

УДК 519.6

МЕТОДИКА САТУРН-2005. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ЧАСТИЦ И ЭНЕРГИИ

А. В. Алексеев, И. М. Беляков, А. И. Бочков, В. В. Евдокимов, Е. А. Ирничев,
В. Ю. Морозов, А. Н. Москвин, А. А. Нуждин, М. П. Пепеляев, В. Ю. Резчиков,
В. В. Сучкова, Р. М. Шагалиев, Э. Ш. Шарифуллин, Т. В. Шемякина, В. А. Шумилин
(РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров)

Дается краткое описание методики САТУРН, предназначенной для численного решения двумерных и трехмерных стационарных и нестационарных задач переноса нейтронов и нелинейных задач переноса энергии фотонами, ионами, электронами и быстрыми заряженными частицами. Решение уравнения переноса выполняется в кинетическом или диффузионном приближении.

Методика САТУРН ориентирована на применение современных многопроцессорных суперЭВМ с распределенной памятью.

Излагаются основные положения, на которых базируется методика. Формулируются физико-математические модели и математические методы, используемые для решения отмеченных классов многомерных задач, а также алгоритмы распараллеливания.

Ключевые слова: двумерные и трехмерные задачи переноса нейтронов и рентгеновского излучения, кинетическое и диффузионное многогрупповое приближение, методика САТУРН, разностные схемы, алгоритмы распараллеливания.

Введение

Методика САТУРН-2005 (далее по тексту САТУРН), созданная в 2005 г., является развитием методики САТУРН-3 [1] и предназначена для численного решения на многопроцессорных суперЭВМ следующих классов многомерных (двумерных и трехмерных) задач:

- нестационарных многогрупповых задач переноса нейтронов с учетом кинетики нейтронно-ядерного и термоядерного взаимодействия;
- нестационарных нелинейных многогрупповых задач переноса энергии тепловым излучением и электронами с учетом неравновесности процессов взаимодействия между излучением и средой, а также между электронами и ионами, в том числе задач тяжелоионного и лазерного термоядерного синтеза;
- стационарных многогрупповых задач расчета критических параметров;
- переноса гамма-квантов с возможностью учета процесса переноса энергии гамма-квантами;
- переноса быстрых заряженных частиц (протон, дейтрон, тритон, ядро ^3He , α -частица) с возможностью учета реакций *на лету*.

Совершенствование вычислительной техники, развитие технологий программирования, создание новых методов математического моделирования и т. п. потребовали разработки новой версии методики САТУРН. В работе рассматриваются особенности программной организации, приводится обзор основных физических процессов, моделирование которых выполняется с помощью данной методики, рассматриваются основные методы численного решения и алгоритмы распараллеливания.

Особенности организации

Программная организация современной версии методики САТУРН основывается на следующих принципах:

- численное решение задачи по итерационной схеме раздельного счета по отдельным математическим (счетным) областям с обменом внутренними граничными условиями;
- возможность задания в разных областях разных сеток по всем переменным фазового пространства при дискретизации дифференциальных уравнений;
- учет в каждой математической области заданной совокупности физических процессов в различных физико-математических приближениях;
- многоуровневая организация счета по процессам.

Ориентация методики САТУРН на эффективную реализацию на ЭВМ с массовым параллелизмом потребовала создания гибкой и масштабируемой структуры данных, удобной для программирования и отладки. Дополнительную сложность представляет использование большого числа массивов разных размерностей и типов (на данный момент их около 800). В зависимости от типа расчета используются те или иные группы массивов в различных комбинациях.

Основные принципы, которые использовались при разработке структуры данных:

1. Идентификация массивов, параметров и прочих объектов производится по символьному имени, а расчет длин массивов выполняется автоматически по символьным формулам.
2. Массивы объединены в списковые структуры. Для каждого массива, кроме символьного имени, хранятся размерность, тип, символьная формула длины, фактическая длина, контрольная сумма и др.
3. Динамическое выделение памяти. Память под каждый массив выделяется по мере использования. При необходимости есть возможность в процессе счета увеличить или уменьшить память, занимаемую каждым массивом, что актуально, например, при работе с неструктурированными сетками.
4. Добавление нового массива или параметра не влечет дополнительного программирования, вся информация поступает в качестве входных данных из эталонных таблиц.
5. Доступ к каждому массиву, параметру и прочим элементам структуры данных происходит через специальные сервисные программы. Управляющие программы методики работают со структурой данных посредством сервисных программ. Счетные программы работают с данными через формальные параметры.

Программная организация методики САТУРН основана на модульном принципе. По назначению модули подразделяются на управляющие программы методики, модули расчета начальных данных, модули управления счетом, приказы, рабочие (счетные) модули, сервисные программы различного назначения. В зависимости от типа решаемой задачи в процессе счета участвуют те или иные счетные модули, которые предназначены для моделирования различных физических процессов в разных приближениях.

Наборы программ в совокупности с используемыми данными, предназначенные для моделирования соответствующих физических процессов, называются *процессами* методики САТУРН. При проведении расчета процессы выполняются в соответствующей данному типу задачи последовательности на своих пространственно-временных сетках. Для организации управления счетом реализовано распределение процессов по уровням. Процессы, которые считаются на одинаковых пространственно-временных сетках, относятся к одному уровню. Процессы более низкого уровня могут выполнять несколько временных шагов на одном шаге верхнего уровня.

Управляющий счетом модуль работает формально по схеме расчета, которая содержит информацию о том, какие процессы, на каких уровнях и в какой последовательности должны быть вызваны для данного типа задачи. Схемы расчета для всех типов задач хранятся в текстовом виде в эталонных таблицах. Также в схеме расчета определяется стандартная для данного типа задачи тактика счета.

Классы решаемых задач и физико-математические приближения

Двумерные и трехмерные задачи переноса нейтронов в многогрупповом кинетическом приближении.

