

УДК 519.6+533.6

ПРОГРАММНЫЙ МОДУЛЬ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ ЯВНОЙ СХЕМЫ ГОДУНОВА—КОЛГАНА—РОДИОНОВА

А. В. Родионов, И. Ю. Мышкина, В. Ф. Спиридонов, С. В. Стародубов,
К. В. Цибереv, А. В. Корнев
(РФЯЦ-ВНИИЭФ; ОАО "Компания "Сухой", г. Москва)

Работа посвящена созданию программного модуля для численного моделирования аэродинамических задач на основе явной разностной схемы Годунова—Колгана—Родионова. Представлены результаты разработки и тестирования алгоритмов расчета двумерных плоских течений. На примере решения задач различного типа анализируется эффективность используемой расчетной методики в сравнении с другими известными программными пакетами.

Ключевые слова: программный модуль, вычислительная аэродинамика, уравнения Эйлера и Навье—Стокса, модель турбулентности Спаларта—Аллмараса, схема Годунова—Колгана—Родионова.

Введение

В настоящее время ведется разработка универсального отечественного пакета программ инженерного анализа ЛОГОС, предназначенного для решения связанных и сопряженных трехмерных задач теплопереноса и гидродинамики на многопроцессорных ЭВМ [1, 2]. Пакет программ ЛОГОС состоит из четырех основных модулей, предназначенных для *трехмерного* расчета:

- 1) вязких несжимаемых гидродинамических течений;
- 2) вязких сжимаемых аэродинамических течений;
- 3) теплопроводности;
- 4) гидродинамических течений на адаптивно-встраиваемых сетках.

В настоящей работе описывается дополнительный модуль расчета, предназначенный для решения двумерных аэродинамических задач. Предполагается, что разрабатываемый модуль должен обеспечивать надежное и качественное моделирование сложных течений в широком диапазоне чисел Маха (M) — от дозвуковых скоростей потока до сверх- и гиперзвуковых скоростей. Поэтому в качестве основы для расчетной методики программного модуля была выбрана конечно-разностная схема С. К. Годунова [3, 4], развитая в работах В. П. Колгана [5] и А. В. Родионова [6, 7] (далее схема Годунова—Колгана—Родионова (ГКР)). Такой выбор обусловлен тем, что схема ГКР, с одной стороны, является относительно простой и универсальной, допускающей усовершенствование (развитие) ее отдельных элементов, а с другой — принадлежит к числу высоконадежных и эффективных схем, выдержавших проверку временем. Заметим, что именно схема ГКР используется в качестве базовой в пакете прикладных программ EWT (Electronic Wind Tunnel) [8], который разрабатывается в ЦАГИ для решения сложных практических задач современной аэродинамики.

В данной статье приводятся результаты разработки первой версии программного модуля на основе схемы ГКР. Реализованные алгоритмы позволяют рассчитывать плоские течения в рамках уравнений Эйлера, Навье—Стокса или Рейнольдса с моделью турбулентности Спаларта—Аллмараса. На этом этапе работ было проведено развитие методик и программ по следующим направлениям:

- 1) обобщение на случай произвольных блочно-структурированных сеток;
- 2) распараллеливание модуля с использованием стандартов MPI/OpenMP;
- 3) введение форматов чтения/записи данных EFR, CGNS.

Реализованная версия программного модуля подробно протестирована на задачах единого верификационного базиса (из проекта по внедрению суперкомпьютерных технологий в авиационную промышленность), а также проведен анализ ее эффективности в сравнении с некоторыми зарубежными программными пакетами.

Математическая модель и численный метод

В программном модуле решаются уравнения Эйлера или Навье—Стокса, записанные в дифференциальной консервативной форме. При моделировании турбулентных течений используется осреднение по Рейнольдсу и гипотеза Буссинеска; в этом случае осредненные уравнения Навье—Стокса замыкаются при помощи одной из наиболее известных моделей турбулентности — однопараметрической модели Спаларта—Аллмараса.

Для численного интегрирования уравнений газовой динамики используется явная *противопотоковая* схема, имеющая второй порядок точности и обладающая свойством монотонности. Она предполагает кусочно-линейное распределение параметров газа по пространству. Изначально считаются известными параметры газа в центрах ячеек на нижнем временном слое. Процедура восстановления пространственного распределения параметров по их значениям в центрах ячеек называется *реконструкцией параметров*.

Для кусочно-линейного распределения параметров реконструкция заключается в определении приращений параметров внутри каждой ячейки вдоль каждого из направлений сетки. Алгоритмы вычисления таких приращений могут быть различными. В описываемой реализации численного метода используются реконструкции трех видов, каждый из которых обеспечивает свойство монотонности схемы ГКР.

Реконструкция minmod. В этой реконструкции приращение параметра f по i -му направлению сетки рассчитывается как

$$\Delta f_i = \text{minmod}(\Delta f_i^+, \Delta f_i^-),$$

где $\Delta f_i^+ = f_{i+1} - f_i$, $\Delta f_i^- = f_i - f_{i-1}$ — односторонние разности, а функция minmod определяется как

$$\text{minmod}(a, b) \equiv \begin{cases} a, & \text{если } ab > 0 \text{ и } |a| < |b|; \\ b, & \text{если } ab > 0 \text{ и } |b| < |a|; \\ 0, & \text{если } ab < 0. \end{cases}$$

Реконструкция такого типа была впервые предложена Колганом в [5]. В настоящее время ее обычно используют в вышеприведенном виде.

Реконструкция MC (Monotonized Central-difference reconstruction). В этой реконструкции приращение рассчитывается как

$$\Delta f_i = \text{limiter}^{\text{TVD}}(\Delta f_i^0),$$

где $\Delta f_i^0 = (\Delta f_i^+ + \Delta f_i^-) / 2$ — центральная разность, а TVD-ограничитель определяется как

$$\text{limiter}^{\text{TVD}}(\Delta f_i^0) = \text{minmod}(\Delta f_i^0, 2\text{minmod}(\Delta f_i^+, \Delta f_i^-)).$$

Такая реконструкция была предложена Ван Лиром [9]. В большинстве расчетных точек она использует центральные разности (в отличие от односторонних разностей в реконструкции minmod) и поэтому дает меньшую схемную диссипацию.

Реконструкция МС+. Данная реконструкция получается из реконструкции МС в результате замены в ней TVD-ограничителя на TVB-ограничитель, который определяется как

$$\text{limiter}^{\text{TVB}}(\Delta f_i^0) = \min\text{mod}\left(\Delta f_i^0, 2\min\text{mod}\left(\tilde{\Delta}f_i^+, \tilde{\Delta}f_i^-\right)\right),$$

$$\tilde{\Delta}f_i^+ = \begin{cases} \Delta f_i^+, & \text{если } \Delta f_i^0 \Delta f_{i+1}^0 > 0; \\ \Delta f_i^+ - 0,5\Delta f_{i+1}^0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad \tilde{\Delta}f_i^- = \begin{cases} \Delta f_i^-, & \text{если } \Delta f_i^0 \Delta f_{i-1}^0 > 0; \\ \Delta f_i^- - 0,5\Delta f_{i-1}^0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Такая модифицированная реконструкция была введена Родионовым в [10]. Она отличается от реконструкции МС только вблизи локальных экстремумов параметров (где $\Delta f_i \Delta f_{i\pm 1} < 0$), которые все TVD-реконструкции склонны "подрезать", понижая порядок аппроксимации. Реконструкция МС+ сохраняет второй порядок точности схемы даже вблизи локальных экстремумов.

В схеме ГКР второй порядок точности по времени достигается с помощью специального алгоритма типа *предиктор—корректор*, описание которого применительно к уравнениям Эйлера можно найти в статьях [6, 7]. В случае решения уравнений Навье—Стокса члены, описывающие вязкость и теплопроводность, аппроксимируются центральными разностями.

Результаты расчетов

Задача 1. Расчет течения невязкого газа в плоском канале с клином при $M = 2$. В этой тестовой задаче на входе в канал задается равномерный сверхзвуковой поток воздуха. В результате его взаимодействия с клином (начало клиновидного участка канала) формируется ударная волна, которая далее вниз по потоку многократно отражается от стенок канала, а также взаимодействует с веером разрежения, образующимся за клином (конец клиновидного участка канала).

На рис. 1, 2 представлены результаты расчета задачи по схеме ГКР с реконструкцией *minmod* на расчетной сетке с количеством ячеек $50 \times 380 = 19000$. На рис. 1 показано поле чисел Маха, на рис. 2 — распределение полного давления вдоль линии $y = 850$ (она показана пунктиром на рис. 1). Для сравнения на рис. 2 (см. также цветную вкладку) приводятся данные расчета задачи по коммерческому пакету программ FLUENT с использованием той же расчетной сетки. Из сравнения представленных данных видно, что все они хорошо согласуются между собой, причем использование схемы ГКР с реконструкцией *minmod* обеспечивает меньшие осцилляции параметров за фронтами ударных волн.

