac{b}{1-a}\right)$ , которое, в частности, является решением уравнения стационарности (15). Здесь необходимо отметить, что дисперсия этого распределения, удовлетворяющая условию (17), совпадает с оценкой, сделанной из рассмотрения соотношения (14). Математическое

ожидание для стационарного распределения равно корню уравнения (1)  $x^* = b/(1 - a)$ , что в согласии с (18) или (19) при равенстве нулю второй производной  $S(x)$ .

Для нестационарной цепи с  $\beta_n = \beta^{2n-2}$  переходная вероятность на  $n$  шагов имеет вид (24), только  $D^{(n)} = D \sum_{k=1}^n \beta^{2k-2} a^{2(n-k)} = D \frac{a^{2n} - \beta^{2n}}{a^2 - \beta^2}$ . Как можно видеть, при больших значениях  $n$  она по степенному закону стремится к точечному распределению, сосредоточенному на корне уравнения (1).

Для оценки оптимального значения  $\beta$  были проведены методические расчеты с параметрами  $a = 1/2$ ;  $b = -1$ ;  $D = 1$ ;  $\delta = 10^{-5}$  и различными  $\beta \in (0, 1)$ . На рис. 1 приведены отклонения полученного решения от корня для всех этих расчетов. Здесь можно сделать вывод, что по крайней мере качественно выполняется *правило трех сигм*; кроме того, оценка погрешности (22) является завышенной и при практическом использовании полученные с ее помощью значения лучше рассматривать в качестве первых приближений к тем, которые будут применяться в расчетах.

На рис. 2 приведена зависимость трудоемкости расчета от значения  $\beta$ . Сама трудоемкость определялась из предположения, что для вычисления каждого выборочного значения решалась чистая линейная задача статистического моделирования, трудоемкость которой  $N$  обратно пропорциональна дисперсии, т. е.