Цилиндрическая система координат. Унифицированное пространственно двумерно-трехмерное кинетическое уравнение переноса нейтронов в многогрупповом приближении записывается в цилиндрической системе координат следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N_i}{v_i} \right) + \frac{\partial}{r \partial r} \left(r \sqrt{1 - \mu^2} N_i \cos \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu N_i) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\sqrt{1 - \mu^2} N_i \sin \varphi}{r} \right) + \\ + (d - 2) \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\frac{\sqrt{1 - \mu^2} N_i \sin \varphi}{r} \right) + \alpha_i N_i = F_i; \end{aligned} \quad (1)$$

$$F_i = \left(\sum_{j=1}^g \beta_{ij} n_j^{(0)} \right) G_i + \frac{1}{2(d-1)\pi} Q_i, \quad n_i^{(0)} = \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{(d-1)\pi} N_i d\phi. \quad (2)$$

Здесь d — пространственная размерность задачи (2 — двумерная, 3 — трехмерная задача); $i = \overline{1, g}$ — номер энергетической группы, g — число групп; t — время; z, r, Φ — цилиндрические координаты положения нейтронов в пространстве; $v_i(z, r, \Phi, t)$ — скорость нейтронов; $\alpha_i(z, r, \Phi, t)$ — коэффициент поглощения нейтронов; $G_i(z, r, \Phi, t, \theta, \varphi)$ — функция, учитывающая анизотропию рассеянных нейтронов; $\beta_{ij}(z, r, \Phi, t)$ — матрица размножения нейтронов; $Q_i(z, r, \Phi, t)$ — внешний источник нейтронов; $N_i = N_i(z, r, \Phi, t, \theta, \varphi)$ — плотность потока нейтронов в точке (z, r, Φ, t) , летящих в направлении $\vec{\Omega}$; $\vec{\Omega}(\mu, \varphi)$ — единичный вектор в направлении полета частицы; $\mu = \cos \theta$, θ — угол между $\vec{\Omega}$ и осью симметрии \vec{z} ; φ — угол между проекцией вектора $\vec{\Omega}$ на плоскость, проходящую через точку (z, r, Φ) перпендикулярно оси \vec{z} , и вектором, соединяющим точки $(z, 0, \Phi)$ и (z, r, Φ) .

Система (1), (2) решается в области фазового пространства $D = \{(r, z) \in L(\Phi), \Phi_1 \leq \Phi \leq \Phi_2; -1 \leq \mu \leq 1; 0 \leq \varphi \leq (d-1)\pi\}$, где $L(\Phi)$ — сечение тела вращения плоскостью, проходящей через ось симметрии \vec{z} ; Φ_1, Φ_2 — ограничивающие область решения сечения: $\Phi_1 = \text{const}$, $\Phi_2 = \text{const}$, $0 \leq \Phi_1 \leq \Phi_2 \leq 2\pi$.

Начальное условие:

$$N_i(z, r, \Phi, t, \mu, \varphi)|_{t=0} = N_i^0(z, r, \Phi, \mu, \varphi). \quad (3)$$

Граничное условие ставится на внешней поверхности в виде потока частиц, входящих в тело, при $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0$ в виде

$$N_i(z, r, \Phi, t, \mu, \varphi)|_{(z,r) \in \Gamma(\Phi)} = \psi_i(z_\Gamma, r_\Gamma, \Phi, t, \mu, \varphi), \quad (4)$$

где $\Gamma = \Gamma(\Phi)$ — образующая тела вращения; \vec{n} — внешняя нормаль к поверхности тела вращения; $\psi_i(z_\Gamma, r_\Gamma, \Phi, t, \mu, \varphi)$ — заданная функция (поток).

В случае $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 2\pi$ граничных условий (4) достаточно для корректной постановки задачи. В случае наличия в трехмерном теле выреза необходимо задать также граничные условия на торцах, т. е. при $\Phi = \Phi_1$ и $\Phi = \Phi_2$.

Наряду с уравнением (1) вводится уравнение, получающееся из (1) при $\varphi = \pi$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N_i}{v_i} \right) - \frac{\partial}{r \partial r} \left(r \sqrt{1 - \mu^2} N_i \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu N_i) + \frac{\sqrt{1 - \mu^2} N_i}{r} + \alpha_i N_i = F_i. \quad (5)$$

Уравнение (5) используется как дополнительное граничное условие.

Построенную систему разностных уравнений необходимо также дополнить внутренними граничными условиями при $r = 0$. Они описываются уравнением

$$N_i \cos \varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_i \sin \varphi) + (d - 2) \frac{\partial}{\partial \Phi} (N_i \sin \varphi) = 0. \quad (6)$$

В случае необходимости система (1)–(6) решается совместно с системой уравнений кинетики нейтронно-ядерного взаимодействия. Уравнения переноса в двумерной (осесимметричной) геометрии вытекают из (1)–(6) в предположении, что отсутствует зависимость функций, граничных и начальных условий от переменной Φ .

Сферическая система координат. При решении многомерных задач с оптически тонкими областями и сильно локализованными источниками DS_n -схемы дают решения с нефизическими осцилляциями, известными как *лучевые эффекты* [3]. Использование подробных угловых сеток, хотя и позволяет уменьшить лучевые эффекты, приводит к существенному удорожанию расчетов.

Одним из путей минимизации лучевых эффектов, возникающих при решении двумерных осесимметричных задач переноса, и повышения точности является применение метода, основанного на записи уравнения переноса в сферической системе координат [4]. Особенностью этой формы записи является использование подвижного базиса угловой системы координат, отвечающей за направления полета нейтронов.

Двумерное нестационарное кинетическое уравнение переноса нейтронов в многогрупповом приближении, записанное в сферической системе координат, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N_i}{v_i} \right) + \frac{\mu}{R^2} \frac{\partial (R^2 N_i)}{\partial R} + \frac{\xi}{R \sin \theta} \frac{\partial (N_i \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial \left((1 - \mu^2) N_i \right)}{\partial \mu} - \frac{\text{ctg } \theta}{R} \frac{\partial (\eta N_i)}{\partial \varphi} + \alpha_i N_i = F_i, \quad (7)$$

$$F_i = \left(\sum_{j=1}^g \beta_{ij} n_j^{(0)} \right) G_i + \frac{1}{2\pi} Q_i, \quad n_i^{(0)} = \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\pi N_i d\varphi. \quad (8)$$

Здесь θ и R — сферические координаты положения нейтронов в пространстве; $R = |\vec{R}|$ — расстояние от точки положения нейтрона до начала координат; θ — угол между радиусом-вектором \vec{R} положения нейтрона и осью \vec{z} ; $N_i = N_i(\theta, R, t, \mu, \varphi)$ — плотность потока нейтронов в точке (θ, R, t) , летящих в направлении $\vec{\Omega}$. Остальные обозначения те же, что для (1), (2).