Задача 2. Расчет обтекания профиля НАСА0012 в рамках уравнений Эйлера. Эта задача использовалась в работе [11] для тестирования трех коммерческих CFD-кодов: FLO82, OVERFLOW и CFL3D. Тестирование было направлено на исследование сходимости рассчитанных аэродинамических характеристик профиля НАСА0012 с измельчением расчетной сетки. Поскольку в этой задаче обтекание профиля рассчитывается в рамках уравнений Эйлера, то сгущение сетки у

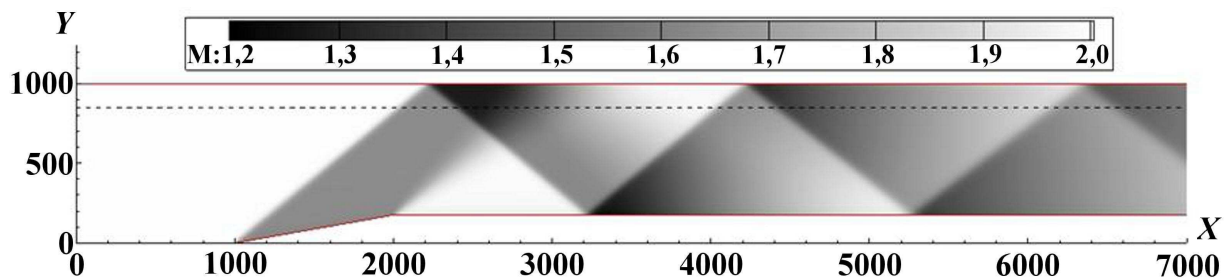


Рис. 1. Задача 1. Поле чисел Маха, рассчитанное по схеме ГКР с реконструкцией *minmod*

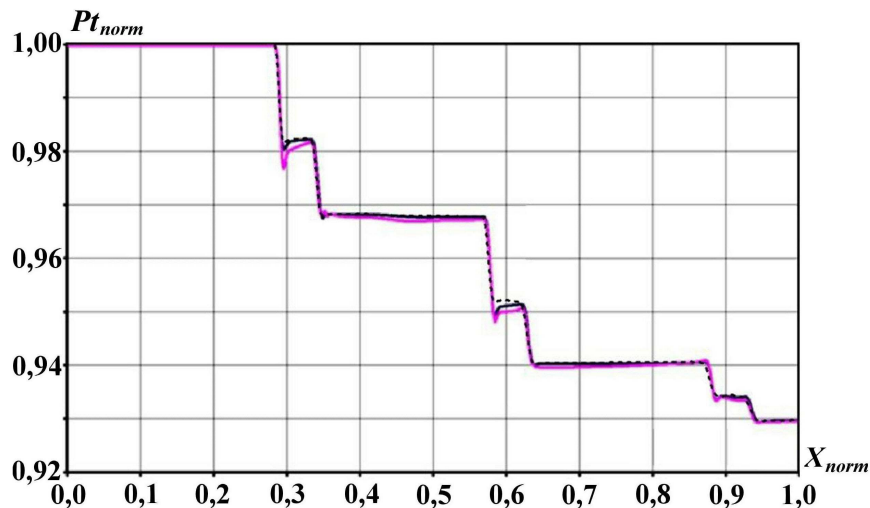


Рис. 2. Задача 1. Распределения полного давления вдоль линии $y = 850$: — по пакету FLUENT, схема Roe; — по пакету FLUENT, схема AUSM; - - - по схеме ГKP с реконструкцией minmod

профиля для разрешения пограничного слоя не требуется. В настоящей работе использовался тот же набор расчетных сеток O -типа, что и в [11].

На рис. 3 показаны фрагменты расчетных сеток с различным сеточным разрешением $N \times N$: 128×128 , 256×256 , 512×512 и 1024×1024 (расчетная область простирается от поверхности профиля до внешней границы — окружности радиусом $R \approx 150l$, где l — длина хорды профиля). Расчеты проводились для двух тестовых случаев, определяемых значениями параметров набегающего потока — числа Маха M и угла атаки α .

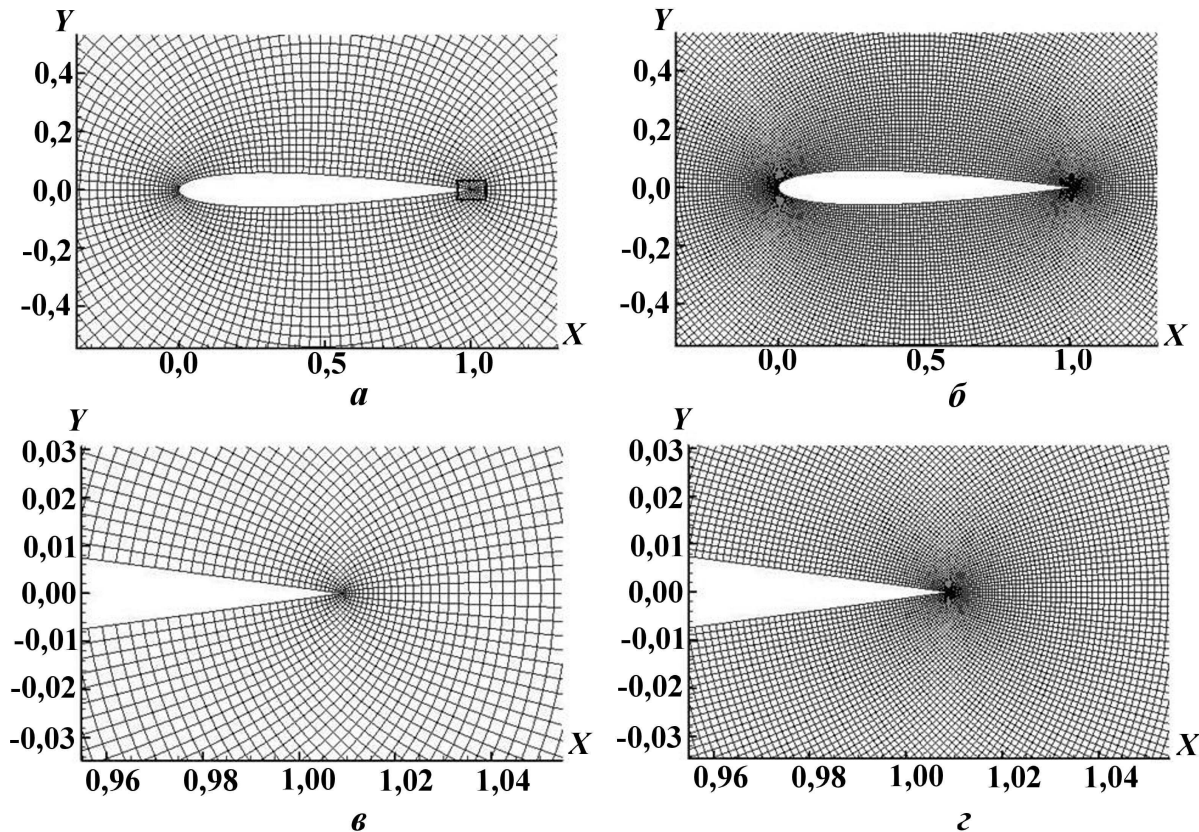


Рис. 3. Расчетные сетки для задачи 2: a — 128×128 ; b — 256×256 ; v — 512×512 ; z — 1024×1024

Тест 1: $M = 0,5$; $\alpha = 1,25^\circ$. На рис. 4 представлены результаты расчета задачи (в виде изолиний числа Маха), полученные по схеме ГКР с реконструкцией МС на сетке 1024×1024 . Видно, что в этом тесте реализуется полностью дозвуковое обтекание профиля без образования ударных волн. На рис. 5 показана сходимость различных методик по аэродинамическим коэффициентам C_x и C_y (соответственно коэффициент лобового сопротивления и коэффициент подъемной силы) при измельчении сетки. Представлены результаты расчетов по схеме ГКР с реконструкциями двух видов — minmod и МС, а также по CFD-кодам — OVERFLOW, CFL3D (данные по этим двум кодам взяты из работы [11]) и FLUENT. Расчеты по коду FLUENT проводились только на одной сетке 512×512 , но в двух вариантах — по явному и неявному методам.

Анализируя данные, представленные на рис. 5, можно заметить следующее:

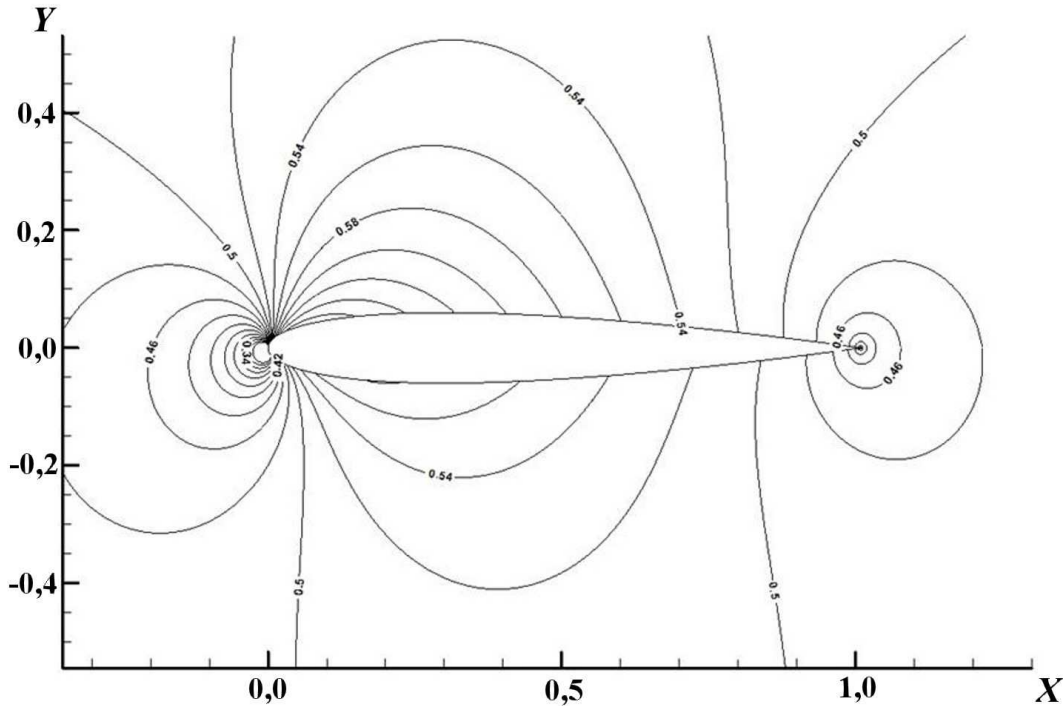


Рис. 4. Задача 2, тест 1. Изолинии числа Маха, полученные по схеме ГКР с реконструкцией МС на сетке 1024×1024