$$N = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{n-1} \beta^{-2k},$$

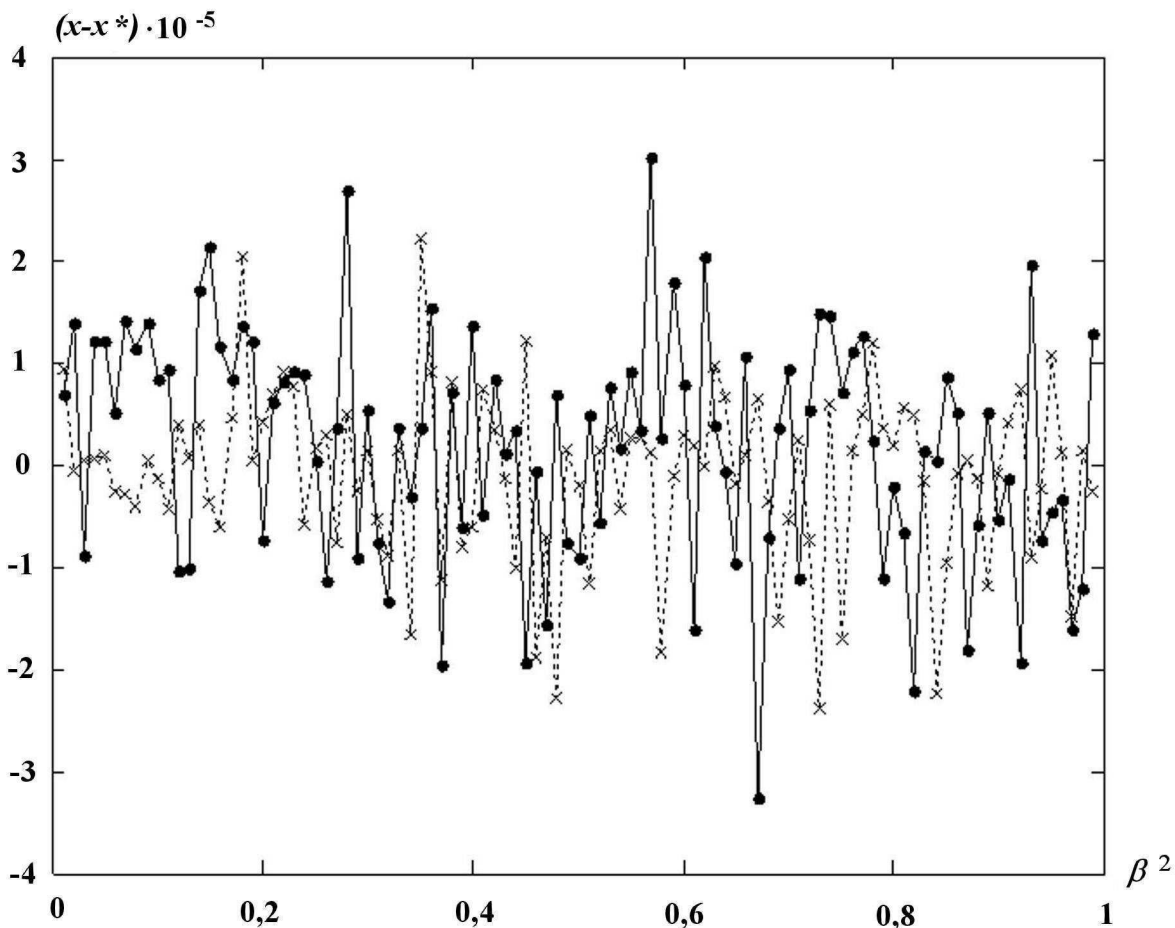


Рис. 1. Отклонение решения от корня уравнения (1) в зависимости от параметра  $\beta$ : —●—  $x = x/2 - 1$ ; - -x- -  $x = \cos(x)/3$

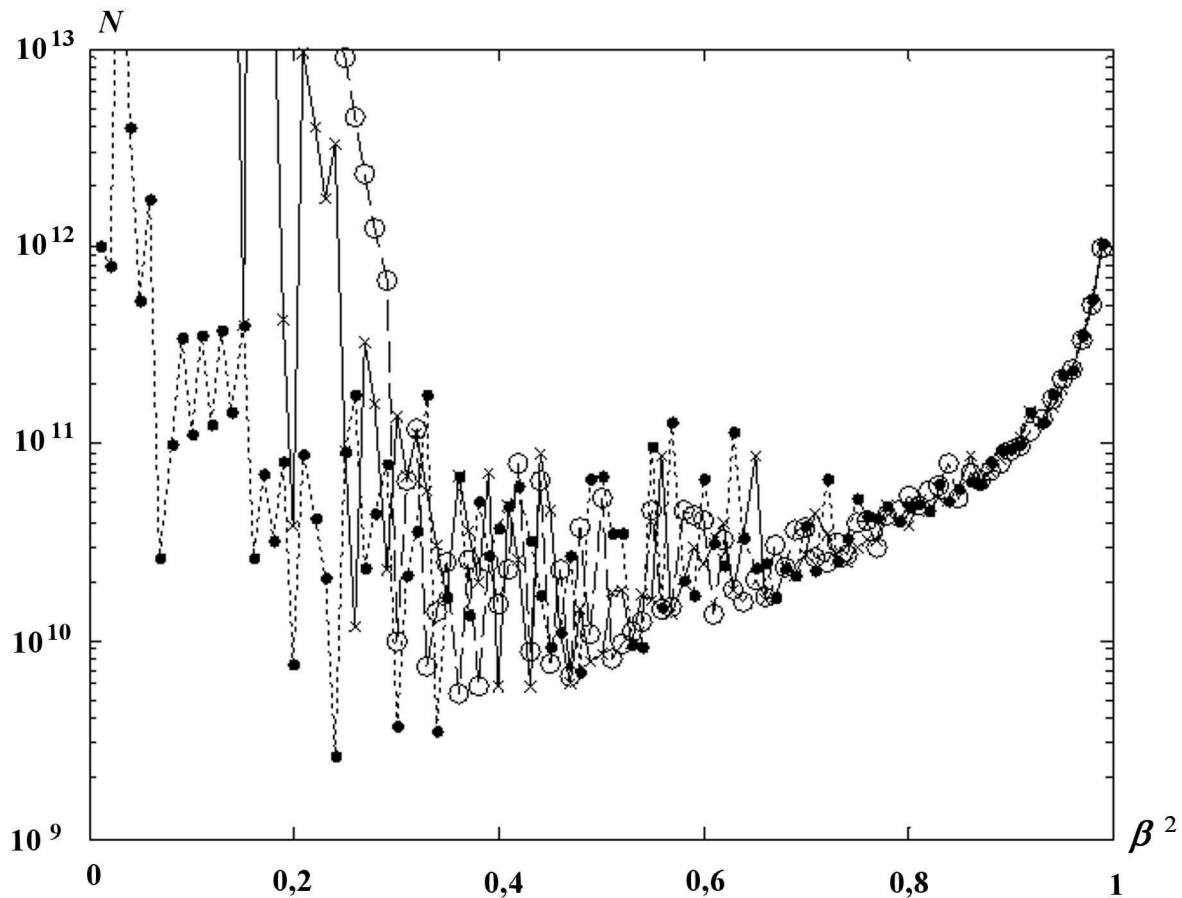


Рис. 2. Зависимость трудоемкости расчета от параметра  $\beta$ :  $-x-x-x = x/2 - 1, D = 1$ ;  $-O-O-O = x/2 - 1, D = 0,01$ ;  $- \bullet - \bullet - \bullet = x = \cos(x)/3, D = 1$

где  $n$  — номер итерации, на которой процесс был прерван по достижении условия сходимости.