На рис. 1 приведена сферическая система координат. Для наглядного понимания связи между сферическими и цилиндрическими координатами здесь также изображена цилиндрическая система координат. Сферические (R, θ) и цилиндрические (r, z) координаты связаны между собой следующим образом: $\theta = \arctg(r/z)$; $R = \sqrt{z^2 + r^2}$.

С каждой пространственной точкой с координатами (R, θ) для описания направлений полета нейтронов связана угловая система координат с центром в точке (R, θ) , как показано на рис. 2. Направление первой оси этой системы координат совпадает с направлением радиуса-вектора \vec{R} . Вторая ось \vec{R}_\perp лежит в плоскости ZR и перпендикулярна \vec{R} : $\vec{R}_\perp = \vec{R} \times (\vec{R} \times \vec{z}) = \vec{R} \cdot (\vec{R} \cdot \vec{z}) - \vec{z}R$. Третья ось \vec{z}_\perp перпендикулярна первым двум осям: $\vec{z}_\perp = \vec{R} \times \vec{R}_\perp$. Плоскость, перпендикулярную радиусу-вектору \vec{R} , в которой лежат оси \vec{R}_\perp и \vec{z}_\perp , назовем азимутальной. Тогда φ — угол между проекцией вектора $\vec{\Omega}$ на азимутальную плоскость и осью \vec{R}_\perp (азимутальный угол); ψ — угол между векторами $\vec{\Omega}$ и \vec{R} (полярный угол); $\mu = \cos \psi$, $\xi = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi$ и $\eta = \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi$ — направляющие косинусы.

Уравнения (7), (8), дополненные начальными и граничными условиями, аналогичными (3), (4), решаются в области фазового пространства $D = \{(z, r) \in L; -1 \leq \mu \leq 1; 0 \leq \varphi \leq \pi\}$, где область L — половина сечения тела вращения плоскостью, проходящей через ось \vec{z} и образующую Γ .

Кроме того, рассматриваются уравнения, которые используются как дополнительные (внутренние) граничные условия:

– при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \varphi} = 0;$$

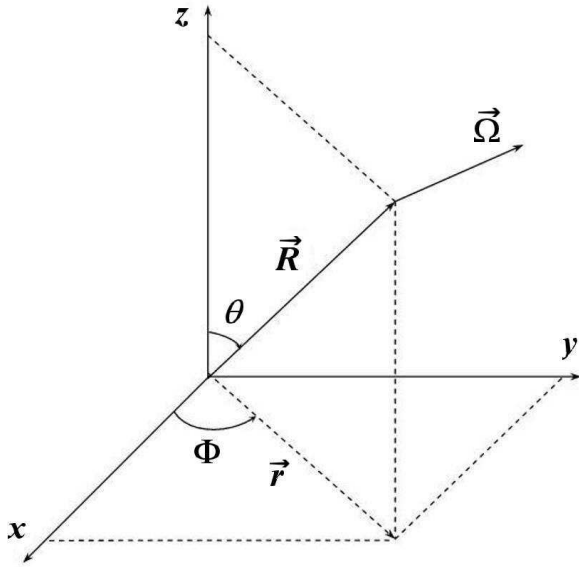
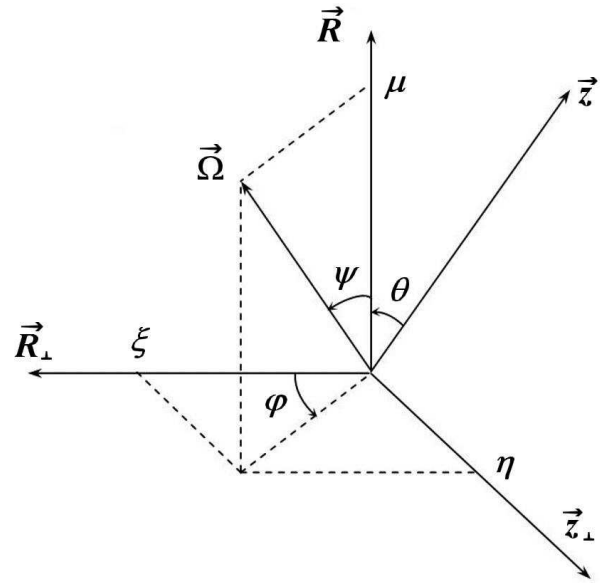

 Рис. 1. Сферическая (R, θ, Φ) и цилиндрическая (r, z, Φ) системы координат


Рис. 2. Угловая система координат

– при $\mu = -1$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N_i}{v_i} \right) - \frac{1}{R^2} \frac{\partial (R^2 N_i)}{\partial R} + \frac{2N_i}{R} + \alpha_i N_i = F_i;$$

– при $\varphi = \pi$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N_i}{v_i} \right) + \frac{\mu}{R^2} \frac{\partial (R^2 N_i)}{\partial R} + \frac{\xi}{R \sin \theta} \frac{\partial (N_i \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial \left((1 - \mu^2) N_i \right)}{\partial \mu} - \frac{N_i \xi \operatorname{ctg} \theta}{R} + \alpha_i N_i = F_i.$$

Декартова система координат. Трехмерное нестационарное уравнение переноса нейтронов в многогрупповом приближении, записанное в декартовой системе координат, имеет следующий вид [5]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N_i}{v_i} \right) + \sqrt{1 - \mu^2} \left(\cos \varphi \frac{\partial N_i}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial N_i}{\partial z} + \alpha_i N_i = F_i, \quad (9)$$

$$F_i = \left(\sum_{j=1}^g \beta_{ij} n_j^{(0)} \right) G_i + \frac{1}{4\pi} Q_i, \quad n_i^{(0)} = \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} N_i d\varphi. \quad (10)$$

Здесь x, y, z – координаты нейтронов в пространстве; $N_i = N_i(x, y, z, t, \mu, \varphi)$ – плотность потока нейтронов в точке (x, y, z, t) , летящих в направлении $\vec{\Omega}$. Остальные обозначения те же, что в (1), (2).

Уравнения (9), (10) дополненные начальными и граничными условиями, аналогичными (3), (4), решаются в области $D = \{(x, y, z) \in L; -1 \leq \mu \leq 1; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$.

