

УДК 534.222.2

## РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В СИСТЕМЕ СТАЛКИВАЮЩИХСЯ ПЛАСТИН

К. Е. Городничев, С. Е. Куратов  
(ВНИИА им. Н. Л. Духова, г. Москва)

В линейном приближении рассматривается задача об эволюции неоднородностей в конфигурации *ударная волна — контактный разрыв — ударная волна* при наличии постоянного поля возмущений плотности перед фронтом одной из ударных волн. Используется подход, основанный на представлении решения в виде совокупности энтропийно-вихревой и звуковой волн. Показано существование трех диапазонов угла падения первоначального возмущения на фронт ударной волны, различающихся природой поведения среды в зафронтальной области. Найдены условия поддержания колебаний фронта ударных волн. Приведены решения для двух значений волнового вектора начальных возмущений.

*Ключевые слова:* гидродинамическая неустойчивость, энтропийно-вихревые волны, звуковые волны, возмущение фронта ударной волны.

### Введение

В данной работе в линейном приближении рассматривается задача о столкновении железного ударника с заданным начальным возмущением плотности с однородной алюминиевой мишенью. В результате соударения по мишени и ударнику начинают распространяться ударные волны (УВ). Необходимо рассмотреть эволюцию поля возмущений в сжатой области. Так как численным путем достаточно сложно отследить колебания фронта УВ или контактного разрыва, представляет интерес аналитическое решение задачи. Его можно использовать для верификации различных программных комплексов.

Необходимо получить решения для случая взаимодействия поля возмущений с УВ как в ударнике, так и в мишени с учетом их *сшивки* на контактном разрыве. Вопросы влияния начальных неоднородностей на распространение УВ в веществе рассмотрены, например, в [1–5], а временной эволюции контактного разрыва посвящено множество статей и монографий (см., например, [6–9]).

При рассмотрении устойчивости УВ в [1] применялся подход, основанный на разделении решения на звуковую и энтропийно-вихревую часть. Используем его для решения поставленной задачи. В отличие от работы [1], где рассмотрена устойчивость УВ в однородной среде, рассмотрим две разные сталкивающиеся среды, в одной из которых задано поле возмущений плотности (энтропийное поле возмущений). Из анализа литературы следует, что при рассмотрении подобных задач для сред используют уравнение состояния (УРС) идеального газа (например, [2, 3, 9] и т. д.). В данной работе для ударника и мишени используется УРС Ми–Грюнайзена [10], который позволяет учитывать упругие свойства вещества.

В результате проведенного анализа было установлено, что характер поведения неустойчивостей в сжатой области зависит от угла падения энтропийных возмущений на УВ в ударнике. Найдены три диапазона угла падения, соответствующие затухающему решению для звука или зарождению гармонических звуковых волн, направление распространения которых зависит от начальных данных.

Указаны условия, при которых возмущения фронта УВ в мишени не затухают с течением времени. В работе приведены конкретные примеры решения при различных углах падения энтропийных возмущений.

Выбор материала сталкивающихся пластин в общем случае произволен. Данную задачу можно рассмотреть и для других пар сталкивающихся пластин. Анализ зависимости зафронтového поведения системы от характеристик сталкивающихся пластин в данной работе не представлен. Авторы планируют в дальнейшем изучить данный вопрос.

## 1. Постановка задачи и решение в отсутствие возмущений

При ударе движущейся со скоростью  $u_1 = 5$  км/с железной пластины с заданным начальным полем возмущений плотности по алюминиевой пластине на границе раздела сред происходит распад разрыва и по средам начинают распространяться УВ. Схематично этот процесс представлен на рис. 1.

В данной работе для обеих пластин использовался УРС Ми–Грюнайзена. Согласно [10] его можно записать в следующем виде:

$$P = \frac{\rho_0 c_0^2}{n} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right] + \Gamma \rho \zeta, \quad (1)$$

где  $\rho_0, c_0$  — плотность и скорость звука несжатого холодного вещества;  $\rho, c$  — плотность и скорость звука сжатого вещества;  $\Gamma$  — коэффициент Грюнайзена;  $n$  — константа УРСа (будем рассматривать  $n = 3$ );  $\zeta$  — тепловая энергия.

Область в ударнике, сжатую УВ, будем обозначать индексом 21, а несжатую — индексом 1. Аналогично для мишени введем индексы 22 и 3. Начальные условия в ударнике:  $P_1 = 0$ ;  $\rho_1 = 7,87$  г/см<sup>3</sup>;  $c_{01} = 4,65$  км/с;  $\zeta_1 = 0$ ;  $\delta P_1 = 0$ ;  $\delta \rho_1(x, y) = \alpha \rho_1 \exp(ik_{0x}x) \exp(ik_{0y}y)$ , а в мишени возмущения отсутствуют и  $\rho_3 = 2,7$  г/см<sup>3</sup>;  $c_{03} = 5,25$  км/с. На контактном разрыве продольная компонента скорости и давление сохраняются, поэтому для области 2 (см. рис. 1) можно записать  $u_{21} = u_{22} \equiv u_2$ ;  $P_{21} = P_{22} \equiv P_2$ .

Рассмотрим невозмущенную систему и найдем невозмущенные значения  $u_2, P_2, \rho_{21}, \rho_{22}, \zeta_{21}, \zeta_{22}$ , а также определим скорости УВ  $d_1$  в ударнике и  $d_2$  в мишени.

