УДК 532.546, 624.131.522

ЗАДАЧИ ГИДРОГЕОМЕХАНИКИ В ФИЛЬТРУЮЩИХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ С ПОРИСТЫМ СКЕЛЕТОМ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

У. В. Михеева, М. Г. Храмченков, Э. М. Храмченков, А. Н. Чекалин
(РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров; НИИММ им. Н. Г. Чеботарева КФУ, г. Казань)

Исследуются уравнения гидрогеомеханики для фильтрующих пористых сред с пористым скелетом переменной массы. Изменение массы пористого скелета обусловлено протеканием гетерогенных химических реакций. Проанализированы следствия выявленных закономерностей массопереноса и деформирования в таких средах, исследованы особенности получения реологических соотношений.

Ключевые слова: масса пористого скелета, гидрогеомеханика, фильтрация, деформации, напряжения, реология, растворение, модель.

Введение

Модели гидрогеомеханики являются основой для решения многих важных как для науки, так и для практического применения задач гидрогеологии, гидрогеоэкологии, нефтедобычи, геофизики. Основные сложившиеся концепции гидрогеомеханики изложены, например, в [1, 2]. В последнее время в связи с проблемами истощения запасов нефти ряда отечественных месторождений все чаще применяются методы интенсификации нефтеотдачи; возникают также некоторе задачи гидрогеоэкологического характера (фильтрация рассолов в глинистых толщах, суффозионные процессы, карст). Этим объясняется рост интереса к постановкам задач, в которых должны учитываться изменения напряженно-деформированного состояния горных пород, связанные с протеканием в подземной системе химических реакций между компонентами подземного флюида и веществом пористого скелета (межфазные взаимодействия).

Поскольку такие взаимодействия сопровождаются, как правило, изменением массы пористого скелета, приходится изучать влияние такого изменения на реологические соотношения, необходимые для замыкания задачи об определении напряженно-деформированного состояния фильтрующей пористой среды. Кроме того, в данном случае необходим систематический вывод основных уравнений подземного массопереноса.

На сегодняшний момент эти вопросы далеко не исчерпывающе освещены в специализированной научной литературе, поэтому имеет смысл получить необходимые уравнения и на их основе приступать к решению важнейших задач.

Уравнение баланса массы вещества пористого скелета и фильтрующейся жидкости

Сначала необходимо построить систему уравнений фильтрации в деформируемой пористой среде с пористым скелетом переменной массы. Из определения коэффициента кубического расширения θ [3]

$$\theta = \frac{V - V_0}{V_0};$$

в предположении малости значений θ можем легко получить следующее соотношение:

$$V = V_0 V \exp\theta,$$

где V — объем представительного элемента пористой среды, V_0 — значение этого объема в начальный момент времени. Тогда для массы вещества пористого скелета M_s справедливо

$$M_s = (1-m)\,\rho_s V_0 \exp\theta, \tag{1}$$

где ρ_s — плотность вещества твердой фазы; m — пористость породы. Продифференцируем уравнение (1) по времени и преобразуем результат к виду

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{1-m}{\rho_s}\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + (1-m)\,\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1-m}{M_s}\frac{\partial M_s}{\partial t}. \tag{2}$$

Запишем теперь уравнение баланса (переноса) массы твердого вещества пористого скелета грунта:

$$\frac{\partial\left[(1-m)\,\rho_s\right]}{\partial t} + \operatorname{div}\left[(1-m)\,\rho_s \mathbf{W}\right] = j. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{W}$ — скорость движения вещества твердой фазы; j — источник/сток массы вещества пористого скелета за счет межфазного взаимодействия. Будем предполагать, не уменьшая общности, что пористый скелет теряет массу в ходе межфазного взаимодействия, так что в дальнейшем под j будем понимать сток.

Для массы вещества пористого скелета в составе представительного элемента пористой среды можно записать

$$\rho_s V_s = \rho_s\,(1-m)\,V = M_s,$$

где V_s — объем твердой фазы в составе представительного элемента. Сток в уравнении (3), образующийся за счет потери массы пористого скелета в процессах, подобных растворению, выщелачиванию или суффозии, равен

$$j = \frac{1}{V}\frac{\partial M_s}{\partial t}. \tag{4}$$

Рассмотрим уравнение (3). Дифференцируя, получаем

$$-\frac{\partial m}{\partial t}\rho_s + (1-m)\,\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + (1-m)\,\rho_s \operatorname{div}\mathbf{W} + \mathbf{W}\operatorname{grad}\left[(1-m)\,\rho_s\right] = j. \tag{5}$$