Двумерные и трехмерные задачи переноса рентгеновского излучения в групповом кинетическом приближении. В методике САТУРН при решении уравнения переноса фотонов используется аналогичная (1), (2) унифицированная запись пространственно двумерно-трехмерного кинетического уравнения в многогрупповом приближении в цилиндрической системе координат [1]:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} + L \varepsilon_i + \chi_{oi} \varepsilon_i = \frac{\chi_{ai}}{2(d-1)\pi} \varepsilon_{ip} + \frac{1}{2(d-1)\pi} \sum_{j=1}^g a_{ij} \chi_{sj} \varepsilon_j^{(0)} + \frac{Q_i}{2(d-1)\pi}, \quad i = \overline{1, g};$$

$$L\varepsilon_i = \mu \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sqrt{1 - \mu^2} \varepsilon_i \cos \varphi \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sqrt{1 - \mu^2} \varepsilon_i \sin \varphi \right) + (d-2) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\sqrt{1 - \mu^2} \varepsilon_i \sin \varphi \right); \quad (11)$$

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \sum_{i=1}^g \chi_{oi} \varepsilon_i^{(0)} \Delta \omega_i - \sum_{i=1}^g \chi_{ai} \varepsilon_{ip} \Delta \omega_i - \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g a_{ij} \chi_{sj} \varepsilon_j^{(0)} \Delta \omega_i, \quad \varepsilon_i^{(0)} = \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{(d-1)\pi} \varepsilon_i d\varphi. \quad (12)$$

Здесь i, j — номера энергетических групп; c — скорость света; ω_i — средняя энергия фотонов в i -й группе; $\Delta \omega_i$ — ширина интервала по энергетической переменной; $\varepsilon_i = \varepsilon_i(r, z, \Phi, \mu, \varphi, \omega_i, t)$ — поток энергии излучения в направлении, определяемом единичным вектором $\vec{\Omega}(\mu, \varphi)$; $T(r, z)$ — температура вещества; ρ — плотность вещества; $\chi_{ai} = \chi_{ai}(\rho, T, \omega_i)$ — сечение поглощения фотонов; $\chi_{si} = \chi_{si}(\rho, T, \omega_i)$ — сечение рассеяния фотонов; $\chi_{oi} = \chi_{ai} + \chi_{si}$ — полное сечение; a_{ij} — коэффициенты, описывающие обмен энергией при комптоновском рассеянии; $\varepsilon_{ip}(T, \omega_i)$ — функция Планка; $Q_i = Q_i(r, z, \Phi, \omega_i)$ — независимый источник; $E(\rho, T)$ — внутренняя энергия. Остальные обозначения те же, что в (1), (2).

Система (11), (12), дополненная начальными и граничными условиями, аналогичными (3)–(6), решается в области фазового пространства $D = \{(r, z) \in L(\Phi), \Phi_1 \leq \Phi \leq \Phi_2; -1 \leq \mu \leq 1; 0 \leq \varphi \leq (d-1)\pi\}$.

Двумерные задачи переноса быстрых заряженных частиц. Быстрые заряженные частицы, рожденные в термоядерных и нейтронно-ядерных реакциях, теряют энергию несколькими способами: при малоугловых столкновениях с ионами, составляющими плазму; при торможении на электронах; при сильноугловых столкновениях (реже). В методике САТУРН предполагается, что заряженные частицы теряют энергию в результате малоуглового кулоновского рассеяния на ионах и электронах среды. Большое количество малоугловых рассеяний представляется как средняя тормозная сила, действующая на заряженную частицу.

В этих предположениях пространственно двумерное кинетическое уравнение, описывающее перенос быстрых заряженных частиц (ионов) в плазме, учитывающее кулоновское торможение на электронах и ионах среды и возможность вступления в реакции, записывается в цилиндрической системе координат следующим образом:

$$\frac{\partial (N_i)}{\partial t} + LN_i + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (a_i v^2 N_i) + \alpha_i N_i v = \frac{Q_i}{2\pi}, \quad (13)$$

$$LN_i \equiv \frac{v \partial}{r \partial r} \left(r \sqrt{1 - \mu^2} N_i \cos \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu N_i v) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{r} N_i v \sin \varphi \right). \quad (14)$$

Здесь r, z — цилиндрические координаты; v — скорость полета частиц; α_i — сечение взаимодействия быстрой заряженной частицы со средой, $\alpha_i = \sum_j \alpha_{ij}$, где α_{ij} — сечение взаимодействия быстрой заряженной частицы i -го сорта с ядром j -го сорта; $N_i = N_i(t, r, z, \mu, \varphi, v)$ — функция распределения частиц i -го сорта; $Q_i = Q_i(t, r, z, v)$ — источник частиц; $a_i = a_{ei} + a_{iu}$ определяют скорость кулоновского торможения быстрых ионов на электронах и ионах среды. Остальные обозначения те же, что в (1), (2).

Уравнения (13), (14) решаются в области фазового пространства $D = \{(r, z) \in L; v_1 \leq v \leq v_2; -1 \leq \mu \leq 1; 0 \leq \varphi \leq \pi\}$, где L — сечение тела вращения плоскостью, проходящей через ось Z ; v_1, v_2 — ограничивающие область решения значения скорости.

Граничное условие на внешней поверхности задается при $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0$ в виде

$$N(t, r, z, v, \mu, \varphi)_{(r,z) \in \Gamma} = \psi_1(t, r_\Gamma, z_\Gamma, v, \mu, \varphi),$$

где Γ — образующая тела вращения; \vec{n} — внешняя нормаль к поверхности тела вращения; $\psi_1(t, r_\Gamma, z_\Gamma, v, \mu, \varphi)$ — заданная функция.

Граничное условие для $v = v_2$ задается в виде $N(t, r, z, v, \mu, \varphi)_{v=v_2} = 0$. Остальные граничные и начальное условие аналогичны (3)–(6).

Учитывается перенос для пяти сортов частиц: протонов, дейтронов, тритонов, ^3He и α -частиц. Одним из основных отличий в решении уравнений (13), (14) по сравнению с уравнением переноса нейтронов (1), (2) является наличие дополнительной производной $\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (a_i v^2 N_i)$, отвечающей за кулоновское торможение частиц на электронах и ионах среды. Это отличие учитывается при аппроксимации уравнения переноса быстрых заряженных частиц и соответственно изменяет схему расчета.