Будем учитывать, что  $\varepsilon = \varepsilon_c + \zeta$ , где  $\zeta$  — тепловая энергия,  $\varepsilon_c$  — холодная энергия. В соответствии с [10]

$$\varepsilon_c = -c_0^2 \int_1^\Delta \frac{\pi(\Delta)}{\Delta^2} d\Delta,$$

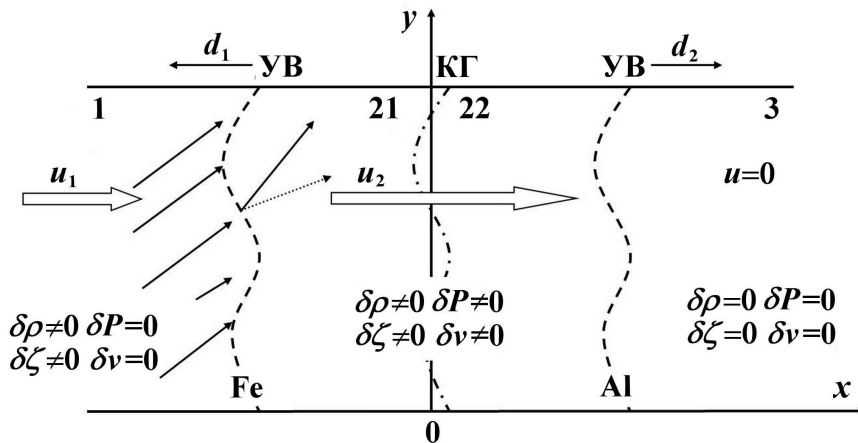


Рис. 1. Начальная постановка задачи о столкновении ударника и мишени:  $\longrightarrow$  — энтропийно-вихревые волны;  $\cdots \gg$  — звуковые волны; КГ — контактная граница

где  $\Delta = \rho/\rho_0$ ;  $\pi(\Delta) = \frac{\Delta^n - 1}{n}$ . Отсюда для  $n = 3$

$$\varepsilon_c = \frac{c_0^2}{3} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 + \frac{\rho_0}{\rho} - \frac{3}{2} \right]. \quad (2)$$

Рассмотрим системы уравнений Ренкина—Гюгонио на УВ [4] в обеих пластинах, дополненные соответствующими УРСами:

$$\rho_1(d_{1x} - u_{1x}) - \rho_{21}(d_{1x} - u_{2x}) = 0; \quad (3)$$

$$P_2 - P_1 - \rho_1(u_{1x} - u_{2x})(d_{1x} - u_{1x}) = 0; \quad (4)$$

$$\frac{c_{01}^2}{3} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_{21}}{\rho_{01}} \right)^2 + \frac{\rho_{01}}{\rho_{21}} - \frac{3}{2} \right] + \zeta_{21} - \zeta_1 - \frac{P_1 + P_2}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_{21}} \right) = 0; \quad (5)$$

$$\rho_3(d_{2x} - u_{3x}) - \rho_{22}(d_{2x} - u_{2x}) = 0; \quad (6)$$

$$P_2 - P_3 - \rho_3(u_{3x} - u_{2x})(d_{2x} - u_{3x}) = 0; \quad (7)$$

$$\frac{c_{03}^2}{3} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_{22}}{\rho_{03}} \right)^2 + \frac{\rho_{03}}{\rho_{22}} - \frac{3}{2} \right] + \zeta_{22} - \zeta_3 - \frac{P_3 + P_2}{2} \left( \frac{1}{\rho_3} - \frac{1}{\rho_{22}} \right) = 0; \quad (8)$$

$$P_2 - \frac{\rho_{01}c_{01}^2}{3} \left[ \left( \frac{\rho_{21}}{\rho_{01}} \right)^3 - 1 \right] - \Gamma\rho_{21}\zeta_{21} = 0; \quad (9)$$

$$P_2 - \frac{\rho_{03}c_{03}^2}{3} \left[ \left( \frac{\rho_{22}}{\rho_{03}} \right)^3 - 1 \right] - \Gamma\rho_{22}\zeta_{22} = 0. \quad (10)$$

Из вида УРСа (1) и выражения (2) следует, что начальная внутренняя энергия для обеих пластин  $\varepsilon = \zeta$ . Система уравнений (3)–(10) решается численно методом Ньютона. В итоге получаем  $P_2 = 81,26$  ГПа;  $d_1 = 1,36$  км/с;  $d_2 = 8,90$  км/с;  $u_2 = 3,37$  км/с;  $\rho_{21} = 10,56$  г/см<sup>3</sup>;  $\rho_{22} = 4,35$  г/см<sup>3</sup>;  $\zeta_{21} = 0,27$  кДж;  $\zeta_{22} = 1,87$  кДж.

## 2. Распространение возмущений в ударнике

Запишем систему уравнений гидродинамики, условия Ренкина—Гюгонио и УРС на ударно-волновом разрыве в ударнике с учетом возмущений гидродинамических величин. Будем рассматривать аппроксимацию первого порядка (линейное приближение). Как известно из [4], решение системы уравнений гидродинамики в линейном приближении представимо в виде совокупности звуковой и энтропийно-вихревой волн. Подобный подход использован в работе [1]. При рассмотрении дальнейшего распространения волн необходимо провести их сшивку на контактном разрыве, после чего для УВ в мишени, как и в ударнике, решается система уравнений гидродинамики, дополненная условиями Ренкина—Гюгонио и УРСом.

Возмущенные величины будем обозначать символом  $\delta$ . Как уже говорилось ранее, в ударнике присутствуют начальные возмущения плотности при условии отсутствия возмущения давления. Следовательно, исходя из вида УРСа (1), можно сделать вывод о том, что должно присутствовать возмущение тепловой энергии  $\delta\zeta$ . Для его нахождения рассмотрим выражение для  $\delta P(\delta\rho, \delta\zeta)$ , которое следует из (1):

$$\delta P = \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 c_0^2 + \Gamma\zeta \right] \delta\rho + \Gamma\rho\delta\zeta. \quad (11)$$

Из условия отсутствия возмущения давления следует, что в ударнике

$$\delta\zeta_1 = - \left( \frac{c_1^2}{\Gamma} + \zeta_1 \right) \frac{\delta\rho_1}{\rho_1}. \quad (12)$$

Для областей 1 и 21 (см. рис. 1) можно записать систему уравнений гидродинамики с использованием условий Ренкина—Гюгонио как граничных.