Используя (2) и (4) и отбрасывая последний член в (5) как член второго порядка малости, имеем в итоге

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{div}\mathbf{W}. \tag{6}$$

Факт малости последнего члена в (5) объясняется традиционным для механики пористых сред образом [4]. Из известного соотношения Терцаги $P = \sigma^f + p$, где P — внешняя нагрузка на грунт, σ^f — эффективное напряжение, p — давление в жидкости, следует, что для $\operatorname{grad} P = 0$ справедливо $\operatorname{grad}\sigma^f = -\operatorname{grad} p$. Поскольку пористость грунта m и плотность твердой фазы ρ_s являются функциями аргументов σ^f и p, то с учетом последнего соотношения член $\mathbf{W}\operatorname{grad}\left[(1-m)\,\rho_s\right]$ в уравнении (5) пропорционален произведению $\mathbf{W}\operatorname{grad} p$, следовательно, с учетом закона Дарси, — произведению скорости $\mathbf{W}$ и скорости фильтрации $\mathbf{q}$. Механика пористых сред изучает процессы, протекающие с малыми скоростями, поэтому член, содержащий вторую степень скорости, может быть отброшен.

Запишем уравнение баланса (переноса) массы флюида-растворителя (в качестве него, как правило, выступает вода) во флюидонасыщенной горной породе:

$$\frac{\partial\,(m\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}\,(m\rho\mathbf{V}) = 0. \tag{7}$$

Здесь ρ — плотность флюида; $\mathbf{V}$ — скорость движения флюида.

Введя относительную скорость движения флюида в грунте (скорость фильтрации) $\mathbf{q} = m(\mathbf{V} - \mathbf{W})$, получим на основании уравнений (6) и (7)

$$m\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial m}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{q}) + \operatorname{div}(\rho m\mathbf{W}) = 0. \tag{8}$$

Преобразуя (8) и пренебрегая по тем же причинам, что и выше, членами второго порядка малости $\mathbf{q}\operatorname{grad}\rho$, $\mathbf{W}\operatorname{grad}(m\rho)$, получаем

$$m\rho^{-1}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{q} + m\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0. \tag{9}$$

С учетом (2) уравнение (9) переходит в уравнение

$$m\rho^{-1}\frac{\partial \rho}{\partial t} + (1-m)\,\rho_s^{-1}\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{q} = \frac{(1-m)}{M_s}\frac{\partial M_s}{\partial t}. \tag{10}$$

Рассмотрим второй член левой части уравнения (10). Очевидно, что

$$(1-m)\,\rho_s^{-1}\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = \frac{(1-m)\,V_s}{M_s}\frac{\partial\left(\dfrac{M_s}{V_s}\right)}{\partial t}. \tag{11}$$

Дифференцируя, получаем из (10)

$$(1-m)\,\rho^{-1}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{q} = \frac{(1-m)}{V_s}\frac{\partial V_s}{\partial t}. \tag{12}$$

Член в правой части (12) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{1-m}{V_s}\frac{\partial V_s}{\partial t} = (1-m)\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial t},$$

где ε есть, согласно определению [3], объемная деформация (сумма диагональных компонентов тензора деформаций) твердой фазы пористого скелета. Тогда из (12) следует

$$(1-m)\,\rho^{-1}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{q} = (1-m)\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \tag{13}$$

Вода относится к чрезвычайно слабо сжимаемым жидкостям, поэтому первым членом левой части уравнения (13) можно пренебречь. В результате имеем

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{q} = (1-m)\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \tag{14}$$

Проинтегрировав уравнение (14) по времени и взяв интеграл в правой части по частям, получим

$$\theta + \int\limits_0^t \operatorname{div}\mathbf{q}\,d\tau = (1-m)\,\varepsilon + \int\limits_0^t \varepsilon\frac{\partial m}{\partial t}\,d\tau. \tag{15}$$

Используя соотношения (2) и (11), из (15) получаем

$$\theta + \int\limits_0^t \operatorname{div}\mathbf{q}\,d\tau = (1-m)\,\varepsilon + \int\limits_0^t \varepsilon\left[(1-m)\,\frac{\partial \theta}{\partial t} - (1-m)\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right]d\tau. \tag{16}$$

Оценим последний член правой части уравнения (16). Очевидно, $\varepsilon \leq \theta$, поэтому

$$\int_0^t \varepsilon \left[(1-m)\,\frac{\partial \theta}{\partial t} - (1-m)\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right] d\tau \leq \int_0^t \left[(1-m)\,\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} - (1-m)\,\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right] d\tau.$$

Поскольку последний интеграл содержит производные по времени от квадратов малых величин ε и θ, этим членом можно пренебречь. Окончательно получим

$$\theta + \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{q}\, d\tau = (1-m)\,\varepsilon. \tag{17}$$

Уравнение (17) имеет простой физический смысл: общая деформация пористой среды складывается из объема отжатой за время фильтрации жидкости и деформации собственно пористого скелета.