Двумерные и трехмерные задачи переноса рентгеновского излучения, электронов и ионов в диффузионном приближении.

Перенос излучения в приближении многогрупповой диффузии. Диффузионная многогрупповая физико-математическая модель переноса рентгеновского излучения описывается следующей системой уравнений [1]:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial U_i}{\partial t} = -\text{div} \left(\frac{1}{3K_i} \text{grad } U_i \right) + K_{ia} U_i = K_{ia} U_{ip}, \quad i = \overline{1, g}. \quad (15)$$

Взаимодействие излучения с веществом учитывается следующим образом:

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \sum_{i=1}^g K_{ia} (U_i - U_{ip}) \Delta \omega_i. \quad (16)$$

Здесь t — время; r, Φ, z — цилиндрические координаты; $U_i = U_i(r, \Phi, z, t)$ — плотность излучения в группе i ; $E = E(\rho, t)$ — внутренняя энергия; $\rho = \rho(r, \Phi, z, t)$ — плотность вещества; $T = T(r, \Phi, z, t)$ — температура вещества; $U_{ip} = U_{ip}(T)$ — плотность равновесного излучения в группе i ; $K_{ia} = K_{ia}(\rho, T)$ — коэффициент поглощения в группе i ; $K_{is} = K_{is}(\rho, T)$ — коэффициент рассеяния в группе i ; $K_i = K_{ia}(\rho, T) + K_{is}(\rho, T)$.

Начальные условия: $U_i(r, \Phi, z, t)|_{t=t_0} = \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad E(\rho, T)|_{t=t_0} = \psi$.

Граничные условия:

$$\left(\alpha_i \frac{1}{3K_i} \frac{\partial U_i}{\partial \vec{n}} + \beta_i U_i \right) \Big|_{r, \Phi, z \in \Gamma} = \varphi_i.$$

Здесь $\psi_i = \psi_i(r, \Phi, z); \quad \psi = \psi(r, \Phi, z); \quad \alpha_i = \alpha_i(r_\Gamma, \Phi_\Gamma, z_\Gamma, t); \quad \beta_i = \beta_i(r_\Gamma, \Phi_\Gamma, z_\Gamma, t); \quad \varphi_i = \varphi_i(r_\Gamma, \Phi_\Gamma, z_\Gamma, t)$ — заданные функции; \vec{n} — внешняя нормаль к поверхности системы.

Перенос излучения в приближении лучистой теплопроводности. Перенос теплового излучения в приближении лучистой теплопроводности описывается следующим уравнением в операторном виде:

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \text{div} (\lambda \text{grad } U), \quad (17)$$

где $U = U(r, \Phi, z, t) = T^4(r, \Phi, z, t)$ — искомая функция температуры; $\lambda = \lambda(U, \rho)$ — коэффициент теплопроводности среды. Остальные обозначения те же, что для системы (15), (16).

Уравнение (17) необходимо дополнить начальным и граничным условиями.

Начальное условие: $E(U, \rho)|_{t=t_0} \equiv E_0 = \psi$, где $\psi = \psi(r, \Phi, z) \geq 0$ — заданная функция.

Граничное условие в общем случае:

$$\left(\alpha \lambda \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} + \beta U \right) \Big|_{(r, \Phi, z) \in \Gamma} = \theta,$$

где Γ — граница трехмерной области; $\alpha = \alpha(r_\Gamma, \Phi_\Gamma, z_\Gamma, t); \quad \beta = \beta(r_\Gamma, \Phi_\Gamma, z_\Gamma, t); \quad \theta = \theta(r_\Gamma, \Phi_\Gamma, z_\Gamma, t)$ — заданные функции.

Перенос энергии электронами и ионами в приближении теплопроводности. Перенос энергии электронами, ионами и процесс их взаимодействия описывается следующей системой уравнений:

$$\rho \frac{\partial E_{el}}{\partial t} = \operatorname{div} K_{el} \operatorname{grad} T_{el} + Q_{el}; \quad (18)$$

$$\rho \frac{\partial E_{ion}}{\partial t} = \operatorname{div} K_{ion} \operatorname{grad} T_{ion} + Q_{ion}; \quad (19)$$

$$\frac{\partial E_{el}}{\partial t} = c_{el-ion} (T_{ion} - T_{el}); \quad (20)$$

$$\frac{\partial E_{ion}}{\partial t} = c_{el-ion} (T_{el} - T_{ion}), \quad (21)$$

где $T_{el} = T_{el}(r, \Phi, z, t)$ — температура электронов; $T_{ion} = T_{ion}(r, \Phi, z, t)$ — температура ионов; $E_{el} = E_{el}(\rho, t, T_{el})$ — внутренняя энергия электронов; $E_{ion} = E_{ion}(\rho, t, T_{ion})$ — внутренняя энергия ионов; $K_{el} = K_{el}(r, \Phi, z, \rho, T_{el})$ — коэффициент электронной теплопроводности; $K_{ion} = K_{ion}(r, \Phi, z, \rho, T_{ion})$ — коэффициент ионной теплопроводности; $Q_{el} = Q_{el}(r, \Phi, z, t)$, $Q_{ion} = Q_{ion}(r, \Phi, z, t)$ — независимые источники энергии электронов и ионов соответственно; c_{el-ion} — коэффициент электронно-ионной релаксации. Остальные обозначения те же, что для системы (15), (16).

Система (18)–(21) дополняется начальными и граничными условиями

$$E_{el}(\rho, t, T_{el})|_{t=t_0} = (E_{el})_0; \quad E_{ion}(\rho, t, T_{ion})|_{t=t_0} = (E_{ion})_0;$$

$$\left(\alpha_{el} T_{el} + K_{el} \frac{\partial T_{el}}{\partial \vec{n}} \right) \Big|_{(r, \Phi, z) \in \Gamma} = (\varphi_{el})_{\Gamma}; \quad \left(\alpha_{ion} T_{ion} + K_{ion} \frac{\partial T_{ion}}{\partial \vec{n}} \right) \Big|_{(r, \Phi, z) \in \Gamma} = (\varphi_{ion})_{\Gamma},$$

где α_{el} , α_{ion} , $(\varphi_{el})_{\Gamma}$, $(\varphi_{ion})_{\Gamma}$ — заданные функции; \vec{n} — внешняя нормаль к поверхности.