Рассмотрим соотношения, связывающие гидродинамические величины перед и за фронтом УВ. Подобный анализ для случая отсутствия возмущений перед фронтом УВ приведен, например, в [1, 4]. Для возмущенных значений гидродинамических величин в линейном приближении система уравнений гидродинамики записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \delta v_x}{\partial t} + v \frac{\partial \delta v_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta P}{\partial x} = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial \delta v_y}{\partial t} + v \frac{\partial \delta v_y}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta P}{\partial y} = 0; \quad (14)$$

$$\frac{\partial \delta P}{\partial t} + v \frac{\partial \delta P}{\partial x} + \rho c^2 \left( \frac{\partial \delta v_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta v_y}{\partial y} \right) = 0; \quad (15)$$

$$\frac{\partial \delta \zeta}{\partial t} - \frac{\Gamma \zeta}{\rho} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + v \left( \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} - \frac{\Gamma \zeta}{\rho} \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} \right) = 0. \quad (16)$$

При записи уравнения (15) учтено, что в адиабатическом приближении  $dP = \left( \frac{\partial P}{\partial S} \right)_\rho dS + \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S d\rho = c^2 d\rho$ . Каждая из величин  $\delta v_x$ ,  $\delta v_y$ ,  $\delta P$ ,  $\delta \zeta$ ,  $\delta \rho$  является функцией от координат и времени  $f(x, y, t)$ . Предположим, что эта зависимость гармоническая, следовательно,

$$f(x, y, t) \propto \exp(ik_y y + ik_x x - i\omega t). \quad (17)$$

Далее под  $\delta v_x$ ,  $\delta v_y$ ,  $\delta P$ ,  $\delta \zeta$ ,  $\delta \rho$  будем понимать соответствующие амплитуды. Показатель экспоненты для падающих и отраженных волн будем записывать единообразно, различные направления распространения учитываются знаками волнового вектора и частоты. Аналогично [4] из уравнений (13)—(16) и (17) следует, что для возмущенных величин за фронтом УВ в ударнике

$$\left( \omega^{(s)} - v_2 k_x^{(s)} \right) \delta v_x^{(21)(s)} = \frac{k_x^{(s)}}{\rho_{21}} \delta P_{21}^{(s)}; \quad (18)$$

$$\left( \omega^{(s)} - v_2 k_x^{(s)} \right) \delta v_y^{(21)(s)} = \frac{k_y}{\rho_{21}} \delta P_{21}^{(s)}; \quad (19)$$

$$\left( \omega^{(s)} - v_2 k_x^{(s)} \right)^2 = c_{21}^2 \left[ \left( k_x^{(s)} \right)^2 + k_y^2 \right]; \quad (20)$$

$$\delta P^{(e)} = 0; \quad (21)$$

$$\omega^{(e)} = k_x^{(e)} v_2; \quad (22)$$

$$k_x^{(e)} \delta v_x^{(21)(e)} + k_y \delta v_y^{(21)(e)} = 0; \quad (23)$$

$$\delta \zeta_{21}^{(s)} = \frac{\Gamma \zeta_{21}}{\rho_{21}} \delta \rho_{21}^{(s)}. \quad (24)$$

Здесь и далее индексом  $e$  обозначены энтропийно-вихревые решения, а индексом  $s$  — звуковые.

Для нахождения скорости звука в области за фронтом УВ воспользуемся формулой, приведенной в [11]:

$$c = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon}},$$

где  $\varepsilon$  — полная внутренняя энергия. Для УРСа Ми—Грюнайзена получим

$$c = \sqrt{\Gamma(\Gamma + 1)\zeta + c_0^2 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)}.$$

Далее рассмотрим систему уравнений Ренкина—Гюгонио. Согласно [4] для невозмущенных значений в системе отсчета, расположенной на УВ, имеем

$$v_{1\tau} = v_{2\tau}; \quad (25)$$

$$v_{1n} - v_{2n} = \sqrt{(P_2 - P_1) \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)}; \quad (26)$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) (P_1 + P_2); \quad (27)$$

$$j^2 = \rho_1 \rho_2 \frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1}, \quad (28)$$

где  $v_{1\tau}$ ,  $v_{1n}$  — тангенциальная и нормальная компоненты скорости перед фронтом УВ;  $v_{2\tau}$ ,  $v_{2n}$  — тангенциальная и нормальная компоненты скорости за фронтом УВ;  $j = v_1 \rho_1 = v_2 \rho_2$  — поток вещества.

Дальнейшее рассмотрение будем проводить в лабораторной системе отсчета, в которой ось  $x$  направлена в сторону движения ударника (вправо), ось  $y$ , ортогональная ей, направлена вверх (см. рис. 1). В качестве начала отсчета выберем начальное положение левой границы мишени. Следовательно, в этой системе условия Ренкина—Гюгонио должны браться при  $x = d_{1x}t$ . Необходимо учитывать, что при переходе в лабораторную систему отсчета в уравнениях (25)—(28) появится скорость УВ, но, поскольку во все соотношения, кроме (28), скорости входят попарно, вид условий (25)—(27) в лабораторной системе отсчета не изменится. Отметим, что при переходе в лабораторную систему отсчета начальное возмущение плотности запишется следующим образом:

$$\delta \rho_1 = \alpha \rho_1 \exp\left(ik_{0x}(x - u_1t)\right). \quad (29)$$

С учетом сказанного в линейном приближении система (25)—(28) будет иметь следующий вид:

$$\delta v_y^{(21)(e)} + \delta v_y^{(21)(s)} - \delta v_y^{(1)} - i(v_1 - v_2)k_y \xi_{21}(y, t) = 0; \quad (30)$$

$$\delta v_x^{(21)(e)} + \delta v_x^{(21)(s)} - \delta v_x^{(1)} = \frac{v_2 - v_1}{2} \left[ \frac{\delta P_{21} - \delta P_1}{P_2 - P_1} - \frac{\frac{\rho_{21}}{\rho_1} \delta \rho_1 - \frac{\rho_1}{\rho_{21}} (\delta \rho_{21}^{(e)} + \delta \rho_{21}^{(s)})}{\rho_{21} - \rho_1} \right]; \quad (31)$$