Реологические соотношения для фильтрующих пористых сред с пористым скелетом переменной массы

Обычно вид реологических соотношений для пористых сред получают из анализа выражения для свободной энергии пористой среды [1]. Поскольку диссипацию за счет протекающих в системе химических реакций обычно не включают в последующий анализ, пользоваться традиционным подходом в данном случае затруднительно.

Для получения реологических соотношений, необходимых для замыкания системы уравнений подземного массопереноса, не уменьшая общности, будем считать твердый скелет грунта упругим, так что на основании [3] имеем для деформаций и напряжений в пористом скелете

$$\sigma_{ij}^{(s)} = -\left(K - \frac{2}{3} G \right) \varepsilon \delta_{ij} - 2G\varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon = \sum_i \varepsilon_{ii},$$

где ε_{ij} — тензор деформаций скелета; G — модуль сдвига. В одномерном случае для вертикального сжимающего напряжения σ_{zz} в грунте имеем

$$\sigma_{zz}^{(s)} = -\left(K + \frac{4}{3} G \right) \varepsilon.$$

Обозначим $\alpha = K + \dfrac{4}{3}G$. Тогда уравнение (17) примет вид

$$\alpha \left(\theta + \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{q}\, d\tau \right) = -(1-m)\,\sigma_{zz}^{(s)}.$$

Используя известное определение эффективных напряжений [5], получаем для правой части

$$-(1-m)\,\sigma_{zz}^{(s)} = P - mp. \tag{18}$$

Далее, из соотношения Терцаги $P = \sigma^f + p$ имеем в качестве решения (18) следующие соотношения

$$\sigma^f = \alpha\theta; \qquad \alpha \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{q}\, d\tau = (1-m)\,p. \tag{19}$$

Первое уравнение (19) представляет собой реологическое соотношение для объемных деформаций фильтрующей пористой среды. Поскольку сдвиговые деформации скелета, очевидно, совпадают с деформациями всей пористой среды, то реологические соотношения для фильтрующей пористой среды с пористым скелетом переменной массы в предположении упругих свойств вещества пористого скелета можно записать в виде

$$\sigma_{ij}^{f} = -\left(K - \frac{2}{3}G\right)\theta\delta_{ij} - 2G\varepsilon_{ij}.$$

Обратимся ко второму уравнению (19). Вводя так называемый коэффициент пористости $e = m/(1-m)$ и дифференцируя по времени, получаем уравнение для давления в фильтрующей пористой среде с пористым скелетом переменной массы:

$$(1-m)\frac{\partial p}{\partial t} - p\frac{\partial m}{\partial t} = \alpha \operatorname{div}\mathbf{q}.$$

Отметим, что в случае постоянной пористости оно принимает тот же вид, что и соответствующее по физическому смыслу уравнение фильтрационной консолидации для фильтрующей пористой среды с пористым скелетом постоянной массы, широко используемое в гидрогеологической и инженерно-геологической практике [6].

Пример численного расчета. Случай фильтрационного растворения

В случае, когда плотность материала твердой фазы остается постоянной в ходе химического взаимодействия, имеем следующую систему уравнений, дополненную уравнением для концентрации активного компонента в растворе для реакции фильтрационного растворения:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial m}{\partial t} = (1-m)\frac{\partial \theta}{\partial t} - \left[V_0(1+\theta)\right]^{-1}\frac{\partial V_s}{\partial t};\\
&\frac{\partial m}{\partial t} + m\frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\nu} = 0, \quad \vec{\nu} = -k\mu^{-1}\nabla(p+\rho g z);\\
&\frac{\partial (mc)}{\partial t} + \left[V_0(1+\theta)\right]^{-1}\frac{\partial V_s}{\partial t} + mc\frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{div}(D\nabla c - \vec{\nu}c);\\
&\left[V_0(1+\theta)\right]^{-1}\frac{\partial V_s}{\partial t} = \beta(c-c_0)^k; \quad \beta, k, c_0 = \mathrm{const}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Здесь c — концентрация вещества скелета, перешедшего в раствор; k — коэффициент проницаемости; μ — вязкость фильтрующейся жидкости. Реологические соотношения соответствуют упругому скелету. Вязкость раствора полагается постоянной, а проницаемость — зависящей от пористости в соответствии с формулой Арчи [1].