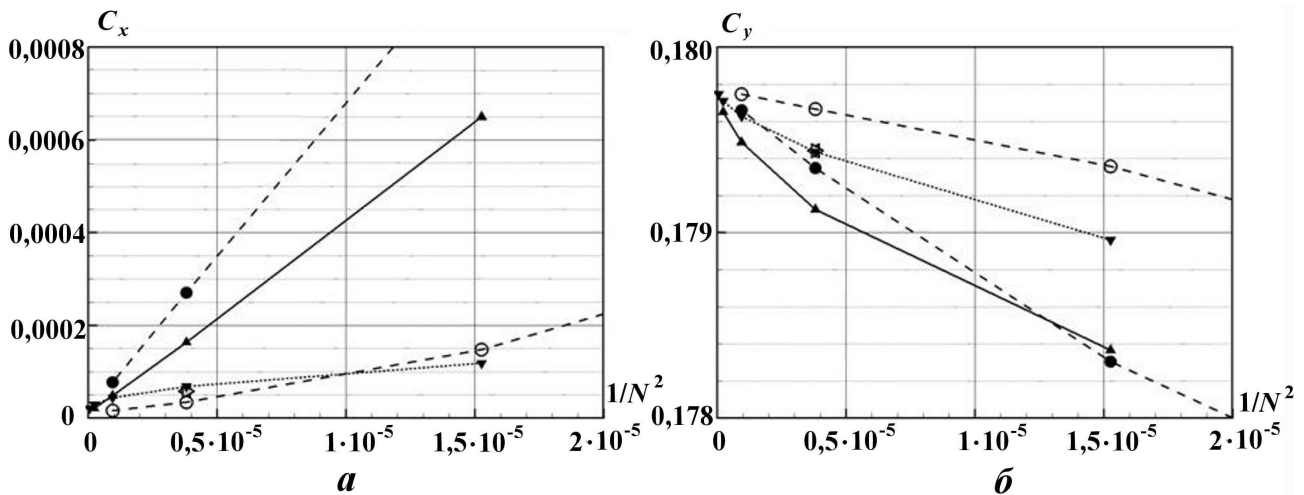


Рис. 5. Задача 2, тест 1. Сходимость методик по коэффициентам лобового сопротивления (а) и подъемной силы (б) с измельчением сетки: \blacktriangleleft — FLUENT, неявный метод; \blacktriangleright — FLUENT, явный метод; $\dots\blacktriangledown\dots$ — OVERFLOW; $-\blacktriangleleft-$ — CFL3D; $--\bullet--$ — ГКР с реконструкцией minmod; $--\ominus--$ — ГКР с реконструкцией МС

1. Все методики демонстрируют *сеточную* сходимость к одним и тем же значениям аэродинамических коэффициентов.
2. Схема ГКР обеспечивает сходимость с порядком, близким ко второму (коэффициенты C_x и C_y почти линейно зависят от $1/N^2$), а коды OVERFLOW и CFL3D демонстрируют более медленную сходимость по коэффициенту C_y .
3. Использование реконструкции МС вместо minmod в схеме ГКР дает существенное уточнение по интегральным аэродинамическим коэффициентам (более чем в 2 раза).
4. Как явный, так и неявный метод пакета FLUENT обеспечивает примерно такую же точность, что и код OVERFLOW.

Тест 2: $M = 0,8$; $\alpha = 1,25^\circ$. Аналогично тесту 1 на рис. 6 представлены результаты расчета задачи, полученные по схеме ГКР с реконструкцией МС на сетке 1024×1024 . Видно, что в этом случае обтекание профиля происходит с образованием двух ударных волн: большей интенсивности на подветренной стороне профиля и малой интенсивности на его наветренной стороне. В потоке за ударной волной большой интенсивности заметна небольшая "рябь", характерная для всех методов сквозного счета (следствие *размывания* ударной волны на небольшом количестве расчетных ячеек).

На рис. 7 показана сеточная сходимость методик по аэродинамическим коэффициентам C_x и C_y (представлены те же методики, что и для теста 1). Анализируя эти данные, отметим следующее:

1. Схема ГКР обеспечивает сеточную сходимость с порядком, близким к первому (на рис. 7, а, б коэффициенты представлены как функции от $1/N$). По коэффициенту C_y на крупной расчетной сетке реконструкция minmod дает более точные результаты, чем реконструкция МС, однако с измельчением сетки ситуация меняется на противоположную. По коэффициенту C_x реконструкция МС всегда предпочтительнее реконструкции minmod. Такую зависимость от реконструкции и степени измельчения сетки можно объяснить тем, что в данном случае присутствуют и ударные волны (где преимущество имеет реконструкция minmod), и области с сильными градиентами параметров без скачков (где преимущество за реконструкцией МС).

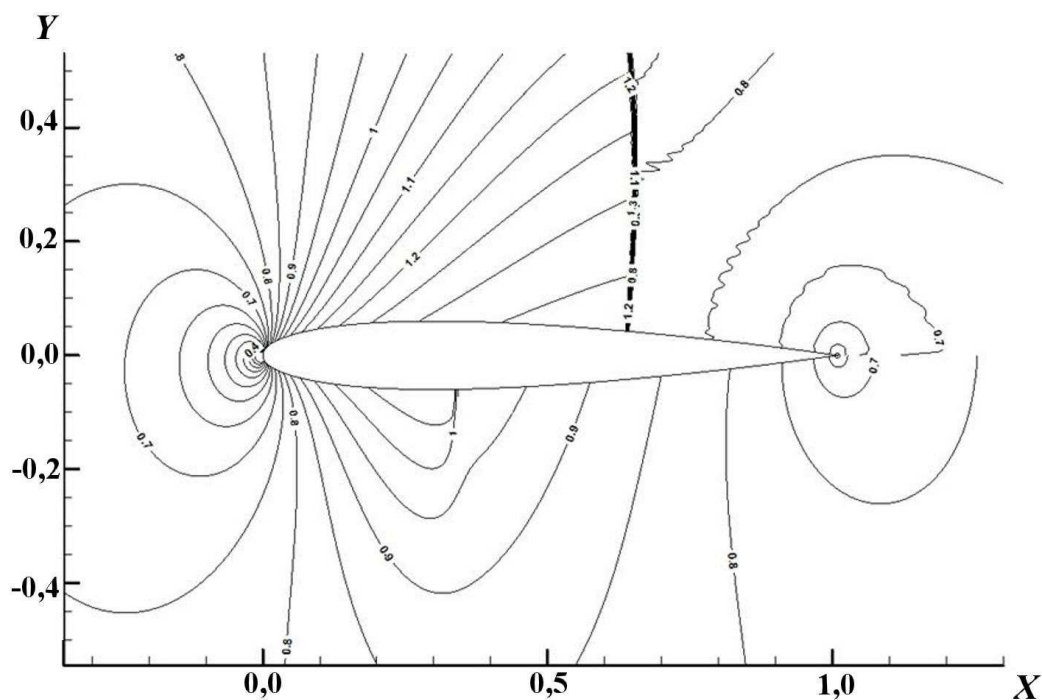


Рис. 6. Задача 2, тест 2. Изолинии числа Маха, полученные по схеме ГКР с реконструкцией МС на сетке 1024×1024

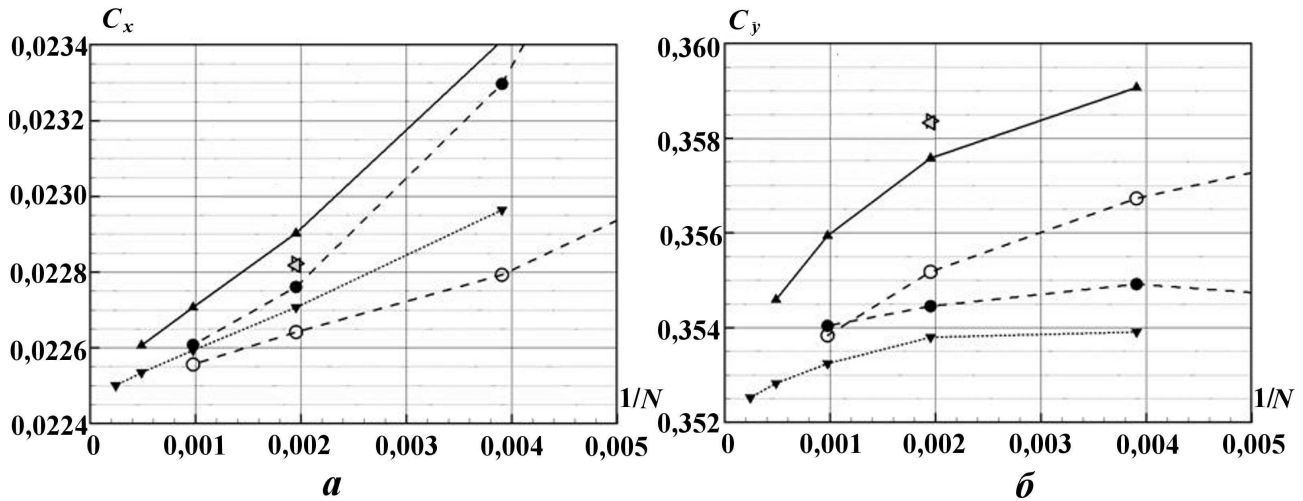


Рис. 7. Задача 2, тест 2. Сходимость методик по коэффициентам лобового сопротивления (а) и подъемной силы (б) с измельчением сетки: \triangleleft — FLUENT, неявный метод; \triangleright — FLUENT, явный метод; $\dots\blacktriangledown\dots$ — OVERFLOW; $-\blacktriangle-$ — CFL3D; $--\bullet--$ — ГKP с реконструкцией minmod; $--\circ--$ — ГKP с реконструкцией MC

Отсюда следует необходимость дальнейшего совершенствования методики с целью объединения положительных свойств реконструкций MC и minmod.