$$\frac{2\delta \rho_1}{\rho_1} + \frac{2\delta v_1}{v_1 - d_{1x}} + \frac{2i\omega \xi}{v_1 - d_{1x}} \xi_{21}(y, t) = \frac{\delta P_{21} - \delta P_1}{P_2 - P_1} + \frac{\frac{\rho_{21}}{\rho_1} \delta \rho_1 - \frac{\rho_1}{\rho_{21}} (\delta \rho_{21}^{(e)} + \delta \rho_{21}^{(s)})}{\rho_{21} - \rho_1}; \quad (32)$$

$$\left[ \frac{c_{01}^2}{3} \left( \frac{\rho_1}{\rho_{01}^2} - \frac{\rho_{01}}{\rho_1^2} \right) - \frac{P_1 + P_2}{2\rho_1^2} \right] \delta \rho_1 - \left[ \frac{c_{02}^2}{3} \left( \frac{\rho_{21}}{\rho_{02}^2} - \frac{\rho_{02}}{\rho_{21}^2} \right) - \frac{P_1 + P_2}{2\rho_{21}^2} \right] (\delta \rho_{21}^{(s)} + \delta \rho_{21}^{(e)}) + \delta \zeta_1 - (\delta \zeta_{21}^{(s)} + \delta \zeta_{21}^{(e)}) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_{21}} \right) (\delta P_1 + \delta P_{21}) = 0. \quad (33)$$

Здесь переменной  $\xi_{21}(y, t)$  обозначено возмущение фронта УВ и предполагается, что зависимость от  $y$  и  $t$  выглядит следующим образом:

$$\xi_{21}(y, t) \propto \exp\{ik_y y - i\omega \xi t\}.$$

В системе (30)—(33) присутствуют слагаемые, содержащие экспоненциальные множители с тремя различными показателями. Энтропийно-вихревой волне соответствует  $ik_x^{(e)} d_{1x}t - i\omega^{(e)}t$ , звуковой —  $ik_x^{(s)} d_{1x}t - i\omega^{(s)}t$ , начальному возмущению —  $ik_{0x}(d_{1x} - u_1)t$  (см. формулу (29)). Следовательно, для выполнения условий на УВ необходимо, чтобы либо показатель экспоненты в начальном возмущении равнялся показателю экспоненты в звуковой или энтропийно-вихревой волне, либо все экспоненты

имели одинаковые показатели. Первое утверждение приводит к противоречию, поэтому приходим к следующему соотношению:

$$k_x^{(e)} d_1 + \omega^{(e)} = k_x^{(s)} d_1 + \omega^{(s)} = k_{0x} (d_1 + u_1). \quad (34)$$

Из УРСа (1) следует

$$\delta P_{21} - \left[ c_{01}^2 \left( \frac{\rho_{21}}{\rho_{01}} \right)^2 + \Gamma \zeta_{21} \right] \delta \rho_{21}^{(s)} - \Gamma \rho_{21} \delta \zeta_{21}^{(s)} = 0; \quad (35)$$

$$\left[ c_{01}^2 \left( \frac{\rho_{21}}{\rho_{01}} \right)^2 + \Gamma \zeta_{21} \right] \delta \rho_{21}^{(e)} + \Gamma \rho_{21} \delta \zeta_{21}^{(e)} = 0. \quad (36)$$

В итоге уравнения (18)–(24), (30)–(36) образуют систему из 14 уравнений с 14 неизвестными  $\delta v_x^{(21)(s)}$ ,  $\delta v_x^{(21)(e)}$ ,  $\delta v_y^{(21)(s)}$ ,  $\delta v_y^{(21)(e)}$ ,  $\delta \rho_{21}^{(e)}$ ,  $\delta \rho_{21}^{(s)}$ ,  $\xi_{21}$ ,  $k_x^{(e)}$ ,  $k_x^{(s)}$ ,  $\delta \zeta_{21}^{(e)}$ ,  $\delta \zeta_{21}^{(s)}$ ,  $\omega^{(e)}$ ,  $\omega^{(s)}$ ,  $\delta P_{21}$ . Рассмотрим звуковые и энтропийно-вихревые волны отдельно.

При рассмотрении энтропийно-вихревых волн подставим выражение (23) в (34), откуда получим  $k_x^{(e)} = \frac{k_{0x}(d_1 + u_1)}{d_1 + u_2}$ . Энтропийные возмущения распространяются вместе со средой, в которой они находятся, поэтому всегда направлены в сторону от УВ.

Для нахождения частоты и волнового вектора звуковой волны рассмотрим уравнения (20), (34). В итоге получим квадратное уравнение относительно  $k_x^{(s)}$ , решение которого выглядит следующим образом:

$$\left( k_x^{(s)} \right)_\pm = \frac{k_{0x}(u_1 - d_{1x})(d_{1x} - u_2) \pm c_{21} \sqrt{((d_{1x} - u_2)^2 - c_{21}^2) k_y^2 + k_{0x}^2 (u_1 - d_{1x})^2}}{c_{21}^2 - (d_{1x} - u_2)^2}. \quad (37)$$

При данных начальных условиях справедливо неравенство  $c_{21} > d_1 + u_2$ . Из анализа формулы (37) следует, что действительная часть решения  $\left( k_x^{(s)} \right)_+$  всегда отрицательна, а действительная часть решения  $\left( k_x^{(s)} \right)_-$  имеет точку изменения знака. Отметим также, что при  $k_{0x}^* = \frac{k_y}{u_1 - d_{1x}} \times \sqrt{c_{21}^2 - (d_1 + u_2)^2}$  характер зависимости меняется, что соответствует обращению в нуль мнимой части волнового вектора  $k_x^{(s)}$  ( $\text{Im}(k_x^{(s)}) = 0$ ). Изменение знака в решении  $\left( k_x^{(s)} \right)_-$  происходит при  $k_{0x}^{**} = \frac{k_y c_{21}}{u_1 - d_{1x}}$ . Величину  $\left( k_x^{(s)} \right)_-$ , нормированную на  $k_y$ , будем обозначать как  $\beta = \left( k_x^{(s)} \right)_- / k_y$ . Зависимость  $\beta$  от  $k_{0x}/k_y$  показана на рис. 2. Действительные части соответствующих частот звуковых волн всегда положительны.