Методы численного решения задач переноса

Численное решение осесимметричных задач переноса в методике САТУРН как в кинетическом, так и в диффузионном приближении осуществляется с использованием двух классов неортогональных пространственных сеток. Один класс включает в себя структурированные четырехугольные пространственные сетки, т. е. сетки матричной структуры, образованные из произвольных четырехугольников. Другой класс пространственных сеток — это неструктурированные сетки, образованные из произвольных многоугольников [6]. Пространственные сетки строятся независимо в каждой математической области. Тип сетки в области выбирается с учетом особенностей как ее геометрии, так и протекания в ней физических процессов.

Численное решение трехмерных задач переноса в кинетическом и диффузионном приближениях осуществляется с применением в математических областях структурированных неортогональных пространственных сеток из произвольных шестигранников [2, 7] (параллелепипедов при использовании декартовой системы координат). При этом сетка по одной из пространственных переменных образуется семейством плоскостей (листов). По двум оставшимся пространственным переменным на каждом из таких листов вводится описанная выше структурированная неортогональная четырехугольная пространственная сетка. Структура двумерных сеток (число строк и столбцов) на всех листах одинаковая.

Сеточная аппроксимация и численное решение многогрупповых кинетических уравнений. Нестационарное кинетическое уравнение по переменной времени аппроксимируется неявной схемой с весовыми множителями [8, 9]. Для дискретизации уравнения по угловым переменным применяются ES_n -квадратуры [10].

Особенностью разностных схем [9], используемых в методике САТУРН для аппроксимации кинетического уравнения, является применение расширенного шаблона. При этом аппроксимация строится, как и в традиционных схемах DS_n - и S_n -методов [5], в рамках одной пространственной ячейки. В двумерном случае шаблон включает в себя средние значения искомой функции на ребрах

многоугольных ячеек сетки, в самих ячейках, а также значения функции в вершинах ячеек. Для трехмерной цилиндрической геометрии [2] шаблон состоит из средних значений искомой функции на гранях многогранной ячейки, ее боковых ребрах и в ее центре; для декартовой сетки шаблон включает значения функции на гранях многогранной ячейки и в ее центре.

Помимо схем [6, 8, 9], в методике САТУРН используется схема [11], в которой сеточные значения искомой функции на сторонах и в центрах ячеек определяются как основные, а значения в вершинах ячейки используются как вспомогательные.

Возможность экономичного численного решения системы многогрупповых сеточных кинетических уравнений основывается на трех основных положениях:

- 1) преобразование матрицы системы сеточных уравнений переноса с заданной правой частью к треугольному виду как в двумерном [12, 6], так и трехмерном [2] (с использованием специальных алгоритмов) случае;
- 2) применение метода простых итераций для решения связанных через правую часть многогрупповых уравнений переноса;
- 3) использование методов ускорения сходимости простых итераций.

Для ускорения сходимости итераций внутри группы применяется метод независимых поправок [8], при решении задач переноса излучения используется КМ-метод [13].

Численное решение систем линейных уравнений для большинства физических процессов трехмерного и двумерного переноса в кинетическом приближении (перенос фотонов, гамма-излучения, стационарный и нестационарный перенос нейтронов), записанных в цилиндрической системе координат, выполняется в методике САТУРН с помощью единого решателя. Единый решатель — это программа, предназначенная для решения в параллельном режиме унифицированного пространственно двумерно-трехмерного уравнения переноса для заданной порции энергетических групп.

Решение уравнения переноса выполняется для всех направлений полета частиц в соответствующей подобласти по пространственным переменным методом бегущего счета. Операции на уровне точки фазового пространства задачи вынесены в отдельные блоки — счетные подпрограммы, вызываемые из решателя.

Использование единого решателя позволяет существенно минимизировать затраты разработчиков при внедрении новых или модификации существующих разностных схем и алгоритмов распараллеливания.

Сеточная аппроксимация и численное решение многогрупповых уравнений переноса быстрых заряженных частиц. Численное решение нестационарного многогруппового уравнения переноса быстрых заряженных частиц выполняется в двумерной цилиндрической геометрии на структурированных сетках, состоящих из произвольных четырехугольников. Для получения конечно-разностной системы уравнений используется интегроинтерполяционный метод с системой дополнительных соотношений, которые получаются при анализе освещенности каждой расчетной ячейки.

Уравнения решаются для каждого сорта заряженных частиц: Н, D, T, ^3He , α -частиц. Уравнения для всех энергетических групп аппроксимируются на единой сетке по угловым переменным. Для каждого сорта частиц формируется сетка по скорости (по группам). Решение по группам осуществляется последовательно (начиная с максимального значения скорости) с использованием решения, полученного для предыдущей группы.

Система разбивается на независимые подсистемы, каждая из которых отвечает множеству направлений угловой сетки с фиксированным интервалом по переменной μ . Подсистемы разностных уравнений, отвечающих выбранной группе, решаются последовательно для всех значений угловых переменных.

По пространственным ячейкам система линейных уравнений разрешается методом бегущего счета аналогично решению кинетического уравнения для нейтронов и излучения.

Численное решение стационарных уравнений переноса нейтронов для определения критических параметров. Для нахождения критического параметра λ численно (итерационно)

решается стационарное многомерное уравнение переноса в многогрупповом кинетическом приближении:

$$\left[LN_i + \left(\alpha_i + \frac{\lambda^m}{v_i} \right) N_i \right]^{(m,n)} = \left[\left(\sum_{j=1}^g \beta_{ij} n_j^{(0)} \right) G_i \right]^{(m,n-1)}.$$

В задаче определения значения параметра K_{eff} решается следующее уравнение:

$$(LN_i + \alpha_i N_i)^{(m,n)} = \left[\left(\sum_{j=1}^g \beta_{ij}^S n_j^{(0)} \right) G_i + \frac{1}{2(d-1)\pi} \frac{1}{K_{eff}^m} \left(\sum_{j=1}^g \beta_{ij}^F n_j^{(0)} \right) \right]^{(m,n-1)},$$

$$n_i^{(0)} = \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{(d-1)\pi} N_i d\varphi.$$

Здесь β_{ij} — матрица размножения нейтронов (β_{ij}^S — рассеяния, β_{ij}^F — деления); n — номер внутренней итерации по правой части; m — номер внешней итерации (попытки) по уточнению значения критического параметра; λ , K_{eff} — критические параметры. Остальные обозначения те же, что в (1), (2).