2. Результаты расчета по схеме ГKP (с любой реконструкцией) заметно превосходят по точности коммерческий код CFL3D. По сравнению с кодом OVERFLOW схема ГKP дает более точные значения коэффициента C_x , но немного менее точные значения коэффициента C_y . В целом можно сказать, что по точности схема ГKP и код OVERFLOW очень близки.
3. Пакет FLUENT обеспечивает заметно меньшую точность, чем схема ГKP и код OVERFLOW. По этому критерию он близок к коду CFL3D.

Задача 3. Расчет обтекания профиля НАСА0012 в рамках уравнений Навье—Стокса.

Эта задача отличается от предыдущей тем, что в ней вместо уравнений Эйлера решаются осредненные уравнения Навье—Стокса с привлечением модели турбулентности Спаларта—Аллмараса. При этом рассматриваются два тестовых случая, отличающихся друг от друга типом используемой расчетной сетки.

Тест 1: расчетная сетка O-типа. В данном случае расчетная сетка строилась с опорой на сетку O-типа из предыдущей задачи. При этом сеточные линии, идущие от поверхности профиля до внешней границы расчетной области, сохранялись, но распределение точек на этих линиях менялось. Первый (минимальный) сеточный интервал у поверхности профиля выбирался постоянным для всех сеточных линий. Далее при движении от поверхности профиля размер сеточного интервала увеличивался от точки к точке с постоянным коэффициентом $q > 1$. Для 256 сеточных линий, исходящих от поверхности профиля, размер первого сеточного интервала был $\Delta y = 3 \cdot 10^{-6}$ м (что при длине хорды 1 м примерно соответствует значению $y^+ = 1$), а $q = 1,03$. В этом случае общее количество интервалов вдоль сеточных линий, требуемое для достижения внешней границы расчетной области $R \approx 150$ м, составило 480, что дало общее количество ячеек $256 \times 480 = 122\,880$.

Расчет на построенной таким образом сетке проводился при следующих определяющих параметрах набегающего потока: число Маха $M = 0,7$; угол атаки $\alpha = 1,49^\circ$; давление $p_\infty = 46\,066$ Па; температура $T_\infty = 248$ К; кинематическая турбулентная вязкость $\nu_T = 2,455 \cdot 10^{-5}$ м²/с.

Результаты расчета задачи (в виде изолиний числа Маха), полученные по схеме ГKP с реконструкцией MC и по коммерческому пакету FLUENT, показаны на рис. 8. Более детальное сравнение этих двух расчетов по распределению скорости и кинематической турбулентной вязкости в сечении $x = 0,9$ м в верхней части профиля показано на рис. 9. Как можно видеть, данные двух расчетов очень хорошо согласуются между собой (визуально они слабо различимы).

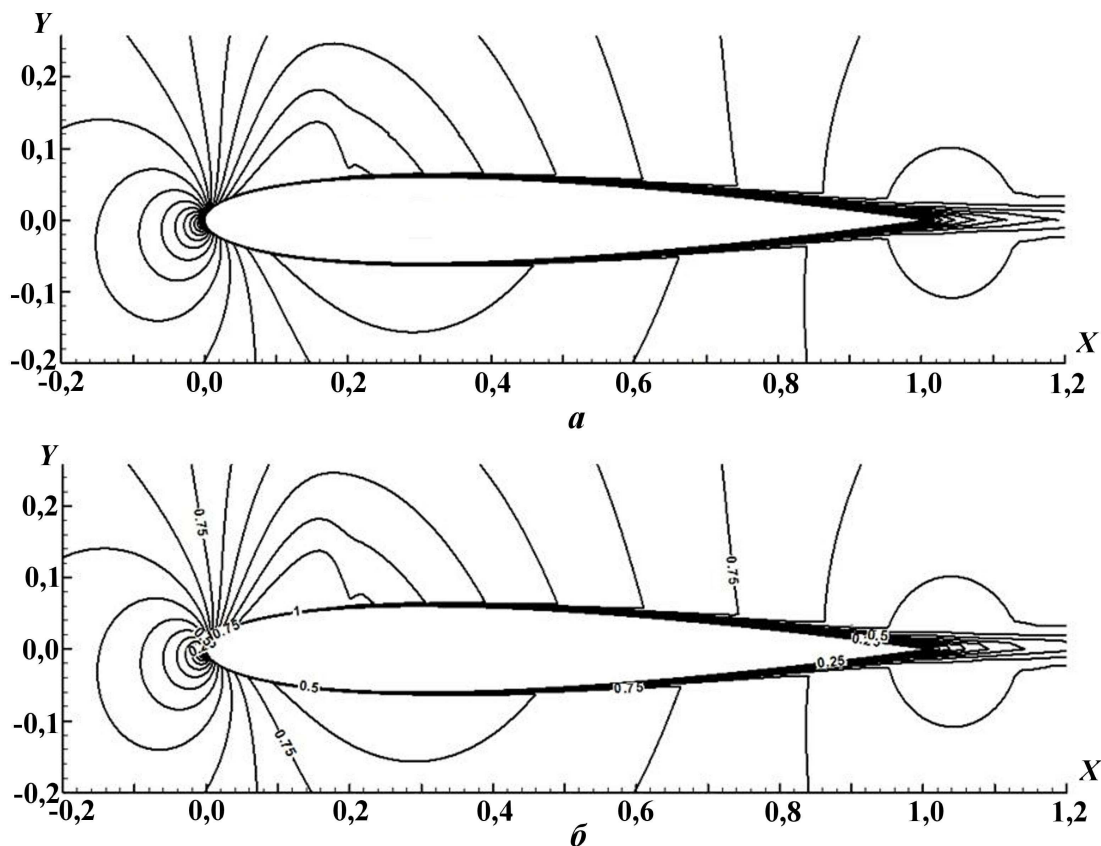


Рис. 8. Задача 3, тест 1. Изолинии числа Маха, полученные по схеме ГKP с реконструкцией MC (a) и по пакету FLUENT (б)

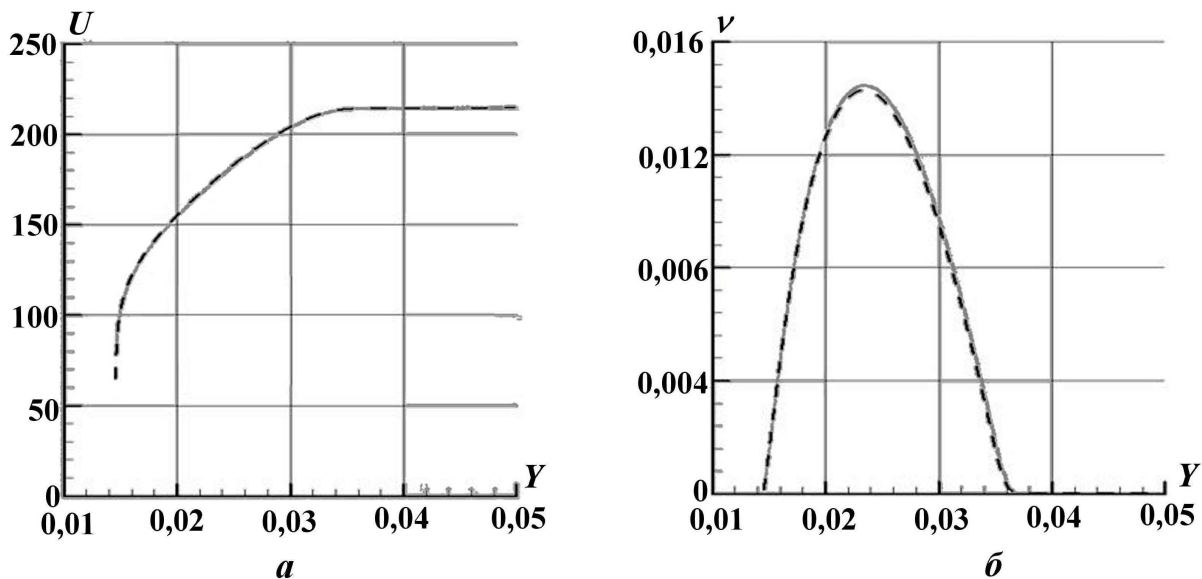


Рис. 9. Задача 3, тест 1. Распределение продольной составляющей скорости (a) и кинематической турбулентной вязкости (б) в сечении $x = 0,9$ м: — — ГKP с реконструкцией MC; - - - - FLUENT

В таблице приводится сравнение расчетного времени, требуемого для решения задачи на одном процессоре (данные относятся к процессору Intel(R) Core(TM)2 Quad CPU Q8300, 2,50 ГГц).

Как уже отмечалось, схема ГKP является явной: она требует примерно такого же количества расчетных шагов, что и явный метод в пакете FLUENT. Но общее время расчета, как и время расчета одного шага, для схемы ГKP в 2,5 раза меньше. Иначе обстоит дело при сравнении с

Сравнение расчетного времени, требуемого для решения задачи 3 на одном процессоре (тест 1)

Метод	Количество расчетных шагов	Общее время расчета, ч	Время расчета одного шага, с
FLUENT, неявный	~ 2 000	~ 0,75	~ 1,35
FLUENT, явный	~ 400 000	~ 100	~ 0,90
Схема ГКР, явный	~ 400 000	~ 40	~ 0,35

неявным методом пакета FLUENT. Хотя время расчета одного шага у него еще больше, но за счет существенно меньшего количества расчетных шагов общее время решения задачи мало.

Это обычная ситуация при решении стационарных задач методом установления. По времени счета явные методы не могут соперничать с неявными, если последние позволяют вести счет с числами Куранта порядка сотен и выше. Однако явные методы обычно легче распараллеливаются.

На рис. 10 показана зависимость эффективности распараллеливания от количества используемых процессоров для схемы ГКР. Видно, что даже при использовании 960 процессоров эффективность распараллеливания выше 40 %.