Как видно, выбор больших и малых значений  $\beta$  не оптимален, что, впрочем, предсказуемо. Интересно то, что из-за статистических колебаний невозможно определить оптимальное значение этого параметра. Можно только утверждать, что в качестве него можно взять любое значение из достаточно большого интервала вблизи  $1/2$ , скажем,  $\beta \in (1/4, 3/4)$ . На рис. 2 также приведены оценки трудоемкости расчета подобной задачи с  $D = 0,01$ . Как видно в данном случае, в области оптимальных  $\beta$  наблюдается слабая зависимость от начальной дисперсии.

Несложно повторить те же самые выкладки и расчеты для подобного многомерного случая, получив аналогичные результаты.

### Нелинейная функция

Определенный интерес представляет нелинейный случай с отличной от нуля второй производной условного математического ожидания (7). Для определенности пусть

$$p(y|x) = \varphi_D \left( y - \frac{\cos(x)}{3} \right); \quad S(x) = \frac{\cos(x)}{3}, \quad (25)$$

где  $\varphi_D$  определена по формуле (23). Как можно видеть, данная функция удовлетворяет условию сходимости (5), а корень уравнения (1) несложно получить численно. Его значение  $x^* =$



$= 0,316\ 750\ 828\ 771\ 221\ 171\ 89$ . Для решения этой задачи были проведены расчеты, аналогичные случаю линейной функции. Результаты также представлены на рис. 1, 2.

Выводы, которые можно сделать по этим расчетам, совпадают с предыдущим случаем. Здесь интересно рассмотреть характеристики стационарного распределения, оцененные по результатам численного моделирования.

Сначала удобно рассмотреть дисперсию. Приблизительно оценить ее значение можно, исходя из (14). Но для этого необходимо, в свою очередь, оценить значение  $\alpha$ , что можно сделать с помощью предельного перехода в (5):  $\alpha \approx |S'(x^*)|$ . При этом, учитывая (25),  $S'(x^*) = -\sin(x^*)/3 \approx -0,104$ . Соответственно при  $D = 1$  получается  $D^* \approx 1,011$ . В то же время численная оценка дает значение  $D^* = 1,017$ . То есть, принимая во внимание приближенность теоретической оценки, можно считать согласие удовлетворительным.

Другой характеристикой стационарного распределения является отклонение математического ожидания от корня. Используя формулу (18) и принимая во внимание, что в рассматриваемом случае  $\hat{K} = D^*$ , а также

$$\hat{C} = \frac{1}{2} \frac{S''(x^*)}{1 - S'(x^*)} = -\frac{1}{2} \frac{\cos(x^*)}{3 + \sin(x^*)},$$

значение отклонения можно оценить по формуле  $\Delta x \approx -0,143\ 478 D^*$ . Сравнение этой теоретической зависимости с рассчитанной по результатам моделирования приведено на рис. 3. Видно хорошее совпадение при малых значениях  $D^*$ . При больших  $D^*$  наблюдается расхождение, что связано с возрастающей ролью старших степеней дисперсии, которые не учитывались при выводе (18).