Исходя из решения для волновых векторов, можно выделить три подобласти:

- 1)  $0 < k_{0x} < k_{0x}^*$  — волновые векторы звуковой волны комплексные;
- 2)  $k_{0x}^* < k_{0x} < k_{0x}^{**}$  — оба решения для волнового вектора звуковой волны гармонические и отрицательные;
- 3)  $k_{0x} > k_{0x}^{**}$  — оба решения для волнового вектора звуковой волны гармонические и имеют противоположные знаки.

Векторы  $k_{0x}$  и  $k_y$  являются проекциями волнового вектора, определяющего направление распространения волны возмущений. Следовательно, угол падения энтропийных возмущений из несжатой области на фронт УВ определяет характер физических процессов в зафронтной области. Необходимо отметить, что падение возмущений из области сжатого вещества на фронт УВ описывается аналогично приведенному анализу.

Рассмотрим случай  $0 < k_{0x} < k_{0x}^*$ . Тогда, отбрасывая растущее решение как нефизичное, получаем звуковую волну, распространяющуюся в направлении к УВ, с амплитудой, затухающей по мере удаления от фронта. Другими словами, звуковое решение существует в ограниченной области пространства за фронтом УВ, причем его амплитуда на самом фронте постоянна и быстро затухает при движении вглубь области. По этой причине во второй пластине звуковых волн распространяться не будет. Более подробное рассмотрение данного вопроса приведено ниже.

Случай  $k_{0x}^* < k_{0x} < k_{0x}^{**}$  требует отдельного анализа и в данной работе подробно не рассматривается. Отметим лишь, что решение в области сжатого вещества представимо в виде двух гармонических звуковых волн, распространяющихся в направлении фронта УВ.

При  $k_{0x} > k_{0x}^{**}$  за УВ получаем отходящий от фронта звук (падающую на фронт УВ звуковую волну отбрасываем). Расчеты показывают, что при дальнейшем его распространении после серии переотражений значения волнового вектора и частоты звуковой волны уменьшаются и решение снова попадает в подобласть 2, где падающее на УВ возмущение порождает возмущение, также направленное к фронту УВ. Подробнее данный случай будет рассмотрен ниже.

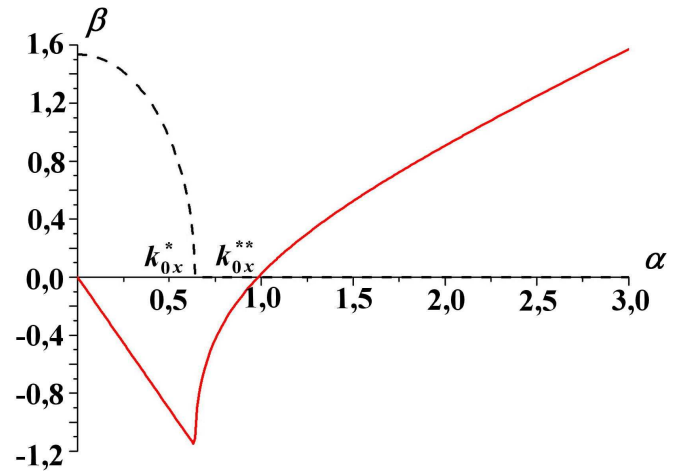


Рис. 2. Зависимость нормированного волнового вектора звуковых волн, распространяющихся за фронтом УВ, от  $\alpha = k_{0x}/k_y$ : — — —  $\text{Im}(\beta)$ ; — — —  $\text{Re}(\beta)$

### 3. Начальные возмущения больших длин волн. Затухающее решение для звука

Рассмотрим значение  $k_{0y} = 0,63 \text{ мкм}^{-1}$  ( $\lambda_{0y} = 10 \text{ мкм}$ );  $k_{0x} = 0,5k_{0y}$ . Решение в этом случае попадает в подобласть 1 (см. разд. 2). Растущее по  $x$  решение отбросим, поэтому в итоге получим  $k_x^{(s)} = (-0,57 + 0,60i) \text{ мкм}^{-1}$ ;  $\omega^{(s)} = (2,8 - 0,8i) \text{ нс}^{-1}$ ;  $k_x^{(e)} = 0,42 \text{ мкм}^{-1}$ ;  $\omega^{(e)} = 1,42 \text{ нс}^{-1}$ . Отметим, что на самом фронте УВ амплитуда звуковых волн остается постоянной, а звуковое решение существует в области, прилегающей к фронту УВ, шириной около 100 мкм. Следовательно, в объеме сжатой среды как в ударнике, так и в мишени нужно рассматривать только энтропийно-вихревые волны. Возмущения, распространяющиеся в ударнике, будем сшивать с однородным энтропийно-вихревым решением для мишени, затухающим к фронту УВ. Такой выбор обусловлен тем, что энтропийно-вихревая волна в зафронтальной области, сонаправленная с УВ, не может на нее воздействовать в силу неравенства  $u_2 < d_2$ . Необходимо также учитывать равенства смещения и давлений на контактном разрыве.

В силу равенства  $\omega^{(e)} = k_x^{(e)} u_2$  фаза энтропийной волны на контактном разрыве ( $x = u_2 t$ ) равна нулю. Это приводит к наличию постоянных (неколебательных) возмущений по оси  $x$ , искривляющих поверхность разрыва (неустойчивость Рихтмайера—Мешкова).