Тест 2: многоблочная расчетная сетка C-типа. В этом случае задача рассчитывается на многоблочной сетке, показанной на рис. 11 (см. также цветную вкладку). Обтекание профиля NASA рассчитывалось при фиксированном числе Маха набегающего потока $M = 0,7$; угол атаки варьировался в пределах $\alpha = 0 \div 4,8^\circ$.

На рис. 12 показана зависимость коэффициента C_y от C_x при изменении угла атаки; здесь результаты расчетов по схеме ГКР и пакету FLUENT сравниваются между собой и с экспериментальными данными. Можно видеть, что расчеты по пакету FLUENT и схеме ГКР дают очень близкие результаты. Некоторое отличие расчетных и экспериментальных данных, по-видимому, связано с погрешностью эксперимента и/или неточностью описания турбулентности в рамках осредненных уравнений Навье—Стокса с моделью турбулентности Спаларта—Аллмараса.

Более детальное сравнение расчетов с экспериментом демонстрирует рис. 13, где приведено распределение коэффициента давления C_p по поверхности профиля для угла атаки $\alpha = 1,49^\circ$. Видно, что результаты расчетов по схеме ГКР и пакету FLUENT очень хорошо согласуются между собой (визуально слабо различимы), хотя и наблюдается их некоторое расхождение с экспериментом.

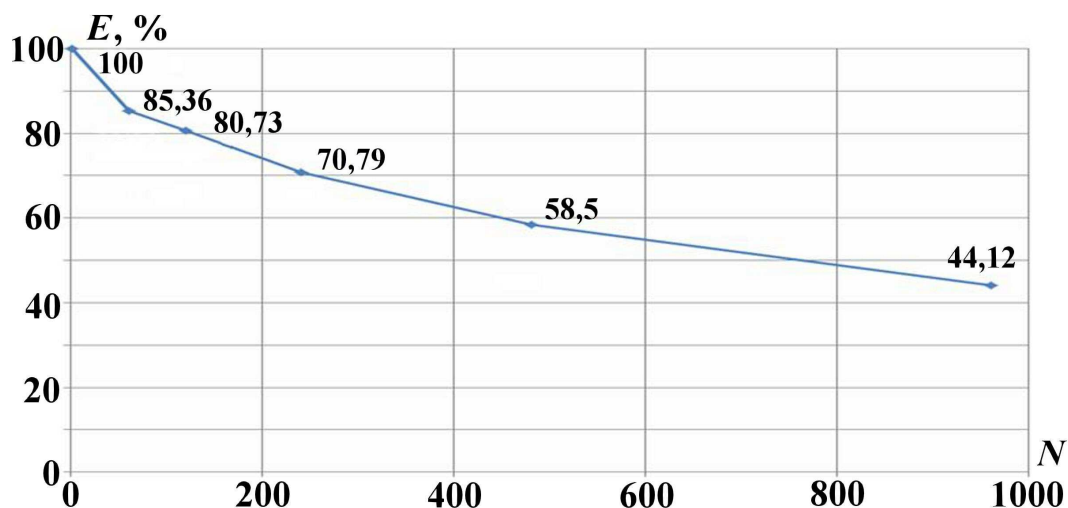


Рис. 10. Задача 3, тест 1. Зависимость эффективности распараллеливания E от количества используемых процессоров N для схемы ГКР

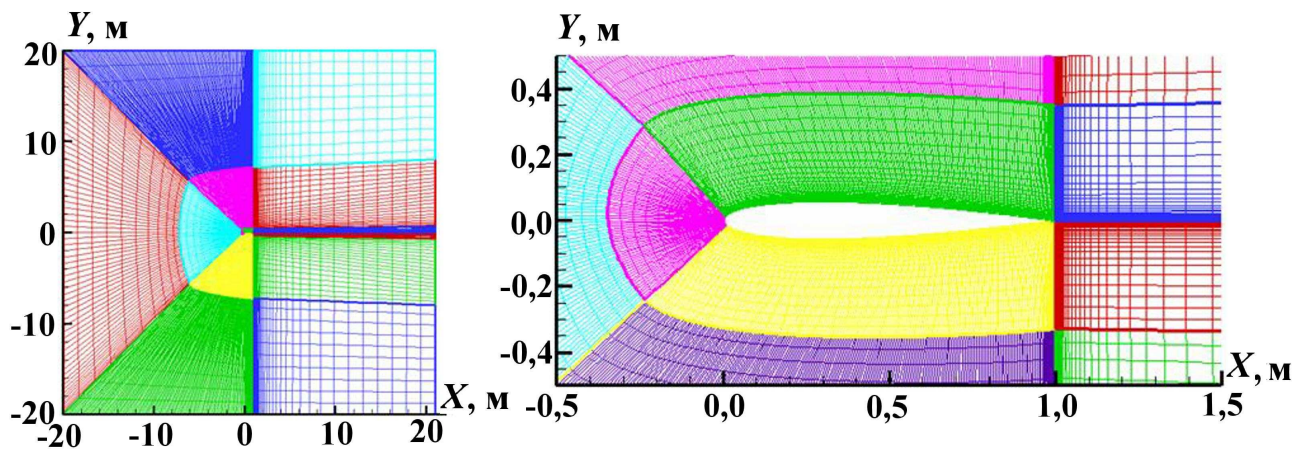


Рис. 11. Многоблочная расчетная сетка C -типа для задачи 3 (тест 2)

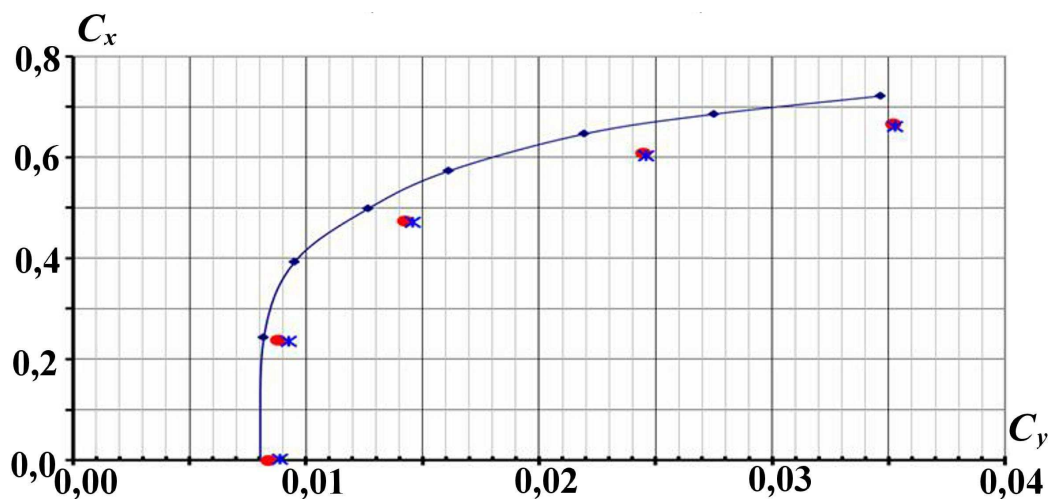


Рис. 12. Задача 3, тест 2. Зависимость коэффициента подъемной силы от коэффициента лобового сопротивления при варьировании угла атаки $\alpha = 0 \div 4,8^\circ$: \blacklozenge — эксперимент; \bullet — FLUENT; \times — схема ГКР



Рис. 13. Задача 3, тест 2. Распределение коэффициента давления C_p по верхней и нижней поверхностям профиля, $\alpha = 1,49^\circ$: \blacklozenge — эксперимент; — — FLUENT; \times — схема ГКР

Задача 4. Определение аэродинамических характеристик плоской сверхзвуковой решетки компрессора. Аэродинамические характеристики плоской решетки изолированных компрессорных профилей рассчитываются при различных значениях противодавления на выходе. Расчет ведется с использованием осредненных уравнений Навье—Стокса с моделью турбулентности Спаларта—Аллмараса. Расчетная сетка показана на рис. 14, она представляет собой сетку *H*-типа размером $141 \times 49 = 6\,909$ узлов.

В качестве граничного условия на входе в рассчитываемую область задается изоэнтропический поток, определяемый числом Маха M_1 , полным давлением $P^* = 150\,000$ Па, полной температурой $T^* = 300$ К и начальным значением кинематической турбулентной вязкости $\nu_T = 2,131 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$. Число Маха M_1 является осредненным по входному сечению; оно подбирается в процессе расчета задачи методом установления по времени из условия поддержания заданного статического давления P_2 на выходе из расчетной области. На поверхности профиля задается условие *стенки с прилипанием*. Ввиду наличия периодичности в расположении лопаток на боковых поверхностях области использовалось циклическое граничное условие.

Расчеты проводились в параллельном режиме на 12 ядрах суперЭВМ, время проведения одного расчета 11 минут. Также была сделана оценка времени счета на одном ядре: оно составило 95 минут. Завершение расчета происходило после установления сил, действующих на профиль. Также отслеживался дисбаланс расхода газа на входе и выходе, который на момент завершения задачи не превышал 0,1 %.

Для оценки результатов моделирования использовались степень повышения давления π и коэффициент потерь в решетке ζ , рассчитываемые по формулам

$$\pi(M_1) = \frac{P_2}{P_1}; \quad \zeta(M_1) = \frac{P_1^* - P_2^*}{P_1^* - P_1}.$$

Здесь "звездочка" в верхнем индексе обозначает полное давление, статическое давление обозначается без верхнего индекса. Нижний индекс 1 обозначает величины на входе, нижний индекс 2 — на выходе. Для вычисления π и ζ используются величины, усредненные по входному и выходному сечениям.