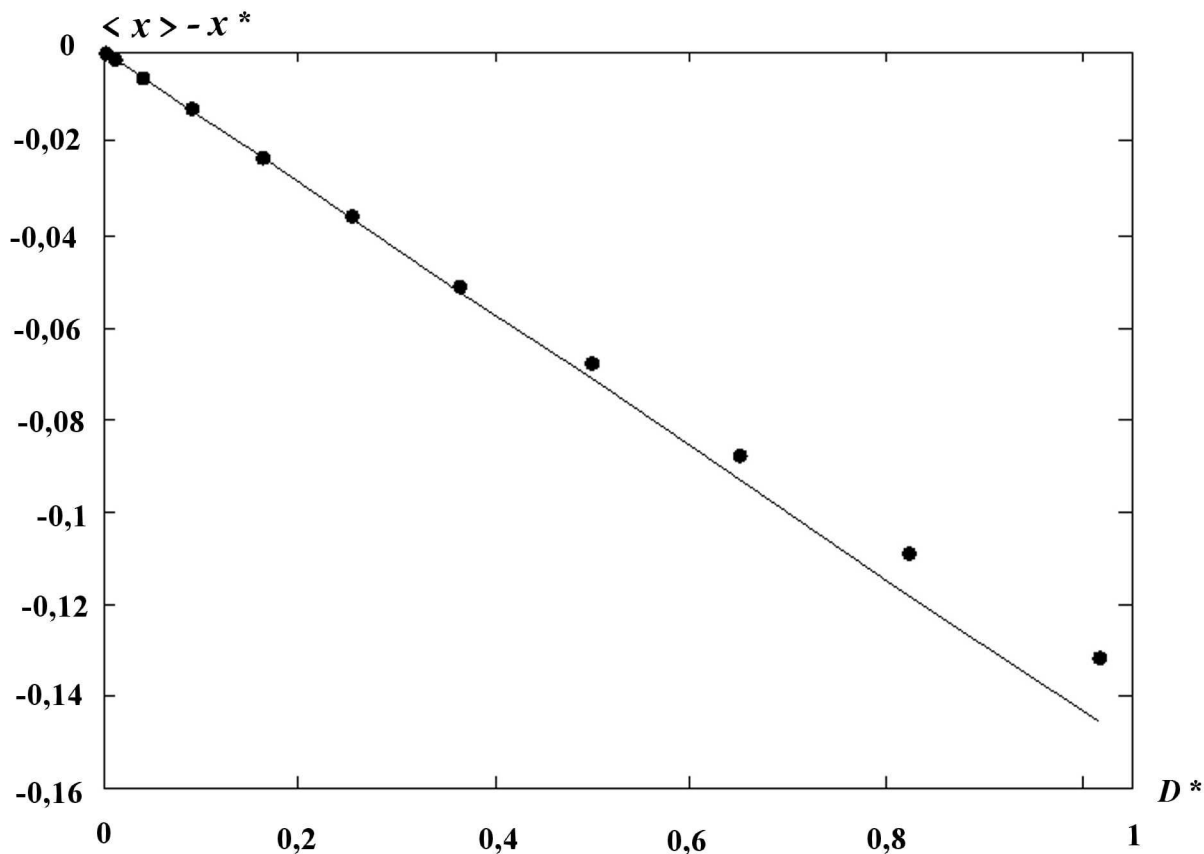


Рис. 3. Отклонение от корня уравнения (1) математического ожидания стационарного распределения в зависимости от дисперсии последнего: — — теоретическая оценка; • — расчетная оценка

## Заключение

Построенный с использованием нестационарной марковской цепи и оценкой сверху погрешности (22) алгоритм решения уравнения (1) в случае вычисления правой части с помощью методов статистического моделирования может считаться пригодным для практического использования. С одной стороны, это утверждение следует из того, что при хорошей статистике, т. е. при  $D_{\max} \rightarrow 0$ , алгоритм непрерывно переходит в классический метод простой итерации. С другой стороны, оно является следствием того, что при любых дисперсиях обрыв марковской цепи по условию отклонения численного решения от корня с любой наперед заданной вероятностью всегда достигается за конечное число итераций.

Предложенный алгоритм обосновывается расчетами двух простых методических задач. Эти расчеты подтверждают и оценки характеристик стационарной марковской цепи, которые могут использоваться при оценке погрешностей практических задач. Из проведенных расчетов можно сделать предположение, что значение параметра  $\beta$ , характеризующего нестационарность цепи, оптимально в достаточно широких пределах и, в частности, его можно считать равным  $1/2$ . Но для конкретных задач это предположение требует проверки. Также можно высказать предположение, что трудоемкость расчетов слабо зависит от начальной дисперсии.

Следует отметить, что в работе [4] приведено описание метода, предназначенного для решения подобного уравнения с использованием нестационарной марковской цепи. Однако нестационарность, используемая так же, как в рассмотренном здесь методе, для обеспечения сходимости, получается не за счет уменьшения дисперсии, а за счет изменения математического ожидания по формуле (3) с последовательностью  $\varepsilon_n$ , удовлетворяющей определенным правилам (например,  $\varepsilon_n = 1/n$ ). При этом для сходимости не требуется выполнение условия (5), но в то же время сама сходимость более медленная. Так, несложно проверить, что при  $D = 0$  для решения рассмотренной здесь нелинейной задачи методом Роббинса—Монро требуется более 5 000 шагов против 7, достигаемых методом простой итерации, или даже 35, получаемых представленным здесь методом с  $D = 1$  и  $\beta = 1/2$ . Для линейной задачи соотношение еще хуже. Таким образом, если условие (5) выполнено, то использование описанного в настоящей работе метода представляется более эффективным.

## Список литературы

1. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.
2. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
3. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.
4. *Robbins H., Monro S.* A stochastic approximation method // *Annals of Math. Stat.* 1951. Vol. 22. P. 400—407.

Статья поступила в редакцию 05.07.12.

---