В итоге с течением времени гофрировка фронта УВ в мишени исчезнет, а в ударнике она будет поддерживаться постоянной и на контактном разрыве будет развиваться неустойчивость типа Рихтмайера—Мешкова, обусловленная энтропийно-вихревыми возмущениями.

### 4. Начальные возмущения малых длин волн. Незатухающее решение для звука

Рассмотрим значения  $k_{0y} = 0,63 \text{ мкм}^{-1}$  ( $\lambda_{0y} = 10 \text{ мкм}$ );  $k_{0x} = 100k_{0y}$  и  $\alpha = 1\%$ . В этом случае решение попадает в подобласть 3 (см. разд. 2) и представляется в виде гармонической звуковой волны, распространяющейся в направлении от фронта УВ. Далее часть звука отражается от контактного разрыва, а часть проходит во вторую среду. Порождения звуковой волной энтропийно-вихревой

волны на границе пластин не происходит в силу невозможности выполнения равенства их фаз. Это связано с тем, что положение контактного разрыва описывается координатой  $x = u_2 t$  и в силу равенства (22) фаза энтропийной волны на нем всегда равна нулю, чего нельзя сказать о фазе звуковой волны. Рассуждая аналогично, можно показать, что энтропийно-вихревая волна при падении на контактный разрыв не может породить звуковую.

Далее необходимо рассмотреть падение прошедшей через контактный разрыв звуковой волны на УВ в мишени и отраженной звуковой волны на УВ в ударнике. Для этого снова решаются совместно система уравнений Ренкина—Гюгонио и уравнения гидродинамики; решение окажется также в одной из трех подобластей. Далее рассматривается падение на контактный разрыв и т. д. Схематично картина распространения звуковых и энтропийно-вихревых волн представлена на рис. 3.

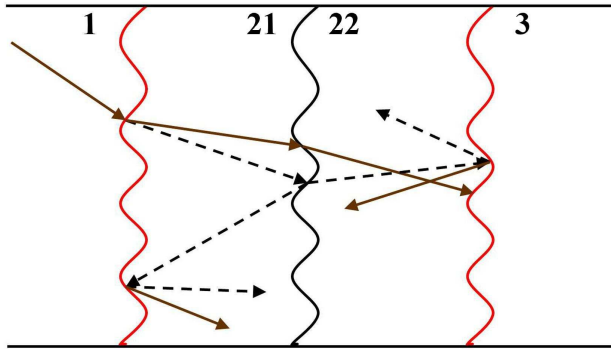


Рис. 3. Распространение энтропийно-вихревых и звуковых волн:  $--\rightarrow$  — звуковые волны;  $\longrightarrow$  — энтропийно-вихревые волны

Рассмотрим сшивки возмущений давления и смещений границы на контактном разрыве, обусловленных влиянием звуковых волн.

В железе возмущение давления можно представить в виде  $\delta P_{\text{Fe}} = \delta P^{(i)} + \delta P^{(r)}$ , а в алюминии  $\delta P_{\text{Al}} = \delta P^{(t)}$ , где  $\delta P^{(i)}$ ,  $\delta P^{(r)}$  и  $\delta P^{(t)}$  — возмущения давления в падающей, отраженной и прошедшей волнах соответственно. Из условия равенства давлений на контактном разрыве следует

$$k_x^{(i)} u_2 - \omega^{(i)} = k_x^{(r)} u_2 - \omega^{(r)} = k_x^{(t)} u_2 - \omega^{(t)}; \quad (38)$$

$$\delta P^{(i)} + \delta P^{(r)} = \delta P^{(t)}. \quad (39)$$

Запишем выражения для падающей, отраженной и прошедшей волн, аналогичные (20):

$$\left(\omega^{(i)} - u_2 k_x^{(i)}\right)^2 = c_{21}^2 \left[ \left(k_x^{(i)}\right)^2 + k_y^2 \right]; \quad (40)$$

$$\left(\omega^{(r)} - u_2 k_x^{(r)}\right)^2 = c_{21}^2 \left[ \left(k_x^{(r)}\right)^2 + k_y^2 \right]; \quad (41)$$

$$\left(\omega^{(t)} - u_2 k_x^{(t)}\right)^2 = c_{22}^2 \left[ \left(k_x^{(t)}\right)^2 + k_y^2 \right]. \quad (42)$$

Из уравнений (38), (40), (41) следует, что  $k_x^{(r)} = \pm k_x^{(i)}$ . Решение со знаком плюс не подходит, поскольку тогда согласно (38)  $\omega^{(r)} = -\omega^{(i)}$ , а значит, отраженная волна должна быть сонаправлена с падающей, чего быть не может. Поэтому данной задаче удовлетворяет только решение со знаком минус. В итоге получим для отраженной волны

$$k_x^{(r)} = -k_x^{(i)}; \quad \omega^{(r)} = -2u_2 k_x^{(i)} + \omega^{(i)}.$$

Из выражений (40) и (42) следует

$$k_x^{(t)} = \left\{ \frac{c_{21}^2}{c_{22}^2} \left[ \left(k_x^{(i)}\right)^2 + k_y^2 \right] - k_y^2 \right\}^{1/2}. \quad (43)$$

Рассмотрим теперь условие равенства смещений границы  $\xi_{\text{Fe}}(y, t)$  и  $\xi_{\text{Al}}(y, t)$  при  $x = u_2 t$ . Учтывая, что временная зависимость для  $\xi$  представима в виде  $e^{-i\omega \xi t}$ , можно записать

$$\delta v_x^{(\text{Fe})} = \frac{d}{dt} \xi_{\text{Fe}} = -i\omega \xi_{\text{Fe}}(y, t); \quad \delta v_x^{(\text{Al})} = -i\omega \xi_{\text{Al}}(y, t). \quad (44)$$

Здесь введены обозначения  $\delta v_x^{(\text{Fe})} = \delta v_x^{(i)} + \delta v_x^{(r)}$ ;  $\delta v_x^{(\text{Al})} = \delta v_x^{(t)}$ .