На рис. 15 (см. также цветную вкладку) показаны зависимости степени повышения давления и коэффициента потерь от числа Маха на входе. Сравниваются данные, полученные по схеме ГКР с реконструкцией МС, с данными, полученными по коммерческому пакету (КП) в двух вариантах — с *kε*-моделью турбулентности и моделью турбулентности SST. Из имеющихся данных можно заключить, что результаты по схеме ГКР с моделью турбулентности Спаларта—Аллмараса хорошо

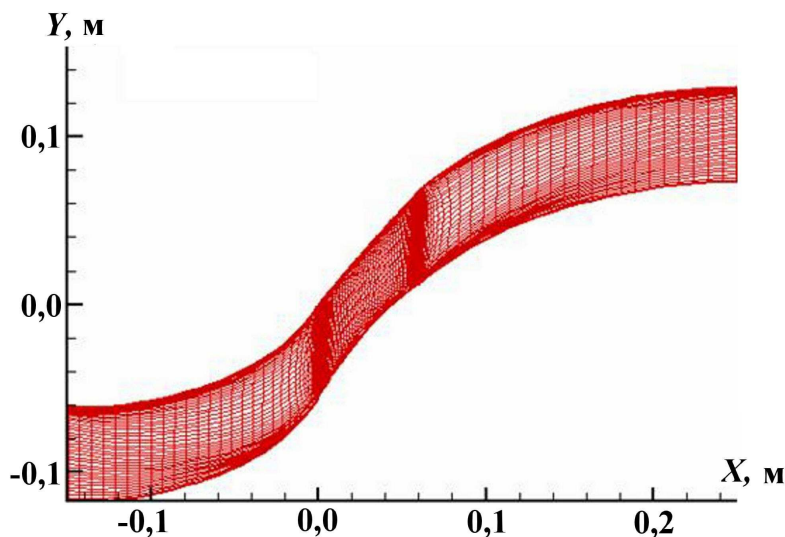


Рис. 14. Расчетная сетка в задаче 4

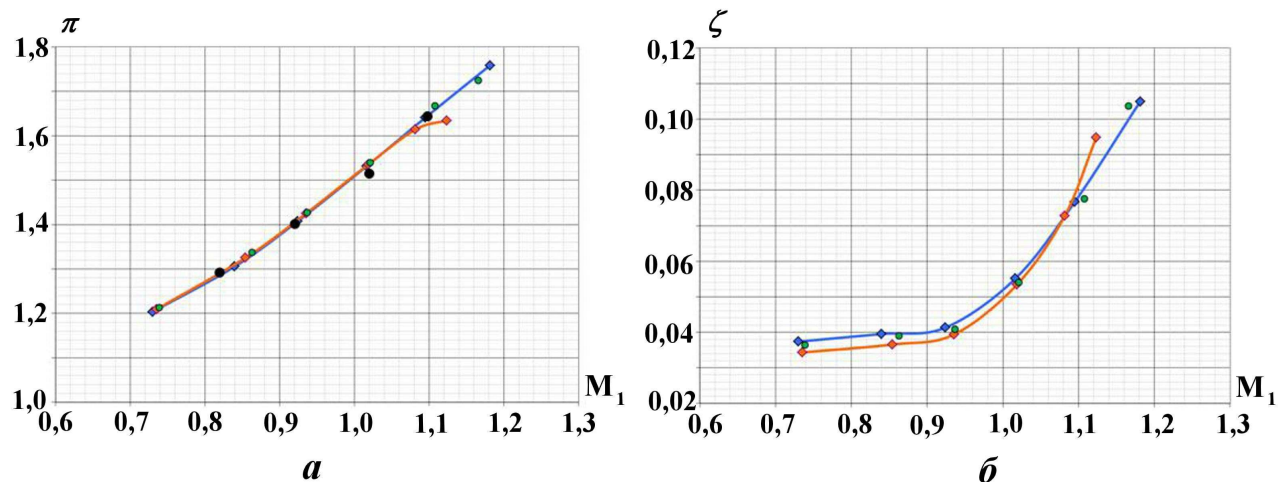


Рис. 15. Задача 4. Зависимости степени повышения давления (а) и коэффициента потерь (б) от числа Маха на входе: • — эксперимент; —◆— КП с $k\epsilon$ -моделью турбулентности; —◆— КП с моделью турбулентности SST; • — схема ГКР

согласуются с результатами КП с $k\epsilon$ -моделью турбулентности. При числах Маха на входе, больших 1,1, кривая имеет слабую тенденцию к искривлению, как это имеет место в расчете КП с моделью турбулентности SST. В целом представленные результаты хорошо согласуются друг с другом.

Задача 5. Расчет обтекания цилиндра невязкой жидкостью. Цилиндр радиусом $R = 1$ обтекается невязким, глубоко дозвуковым потоком воздуха; в этом случае в окрестности цилиндра реализуется безотрывное и безударное течение. Ввиду симметрии задачи течение моделируется только в одной полуплоскости: $Y > 0$. Расчетная область от поверхности цилиндра до радиуса $R = 100$ разбивается на 21600 ячеек: 160 интервалов по углу и 135 интервалов по радиусу (у поверхности цилиндра $\Delta R = 0,02$).

На внешней границе расчетной области задается равномерный поток воздуха с заданным числом Маха M_∞ . Условие втекания или вытекания потока по отношению к расчетной области учитывается в каждой точке границы автоматически из решения задачи Римана. На внутренней границе (поверхность цилиндра) ставится условие *непротекания без прилипания*, а на оси X (две оставшиеся границы) — условие симметрии течения.

На рис. 16 приведены результаты расчета задачи по схеме ГКР с реконструкцией МС. Сравниваются распределения коэффициента давления C_p по поверхности цилиндра для трех значений M_∞ (угол φ , определяющий точку на цилиндре, отсчитывается от направления $-X$). Как можно видеть, при уменьшении числа Маха после $M_\infty = 0,1$ распределение коэффициента давления по цилиндру почти перестает меняться, т. е. становится независимым от M_∞ . При этом расчетные данные практически совпадают с аналитическим решением задачи для случая $M_\infty \ll 1$ (несжимаемое обтекание). Это свидетельствует о том, что, начиная с $M_\infty = 0,1$ (в сторону уменьшения), течение можно считать несжимаемым. Время расчета задачи по схеме ГКР (ориентированной на моделирование сжимаемых течений) возрастает примерно в 1,5 раза при уменьшении M_∞ с 0,3 до 0,1, тогда как при уменьшении M_∞ с 0,1 до 0,03 происходит возрастание времени расчета уже в 3,5 раза. Отсюда можно заключить, что при использовании схемы ГКР для моделирования несжимаемых течений целесообразно выбирать $M_\infty \approx 0,1$.

Задача 6. Расчет обтекания цилиндра вязкой жидкостью (вихревая дорожка Кармана). Расчет вихревой дорожки Кармана является хорошей задачей для тестирования CFD-кодов и используемых в них методов на адекватность моделирования ими нестационарных течений. Это двумерная задача, в которой моделируется обтекание цилиндра вязким газом в ламинарном режи-

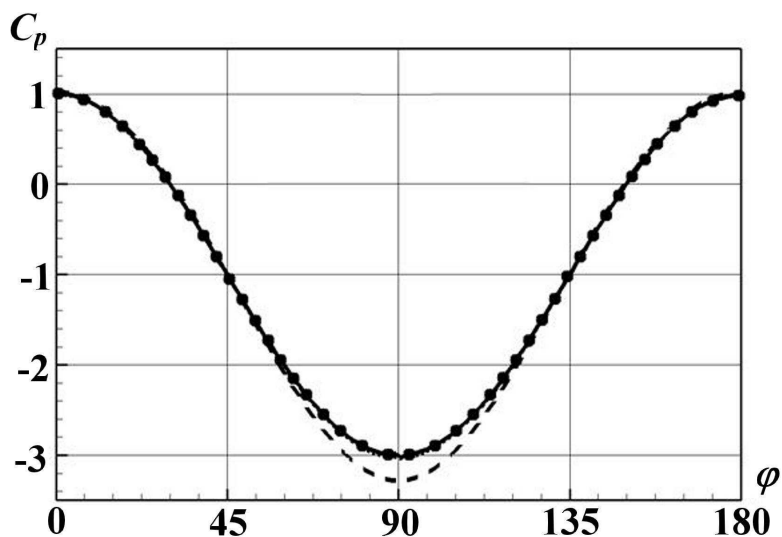


Рис. 16. Задача 5. Распределение C_p по поверхности цилиндра: • — $M_\infty = 0,03$; — $M_\infty = 0,1$; ---- — $M_\infty = 0,3$; — — — — аналитическое решение

ме. Являясь нестационарным, течение здесь строго периодически, что очень удобно для анализа и сравнения методик. Кроме того, задача эта хорошо изучена — и теоретически, и экспериментально.

В данной работе сравниваются результаты расчетов вихревой дорожки Кармана по схеме ГКР с данными, опубликованными в 2003 г. в работе [12], в которой тестировался CFD-код PAV3D в процессе его долгосрочного развития в NASA Langley Research Center для нужд промышленности и правительства США. Заметим, что код PAV3D использует неявный конечно-объемный метод расчета на структурированных многоблочных сетках с распараллеливанием вычислений.