Для численного определения значений критических параметров в методике САТУРН реализован метод Келлога [14].

Сеточная аппроксимация и численное решение уравнений, описывающих процессы многогрупповой диффузии и теплопроводности. В основу численного решения уравнений диффузионного типа положена методика ТУРЭК [15]. Основные положения этой методики заключаются в следующем:

1. По переменной времени используется полностью неявная схема.
2. Пространственная аппроксимация осуществляется на структурированной четырехугольной сетке с использованием схемы смешанного типа: для аппроксимации потокового члена применяется метод конечных элементов на линейных пробных функциях, аппроксимация члена изменения энергии осуществляется по аппроксимационно-инвариантной схеме. Привлекаются ячейки консервативности, окружающие узлы сетки. При этом используется сеточный шаблон, включающий значения искомой функции в вершинах и центрах ячеек сетки. Такой подход обеспечивает приемлемую точность численного решения задач диффузии на существенно неортогональных сетках и сохранение в сеточном операторе важнейших свойств исходного дифференциального оператора диффузии — самосопряженности и положительной определенности.
3. При линейризации уравнений теплопроводности на одном шаге по времени используется метод Ньютона по энергии и простые итерации по коэффициенту теплопроводности.
4. Для решения линейризованных систем разностных уравнений могут быть использованы как полная факторизация Холецкого, так и решатели из библиотеки PMLP/LParsol [16].

Методы распараллеливания численного решения многомерных задач переноса

Алгоритмы распараллеливания для решения уравнения переноса в кинетическом приближении. В рамках методике САТУРН реализован ряд алгоритмов распараллеливания с использованием модели распределенной памяти:

- алгоритм распараллеливания по энергетическим группам;
- итерационный алгоритм распараллеливания по математическим областям;
- безытерационные алгоритмы мелкоблочного распараллеливания [17, 18];
- различные комбинации всех перечисленных алгоритмов.

Базовыми являются алгоритмы мелкоблочного распараллеливания, обладающие следующими свойствами:

1. Они предназначены для распараллеливания численного решения уравнения переноса частиц с заданными правой частью и граничными условиями в рамках одной математической области.
2. Декомпозиция по данным и по вычислительной работе основана на разбиении пространственной сетки математической области на подобласти (*параобласти*). Параобласть — это связанное множество ячеек пространственной сетки одной математической области, рассчитываемое на одном процессоре (ядре). В случае структурированных двумерных и трехмерных пространственных сеток декомпозиция осуществляется регулярным образом по строкам, столбцам и слоям. Разбиение выполняется без перехлестов. Основным критерий разбиения — примерно одинаковое количество ячеек пространственной сетки во всех параобластях.
3. В каждой параобласти решается локальная задача переноса с граничными условиями, вычисленными на текущей итерации. Алгоритмы реализуют сквозной или параллельный бегущий счет по параобластям, что классифицирует их как алгоритмы распараллеливания волнового типа. Результаты полностью совпадают при счете на любом количестве процессоров (ядер универсальных процессоров). Количество итераций по правой части не зависит от количества параобластей.
4. Алгоритмы оперируют множеством параллельных конвейеров. Каждый параллельный конвейер организуется на следующих ресурсах:
 - направления полета частиц;
 - трехмерные слои пространственной сетки (в трехмерной геометрии);
 - энергетические группы.

Один такт работы конвейера определяется локальным бегущим счетом в параобласти (или в одном трехмерном слое пространственной сетки параобласти). Объем вычислений на одном такте (зернистость алгоритма) может быть увеличен за счет трехмерных слоев пространственной сетки и/или энергетических групп. В таком режиме параллельный бегущий счет организуется для порции групп/слоев одновременно.

5. Все параллельные конвейеры стартуют одновременно. Количество конвейеров определяется числом интервалов по угловой переменной μ в угловом полупространстве или порядком используемой угловой квадратуры. Количество конвейеров может быть дополнительно увеличено за счет ресурса групп. Основная стратегия управления работой параллельных конвейеров — самоупорядочение. Порядок численного решения определяется очередностью приема граничных условий. Эффективность такой стратегии обусловлена независимостью параллельных конвейеров.
6. Для случая трехмерной пространственной декомпозиции применяется эффективная комбинация двух алгоритмов распараллеливания — мелкоблочного [17, 18] и конвейерного типа по третьей пространственной переменной [19].
7. Программная реализация алгоритмов выполнена в модели распределенной памяти с учетом совмещения счета с межпроцессорными обменами путем полного отказа от использования любых блокирующих средств стандарта MPI.

Алгоритмы мелкоблочного распараллеливания в силу своей конвейерной природы не предполагают 100 % теоретической эффективности распараллеливания. Однако они обладают большим потенциалом масштабирования за счет свойства неувеличения числа итераций с увеличением числа MPI-процессов, а также за счет широких возможностей по обеспечению достаточной зернистости.

Наиболее развитым в данной группе алгоритмов является алгоритм мелкоблочного распараллеливания для численного решения унифицированного пространственно двумерно-трехмерного уравнения переноса, записанного в цилиндрической системе координат на существенно неортогональных структурированных пространственных сетках. Для данного алгоритма решена задача масштабирования до 10^5 MPI-процессов с эффективностью распараллеливания выше 50 %.

Кроме инструментальных средств оценки эффективности расчетов, в рамках данного алгоритма разработана модель производительности, которая непосредственно в ходе счета и без использования

аппарата временных засечек рассчитывает значение теоретической эффективности распараллеливания.

Алгоритмы распараллеливания для решения уравнения переноса в приближении многогрупповой диффузии и теплопроводности. В основу алгоритма распараллеливания решения уравнения диффузии положен принцип геометрической декомпозиции. Разностная аппроксимация дифференциальных уравнений при этом сохраняется, а математическая область разбивается на несколько параобластей, между которыми происходит обмен необходимой информацией.