Для нахождения  $\delta v_x^{(\text{Fe})}$  и  $\delta v_x^{(\text{Al})}$  рассмотрим уравнение Эйлера для возмущенных величин:

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{\nabla \delta P}{\rho} = 0. \quad (45)$$

Из (45) следует

$$\delta v_x^{(i)} = \frac{k_x^{(i)}}{\rho_{21}(\omega^{(i)} - k_x^{(i)} u_2)} \delta P_2^{(i)}; \quad \delta v_x^{(r)} = \frac{k_x^{(r)}}{\rho_{21}(\omega^{(r)} - k_x^{(r)} u_2)} \delta P_2^{(r)}; \quad \delta v_x^{(t)} = \frac{k_x^{(t)}}{\rho_{22}(\omega^{(t)} - k_x^{(t)} u_2)} \delta P_2^{(t)}. \quad (46)$$

Из уравнений (44) и (46) получаем

$$\xi_{\text{Fe}} = \frac{ik_x^{(i)}}{\rho_{21}} \left( \frac{\delta P_2^{(i)}}{\omega^{(i)} - k_x^{(i)} u_2} - \frac{\delta P_2^{(r)}}{\omega^{(r)} - k_x^{(r)} u_2} \right) \Big|_{x=u_2 t}; \quad \xi_{\text{Al}} = \frac{ik_x^{(t)}}{\rho_{22}} \frac{\delta P_2^{(t)}}{\omega^{(t)} - u_2 k_x^{(t)}} \Big|_{x=u_2 t}.$$

Исходя из условия  $\xi_{\text{Fe}}(y, t)|_{x=u_2 t} = \xi_{\text{Al}}(y, t)|_{x=u_2 t}$ , имеем

$$\frac{k_x^{(i)} (\delta P^{(i)} - \delta P^{(r)})}{\rho_{21}} = \frac{k_x^{(t)} \delta P^{(t)}}{\rho_{22}}. \quad (47)$$

Из (39) и (47) следует

$$\delta P^{(r)} = \left( \frac{k_x^{(i)}}{\rho_{21}} - \frac{k_x^{(t)}}{\rho_{22}} \right) \left( \frac{k_x^{(i)}}{\rho_{21}} + \frac{k_x^{(t)}}{\rho_{22}} \right)^{-1} \delta P^{(i)}; \quad \delta P^{(t)} = 2 \frac{k_x^{(i)}}{\rho_{21}} \left( \frac{k_x^{(i)}}{\rho_{21}} + \frac{k_x^{(t)}}{\rho_{22}} \right)^{-1} \delta P^{(i)}.$$

Выпишем амплитуды гидродинамических величин для отраженной волны. Используя уравнения (24) и (35), можно записать

$$\delta \rho_{21}^{(r)} = \frac{\delta P^{(r)}}{\left( \frac{\rho_{21}}{\rho_{01}} \right)^2 c_{01}^2 + \Gamma (\Gamma + 1) \zeta_{21}}; \quad \delta \zeta_{21}^{(r)} = \frac{\Gamma \zeta_{21}}{\rho_{21}} \frac{\delta P^{(r)}}{\left( \frac{\rho_{21}}{\rho_{01}} \right)^2 c_{01}^2 + \Gamma (\Gamma + 1) \zeta_{21}}.$$

Из уравнения Эйлера для  $x$ - и  $y$ -компонент находим

$$\delta v_x^{(r)} = \frac{\delta P^{(r)} k_x^{(i)}}{\rho_{21} (\omega^{(i)} - k_x^{(i)} u_2)}; \quad \delta v_y^{(r)} = \frac{\delta P^{(r)} k_y}{\rho_{21} (\omega^{(i)} - k_x^{(i)} u_2)}.$$

Для прошедшей волны соответствующие величины вычисляются аналогично.

Так же, как для случая падения длинноволновых возмущений, сшивку энтропийно-вихревой волны в ударнике будем производить с однородным энтропийно-вихревым решением в мишени, затухающим к фронту УВ.

Отметим тот факт, что в результате процесса переотражений произойдет переход решения задачи в подобласть 2 (см. разд. 2) из-за последовательного уменьшения значений волнового вектора (рис. 4). Как уже упоминалось, изучение этой подобласти требует дополнительного анализа и в данной работе она подробно не рассматривается. Однако из хода решения следует, что до попадания в подобласть 2 звуковая волна испытывает достаточное число переотражений и ее амплитуда затухает, поэтому при данных начальных условиях рассмотрение распространения возмущений в подобласти 2 можно опустить, предполагая, что в ней нет никаких растущих особенностей.

Рассмотрим ударник. Полученная первичная звуковая волна отражается как от контактного разрыва, так и от УВ. На рис. 4 приведен логарифмический график зависимостей волнового вектора и соответствующей частоты от номера отражения этой волны от УВ.

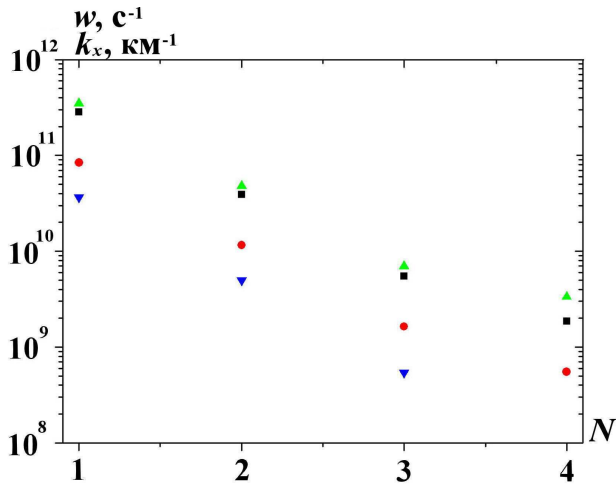


Рис. 4. Зависимости волнового вектора и частоты от номера отражения звуковой волны от фронта УВ в ударнике: ■ —  $\omega^{(e)}$ ; ● —  $k_x^{(e)}$ ; ▲ —  $\omega^{(s)}$ ; ▼ —  $k_x^{(s)}$

Аналогичный анализ можно провести для изучения распространения возмущений в мишени. Система уравнений на УВ отличается тем, что неоднородность присутствует не перед фронтом УВ, а в области сжатого вещества.