На рис. 17 (см. также цветную вкладку) показана многоблочная расчетная сетка, используемая в работе [12] для расчета вихревой дорожки Кармана. Кроме общего и фрагментарного изображений сетки, в этой работе приводится общее количество ее ячеек — 34832. В результате подробного анализа имеющихся данных удалось с хорошей точностью восстановить эту сетку — с соблюдением

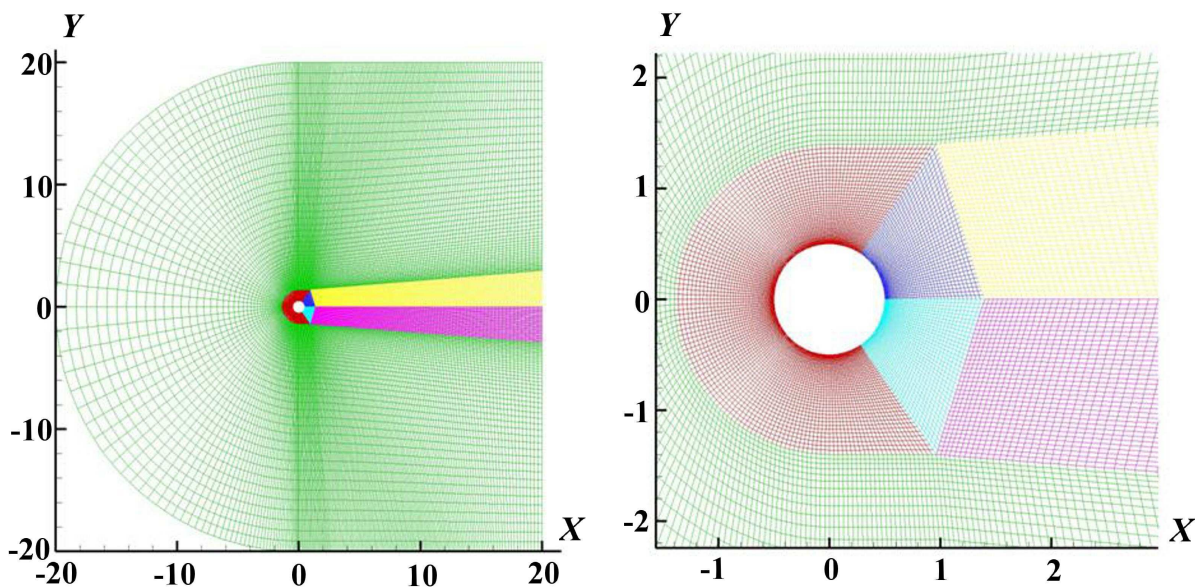


Рис. 17. Сетка, используемая для расчета задачи 6 (справа — увеличенный фрагмент)

всех видимых размеров и с точно таким же количеством ячеек. Кроме сетки, показанной на рис. 17 (нормальная сетка), в расчетах использовались две другие сетки — со вдвое меньшим (грубая сетка) и вдвое большим (подробная сетка) количеством интервалов по каждому из направлений в каждом расчетном блоке.

На внешней границе расчетной области, как и в работе [12], ставилось условие невозмущенного потока с числом Маха $M = 0,3$. Поверхность цилиндра считалась теплоизолированной; на ней ставилось условие *непротекания с прилипанием* (скорость газа равна нулю). В качестве набегающего потока моделировался воздух со следующими параметрами невозмущенного потока: давление $p_\infty = 11\,368$ Па; температура $T_\infty = 270$ К (скорость звука $a_\infty = 330$ м/с, скорость потока $U_\infty = 99$ м/с); молекулярная вязкость $\mu_T = 1,7 \cdot 10^{-5}$ Па·с. Для обеспечения требуемых значений числа Рейнольдса ($Re = 100$, $Re = 200$ и $Re = 1000$) диаметр цилиндра брался соответственно $D = 1,175 \cdot 10^{-4}$ м, $D = 2,35 \cdot 10^{-4}$ м и $D = 1,175 \cdot 10^{-3}$ м.

Прежде чем перейти к рассмотрению результатов расчета, полученных по коду PAV3D и по схеме ГКР, остановимся подробнее на особенностях этих методик применительно к рассматриваемой задаче.

Код PAV3D. Этот код использует неявную схему второго порядка точности (как по пространству, так и по времени) в двух вариантах: с двойным шагом по времени (*dual time stepping*) и с единым шагом по времени (*physical time stepping*). Как отмечается в работе [12], первый вариант позволяет использовать большие шаги по времени; он ориентирован преимущественно на задачи на установление (рассматриваемая здесь задача таковой не является).

Данные о временных шагах при расчетах задачи в работе [12] не приводятся, однако можно предположить, что значения числа Куранта в ячейках вблизи поверхности цилиндра были существенно больше единицы, тогда как в вихревой дорожке Кармана они могли примерно равняться единице или даже быть меньше ее. Заметим, что поскольку в данной задаче необходимо использовать единый шаг интегрирования по времени, то значения числа Куранта в ячейках вблизи поверхности цилиндра и в ячейках около выхода вихрей из расчетной области будут различаться примерно в 50 раз.

Теперь о способе выхода на нестационарное периодическое решение. В коде PAV3D начальное поле и граничные условия являются симметричными относительно оси X . Несимметричность образуется спонтанно в процессе расчета из-за "ошибок округления". Для ускорения этого процесса расчет сначала ведется на грубой сетке, а затем продолжается на нормальной сетке. В результате асимметрия в решении при использовании кода PAV3D начинает появляться к моменту времени $t \approx 40T_{\text{хар}}$ ($T_{\text{хар}} \equiv D/U_\infty$), а при достижении $t \approx 160T_{\text{хар}}$ осуществляется переход расчета с грубой сетки на нормальную.

Схема ГКР. Расчет вихревой дорожки Кармана по схеме ГКР во всех вариантах проводился с использованием реконструкции MC+. Выбор этой реконструкции обусловлен тем, что в данной задаче в расчетной области имеется большое количество локальных экстремумов различных параметров (где MC+ имеет преимущество перед другими реконструкциями), а ударные волны отсутствуют.

В расчетах задачи с использованием схемы ГКР в качестве начального задается симметричное поле параметров — невозмущенный набегающий поток во всех расчетных ячейках. Для ускорения выхода на нестационарное периодическое решение используется следующий простой прием. В начале расчета только на верхней части цилиндра тип граничного условия меняется на *непротекание со скольжением*. По достижении времени $t = T_{\text{хар}}$ происходит возврат к условию *непротекания с прилипанием*. В результате решение несимметрично уже с самого начала, а строгая периодичность течения наступает уже к моменту времени $t \approx 16T_{\text{хар}}$. Все расчеты по схеме ГКР проводились до достижения времени $t = 100T_{\text{хар}}$. При этом максимальное число Куранта вблизи поверхности цилиндра было 0,95, следовательно, в области вихревой дорожки оно было менее 0,1.

Рассмотрим подробно результаты расчетов по обеим методикам.

На рис. 18 представлены поля завихренности (в 1/с), полученные по схеме ГКР на подробной сетке для $Re = 100$, $Re = 200$ и $Re = 1000$. Представленные поля наглядно демонстрируют вихревую структуру дорожки Кармана и ее качественное изменение с ростом числа Рейнольдса.

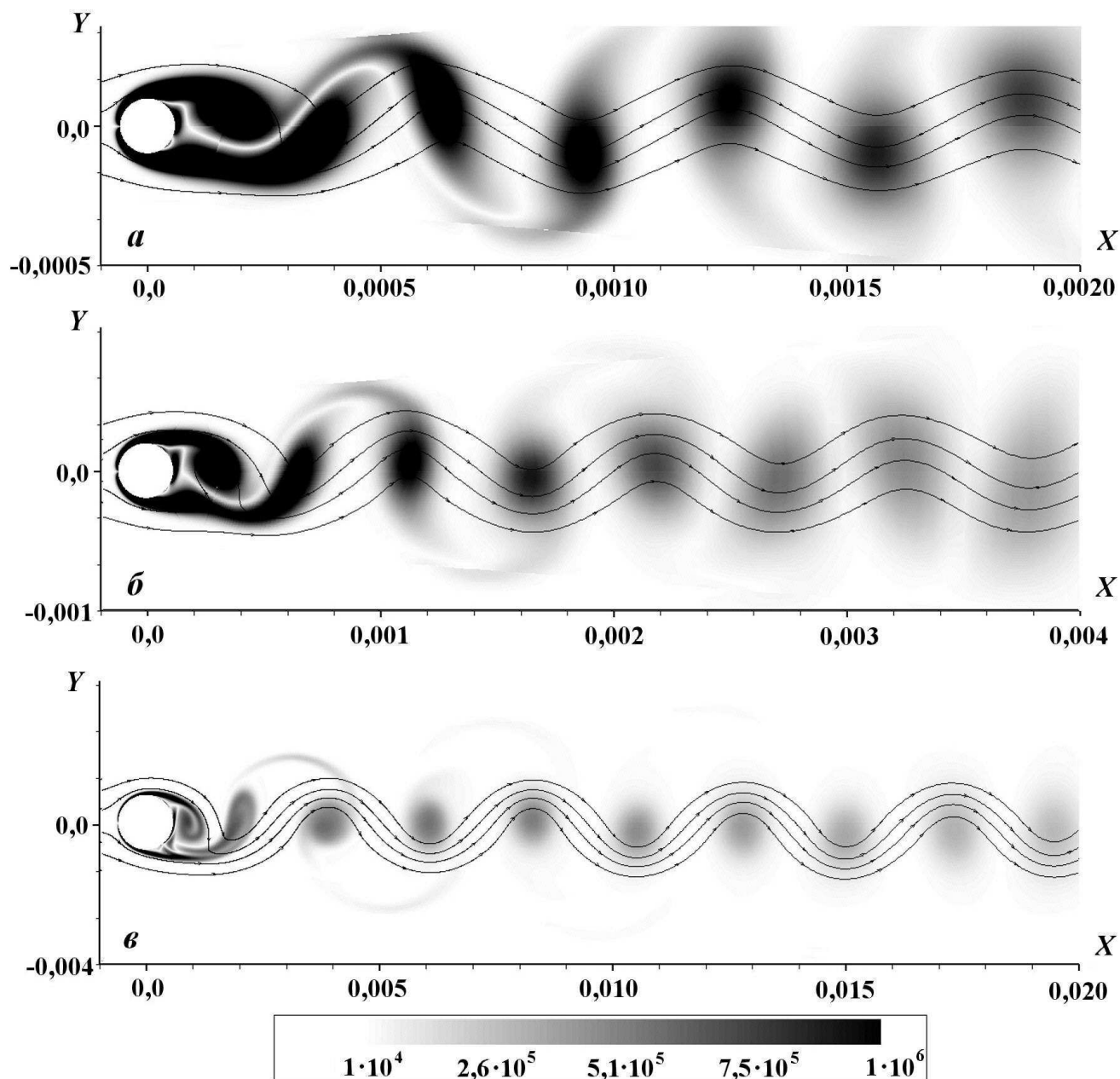


Рис. 18. Задача 6. Поля завихренности при $Re = 100$ (*a*), $Re = 200$ (*б*) и $Re = 1\,000$ (*в*), полученные по схеме ГКР на подробной сетке

На рис. 19 показана сходимость с измельчением сетки (здесь N — количество интервалов по одному из направлений сетки) по числу Струхала и по амплитуде коэффициента C_y . Как можно видеть, схема ГКР обеспечивает очень хорошую сходимость по сетке для обеих величин, которые определяются главным образом параметрами течения вблизи цилиндра. Это свидетельствует о том, что сеточное разрешение у поверхности цилиндра достаточно. Код PAV3D показывает существенно худшую сходимость. Особенно плохими оказываются результаты для метода с двойным шагом по времени, который использует большие шаги по времени и ориентирован на расчет задач на установление.