Приведем некоторые результаты вычислительного эксперимента для закачки растворяющего агента в однородный пористый пласт.

Расчетная область представляет собой правильный параллелепипед, вдоль вертикальной оси симметрии которого расположена совершенная скважина, закачивающая в пласт раствор с начальной (нулевой) концентрацией растворяющегося вещества скелета. Для области выбраны граничные условия первого рода. Закачка приводит к растворению вещества скелета и совместному изменению массы пористого скелета, пористости и, следовательно, деформациям.

Для области определения задачи (правильного параллелепипеда) была введена структурированная сетка ω, $h_x = h_y = h_z$. Построенная разностная схема задачи (20) является полностью консервативной и устойчивой.

Следует отметить, что для области размером $100\times100\times30$ м при шаге по пространству 1 м число неизвестных в одном уравнении составляет 300 000, поэтому для нахождения численного решения использовались итерационные методы. Согласно известным оценкам [7], точность аппроксимации задачи можно оценить как $O\left(\left|h^2\right|\right)$, $\left|h^2\right| = h_x^2 + h_y^2 + h_z^2$. Точность аппроксимации правых частей разностных уравнений равна $O\left(\left|h_\alpha^2\right|\right)$, $\alpha = \{x, y, z\}$, следовательно, точность аппроксимации системы разностных уравнений можно также оценить как $O\left(\left|h^2\right|\right)$.

В качестве основного метода для решения системы уравнений (20) был выбран метод переменных направлений.

Как и ожидалось, распространение фронта концентрации растворенного вещества происходит симметрично относительно скважины. Трехмерное распределение концентрации растворяющегося вещества в фильтрующемся растворе приведено на рис. 1.

При растворении происходит изменение пористости и объема скелета, что приводит к деформациям объема пористой среды в целом. Распределение смещений точек пористой среды приведено на рис. 2.

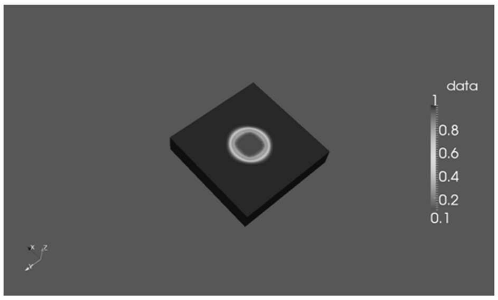

Рис. 1. Концентрация растворяющегося вещества в фильтрующемся растворе на момент середины процесса

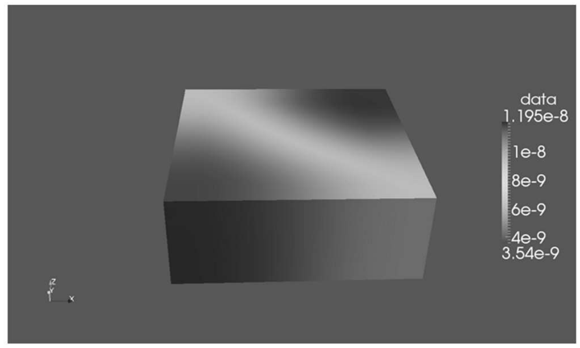

Рис. 2. Смещения точек пористой среды по оси Z на момент конца процесса

Заключение

В данной работе предложены:

1) подход к получению уравнений подземного массопереноса для фильтрующих пористых сред с пористым скелетом переменной массы. Полученные уравнения могут быть использованы для решения важных задач, в которых бы учитывались изменения напряженно-деформированного состояния горных пород, связанные с происходящими в подземной системе химическими взаимодействиями между компонентами подземного флюида и веществом пористого скелета (задачи интенсификации нефтеотдачи, фильтрация рассолов в глинистых толщах, суффозионные процессы, карст);
2) новый подход к получению реологических соотношений, необходимых для замыкания системы уравнений подземного массопереноса в случае фильтрующих пористых сред с пористым скелетом переменной массы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-07-00007).

Список литературы

1. *Николаевский В. Н.* Геомеханика и флюидодинамика. М.: Недра, 1996.
2. *Николаевский В. Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973.
4. *Флорин В. Ф.* Основы механики грунтов. Л.—М.: Госстройиздат, 1959 (Т. 1.), 1961 (Т. 2.).

5. *Verruijt A.* The theory of consolidation // Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media. Part 2: Deformation of Porous Media. Martinas Nijhoff Publishers, 1984. P. 351—368.

6. *Цытович Н. А.* Механика грунтов (краткий курс): Учебник для строительных вузов. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1983.

Статья поступила в редакцию 15.03.13.