Получены зависимости для относительного возмущения плотности как в ударнике ( $\gamma_1 \simeq 0,7\%$ ), так и в мишени ( $\gamma_2 \simeq 0,1\%$ ); они представлены на рис. 5.

В итоге при данных начальных условиях возмущения фронта УВ в мишени поддерживаются падающими на нее звуковыми волнами. На контактном разрыве будет развиваться неустойчивость типа Рихтмайера—Мешкова, обусловленная энтропийно-вихревыми возмущениями.

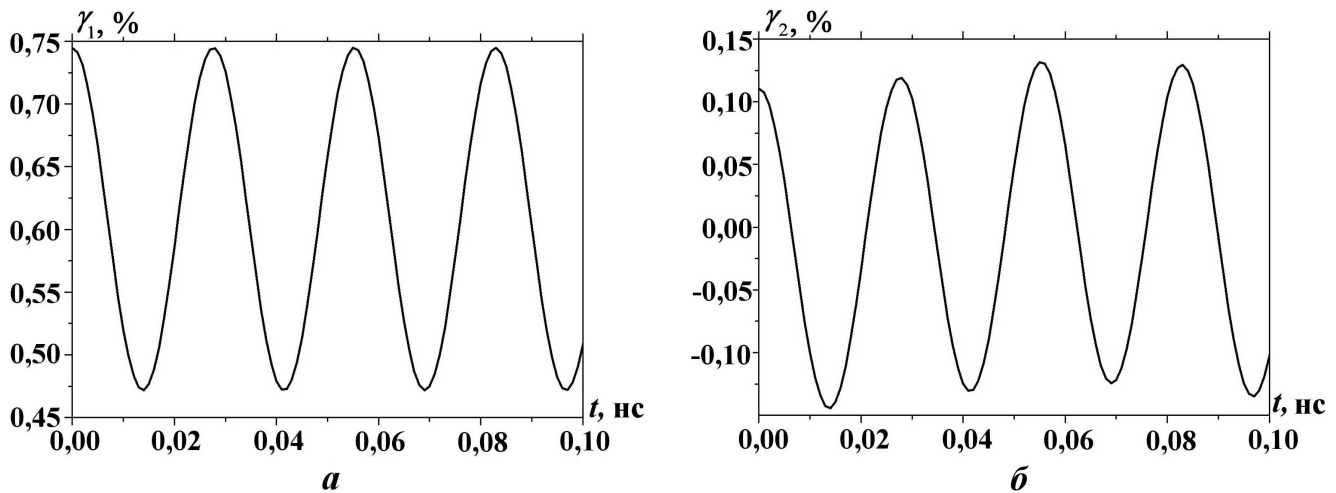


Рис. 5. Зависимости относительного возмущения плотности в ударнике (а) и мишени (б) за фронтом УВ от времени

### Заключение

В результате рассмотрения задачи о столкновении ударника с заданным начальным полем энтропийных возмущений с однородной мишенью было показано, что от угла падения неоднородностей на фронт УВ в ударнике зависит характер поведения решения. Можно получить как затухающие звуковые решения, так и гармонические, причем направление их распространения в пространстве также зависит от начальных условий.

Решение задачи приведено для длинноволновых и коротковолновых (по оси  $x$ ) возмущений. Показано, что в первом случае колебания фронта УВ в мишени сглаживаются, во втором они поддерживаются на постоянном уровне. Случай появления в решении гармонической звуковой волны, падающей на фронт УВ, требует дальнейшего рассмотрения и в данной работе не представлен.

Для проведения сравнения с численными решениями необходимо использование программных комплексов, обладающих возможностью отслеживания малых колебаний УВ и контактной границы. По этой причине результаты данной работы могут рассматриваться с точки зрения их применимости для верификации таких программных комплексов.

Авторы выражают глубокую признательность сотрудникам ФГУП "ВНИИА" Н. А. Иногамову и И. С. Меньшову за ценные замечания и полезные обсуждения в ходе написания данной статьи.

### Список литературы

1. Дьяков С. П. Об устойчивости ударных волн // ЖЭТФ. 1954. Т. 27, № 3(9). С. 288—295.
2. Velikovich A. L., Wouchuk J. G., Huete Ruiz de Lira C. et al. Shock front distortion and Richtmyer-Meshkov-like growth caused by a small pre-shock non-uniformity // Phys. Plasmas. 2007. Vol. 14. P. 1—75.
3. Huete Ruiz de Lira C. Turbulence generation by a shock wave interacting with a random density inhomogeneity field. <http://128.84.158.119/abs/1006.1819v2>.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI "Гидродинамика". М.: Наука, 1986.
5. Кузнецов Н. М. Устойчивость ударных волн // УФН. 1989. Т. 159, № 3. С. 493—527.
6. Разин А. Н. Моделирование неустойчивости и турбулентного перемешивания в слоистых системах. Саров, 2010.
7. Иногамов Н. А., Демьянов А. Ю., Сон Э. Е. Гидродинамика перемешивания. М.: МФТИ, 1999.
8. Inogamov N. A. Statistics of long-wavelength fluctuations and the expansion rate of Richtmyer—Meshkov turbulence zone // JETP Letters. 2002. Vol. 75, No. 11. P. 547—551.
9. Wouchuk J. G. Growth rate of the linear Richtmyer—Meshkov instability when a shock is reflected // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 63. P. 1—13.
10. Забабахин Е. И. Некоторые вопросы газодинамики взрыва. Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 1997.
11. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.

Статья поступила в редакцию 20.09.12.

---