При решении уравнений диффузионного типа в методике САТУРН применяются два различных способа организации параллельного счета:

1. *Распараллеливание средствами библиотеки параллельных решателей PMLP/LParsol [16].* Библиотека PMLP/LParsol предназначена для решения больших разреженных линейных систем, возникающих при дискретизации дифференциальных уравнений. На каждом процессоре размещается соответствующая порция строк всей (глобальной) матрицы и вектора правой части. Проинициализированная и заполненная распределенная система решается одним из итерационных методов библиотеки PMLP/LParsol.
2. *Распараллеливание с итерациями по внутренним граничным условиям.* Для параобластей при решении уравнений диффузии в методике САТУРН применимы все основные положения методики ТУРЭК [15] (т. е. параобласти рассчитываются независимо, как это происходит при многообластном счете). При этом влияние соседних параобластей друг на друга осуществляется за счет взаимного обмена внутренними граничными условиями специального вида. Используется хорошо зарекомендовавший себя итерационный тип передачи внутренних условий, когда в каждую из соседних параобластей передается комбинация потока и температуры $F = W + \alpha U$ [20, 21] (аналогичный подход использовался при распараллеливании трехмерного уравнения диффузии нейтронов [7]). Этот вариант обмена обладает безусловной устойчивостью, хотя и увеличивает общее количество итераций.

Заключение

Статья посвящена обзору основных методов и программ численного моделирования процессов переноса, реализованных в методике САТУРН-2005. Рассмотрены двумерные и трехмерные уравнения переноса нейтронов, фотонов, быстрых заряженных частиц, ионов и электронов в кинетическом и диффузионном приближениях. Изложены основные положения, на которых базируется методика; сформулированы физико-математические модели и описаны положения математических методов и алгоритмов, используемых для решения рассмотренных классов многомерных задач.

Особое внимание уделено распараллеливанию численного решения уравнения переноса. Используемые в методике САТУРН алгоритмы распараллеливания позволяют существенно ускорять численное решение сложнейших задач математической физики с применением современных мультипроцессорных суперЭВМ.

Основными направлениями развития методики САТУРН в настоящее время являются:

- внедрение адаптивных технологий;
- ориентация на применение современных сопроцессоров и арифметических ускорителей;
- использование новых численных методов решения уравнений;
- повышение уровня сервиса.

Список литературы

1. Шагалиев Р. М., Шумилин В. А., Алексеев А. В. и др. Математические модели и методики решения многомерных задач переноса частиц и энергии, реализованные в комплексе САТУРН-3 // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 4. С. 20–26.

2. Алексеев А. В., Евдокимов В. В., Шагалиев Р. М. Методика численного решения нестационарного трехмерного уравнения переноса частиц в комплексе САТУРН // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып. 3. С. 3–8.
3. Алексеев А. В., Бочков А. И., Евдокимов В. В. и др. Результаты численных исследований адаптивного по угловым переменным метода решения двумерного уравнения переноса излучения // Там же. 2007. Вып. 1. С. 27–37.
4. Бочков А. И., Сучкова В. В., Трубицын А. П. DS_n -метод решения двумерного кинетического уравнения переноса, записанного в сферической системе координат // Там же. 2011. Вып. 2. С. 44–55.
5. Басс А. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А. Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучений. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1986.
6. Москвин А. Н., Шумилин В. А. Методика решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных многоугольных сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 1. С. 31–40.
7. Алексеев А. В., Софронов И. Д., Федотова Л. П., Шагалиев Р. М. Численные исследования алгоритмов распараллеливания трехмерных задач диффузии и переноса нейтронов в комплексе САТУРН на многопроцессорных ЭВМ // Там же. 1996. Вып. 4. С. 16–23.
8. Троцкий В. Е., Шумилин В. А. Разностная схема решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных четырехугольных сетках // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1986. Т. 266, № 2. С. 230–241.
9. Плетенёва Н. П., Шагалиев Р. М. Аппроксимация двумерного уравнения переноса на четырехугольных и многоугольных пространственных сетках по разностной схеме с расширенным шаблоном // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3. С. 34–40.
10. Шагалиев Р. М., Алексеев А. В., Мясчиц С. В., Плетенёва Н. П. Некоторые методы аппроксимации двумерного уравнения переноса по угловым переменным // Там же. 2003. Вып. 2. С. 5–11.
11. Бочков А. И., Шумилин В. А. Схема типа DS_n -метода решения двумерного уравнения переноса на четырехугольных пространственных сетках // Там же. 2008. Вып. 4. С. 13–18.
12. Троцкий В. Е. О классах сеток, допускающих консервативные аппроксимации двумерного оператора переноса треугольным разностным оператором // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1976. Т. 16, № 3. С. 793–797.
13. Федотова Л. П., Шагалиев Р. М. Конечно-разностный КМ-метод для математического моделирования двумерных нестационарных процессов переноса в многогрупповом кинетическом приближении // Математическое моделирование. 1991. Т. 3, № 6. С. 29–42.
14. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. С. 268.
15. Троцкий В. Е., Шагалиев Р. М. Класс интерполяционно-инвариантных схем для численного решения уравнения теплопроводности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1983. Вып. 3. С. 73–76.
16. Артемьев А. Ю., Бартенев Ю. Г., Басалов В. Г. и др. Библиотека решателей разреженных линейных систем // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2004. Вып. 7. С. 80–95.
17. Нуждин А. А., Шагалиев Р. М. Развитие алгоритмов распараллеливания численного решения многомерного кинетического уравнения, основанных на пространственной декомпозиции // IX Межд. семинар «Супервычисления и математическое моделирование». Саров, 3–7 октября 2006 г.

18. *Алексеев А. В., Нуждин А. А., Шагалиев Р. М.* Метод мелкозернистого распараллеливания двумерных и трехмерных задач переноса на неортогональных сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2001. Вып. 2. С. 3–10.
19. *Алексеев А. В., Шагалиев Р. М.* Алгоритм распараллеливания численного решения трехмерного уравнения переноса в комплексе САТУРН // Там же. 1993. Вып. 3. С. 3–7.
20. *Шагалиев Р. М.* Об одном устойчивом алгоритме раздельного счета по областям двумерного уравнения теплопроводности по узловой разностной схеме // Там же. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1984. Вып. 3. С. 25–33.
21. *Софронов И. Д.* О прогоночных коэффициентах // Там же. 1982. Вып. 2. С. 3–13.

Статья поступила в редакцию 25.05.13.