Рассмотрим теперь рис. 20, на котором приведены расчетные и экспериментальные данные по зависимости числа Струхала от числа Рейнольдса (для экспериментальных данных приведен разброс).

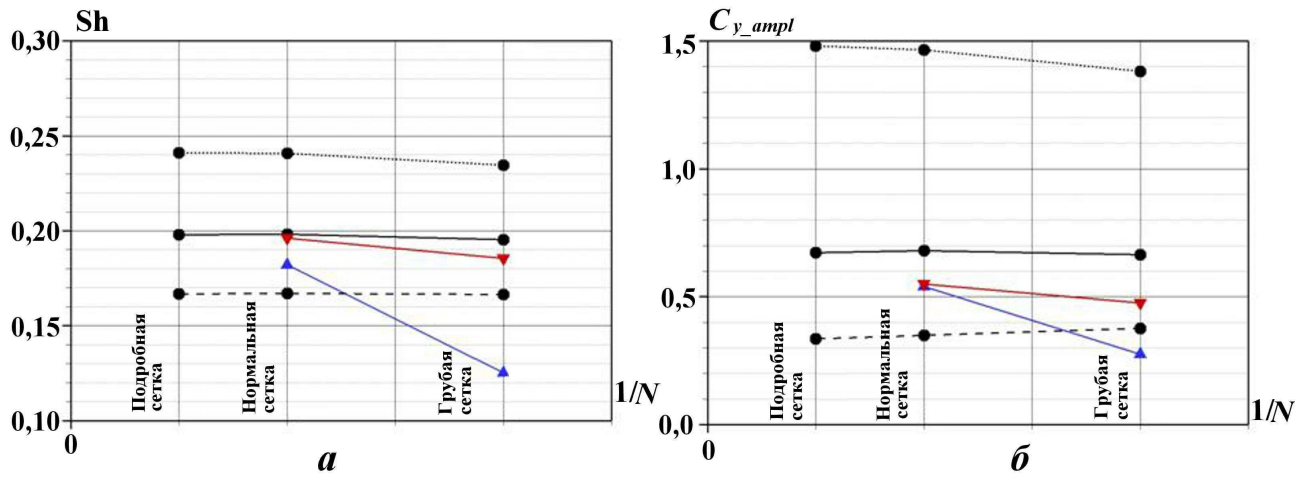


Рис. 19. Задача 6. Сходимость с измельчением сетки по числу Струхалы (*a*) и по амплитуде коэффициента C_y (*b*): —▲— — PAV3D с двойным шагом по времени, $Re = 200$; —▼— — PAV3D с единым шагом по времени, $Re = 200$; —●— — ГKP с MC+, $Re = 200$; - - ● - - ГKP с MC+, $Re = 100$; · · · · — ГKP с MC+, $Re = 1\ 000$

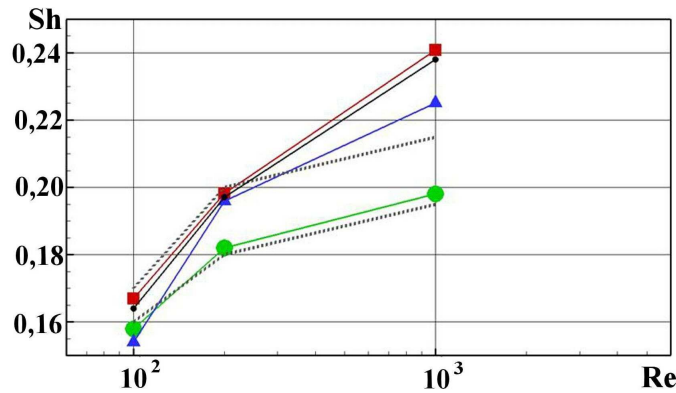


Рис. 20. Задача 6. Зависимость числа Струхалы от числа Рейнольдса: —■— — метод ГKP; —●— — PAV3D с двойным шагом по времени; —▲— — PAV3D с единым шагом по времени; · · · · — экспериментальные данные (верхняя и нижняя границы); —●— — расчет Хендерсона (1995)

Сравнение результатов показывает, что схема ГKP дает значения числа Струхалы, попадающие в диапазон разброса экспериментальных данных для $Re = 100$ и $Re = 200$. С увеличением числа Рейнольдса согласие с экспериментальными данными нарушается. Но так и должно быть, поскольку известно, что при $Re > 200$ вихревая дорожка становится трехмерной, а представленные расчеты проводились в двумерном приближении. Это обстоятельство подтверждается расчетными данными Хендерсона, также показанными на рис. 20. Они были получены также в двумерном приближении с использованием явного метода высокого порядка точности, и данные настоящей работы с ними очень хорошо согласуются во всем рассматриваемом диапазоне чисел Рейнольдса. Что касается данных, полученных по двум вариантам кода PAV3D, то они заметно расходятся как между собой, так и с данными Хендерсона. Их лучшее согласие с экспериментальными данными при $Re = 1\ 000$ вызвано, очевидно, простым совпадением — здесь грубость метода "работает" в нужном направлении, компенсируя неучтенный эффект трехмерности течения.

Заклyчение

В рамках пакета программ ЛОГОС реализован модуль расчета двумерных аэродинамических течений на основе явной схемы Годунова—Колгана—Родионова (второй порядок аппроксимации по

времени и пространству). Выполнено распараллеливание программного модуля с использованием модели смешанной памяти (стандарт MPI/OpenMP) с автоматической геометрической декомпозицией данных по процессорам.

Проведено тестирование программного модуля на различных задачах, стационарных и нестационарных, решаемых в рамках как уравнений Эйлера (невязкие течения), так и уравнений Навье—Стокса (вязкие ламинарные или турбулентные течения). Проведено сравнение полученных результатов с имеющимися экспериментальными данными, аналитическими решениями или данными, полученными по другим CFD-кодам.

Во всех тестовых задачах получены хорошие результаты. По точности расчета схема ГКР в целом не уступает, а иногда и превосходит методики, используемые в известных CFD-кодах. Поскольку схема ГКР является явной схемой, по времени счета стационарных задач методом установления она не может соперничать с такими неявными методами, которые позволяют вести счет с числами Куранта порядка сотен и выше. Однако по этому показателю она превосходит явный метод, который используется в пакете FLUENT. Кроме того, схема ГКР распараллеливается с высокой эффективностью.

Следует особо отметить, что схема ГКР наиболее убедительно демонстрирует свои преимущества в нестационарных задачах, когда требуется хорошая точность аппроксимации производных и по пространству, и по времени; в этом случае расчеты с большими числами Куранта становятся неоправданно грубыми. Так, при расчете дорожки Кармана явная схема ГКР обеспечивает заметно большую точность, чем неявная схема CFD-кода PAV3D, разрабатываемого в NASA Langley Research Center.

Список литературы

1. Козелков А. С., Дерюгин Ю. Н., Зеленский Д. К. и др. Многофункциональный пакет программ ЛОГОС для расчета задач гидродинамики и тепломассопереноса на многопроцессорных ЭВМ: базовые технологии и алгоритмы // Тр. XII Межд. семинара "Супервычисления и математическое моделирование". Саров, 11—15 октября 2010 г. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2011. С. 215—230.
2. Погосян М. А., Савельевских Е. П., Шагалиев Р. М. и др. Применение отечественных суперкомпьютерных технологий для создания перспективных образцов авиационной техники // См. настоящий выпуск. С. 3—18.
3. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник. 1959. Т. 47 (89), № 3. С. 271—306.
4. Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С. К. Годунова. М.: Наука, 1976.
5. Колган В. П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. 1972. Т. 3, № 6. С. 68—78.
6. Родионов А. В. Монотонная схема второго порядка аппроксимации для сквозного расчета неравновесных течений // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1987. Т. 27, № 4. С. 585—593.
7. Родионов А. В. Повышение порядка аппроксимации схемы С. К. Годунова // Там же. № 12. С. 1853—1860.
8. Практические аспекты решения задач внешней аэродинамики двигателей летательных аппаратов в рамках осредненных по времени уравнений Навье—Стокса. Труды ЦАГИ. 2007. Вып. 2671.
9. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comp. Phys. 1979. Vol. 32, No 1. P. 101—136.

10. *Rodionov A. V.* On the use of Boussinesq approximation in turbulent supersonic jet modeling // Int. J. of Heat and Mass Transfer. 2010. Vol. 53. P. 889–901.
11. *Vassberg J. C., Jameson A.* In pursuit of grid convergence for two-dimensional Euler solutions // J. Aircraft. 2010. Vol. 47, No 4. P. 1152–1166.
12. *Massey S. J., Abdol-Hamid K. S.* Enhancement and validation of PAB3D for unsteady aerodynamics // 41st AIAA. Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, NV. January 6–9, 2003.

Статья поступила в редакцию 14.12.12.
