

УДК 539.4

КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОМПАКТИРОВАНИЯ ПОВРЕЖДЕННОСТИ В СРЕДАХ С ПРОЧНОСТЬЮ

О. Н. Игнатова, В. А. Раевский, И. С. Целиков
(РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров)

Предложена модель компактирования поврежденной среды, основанная на описании схлопывания одиночной поры с учетом упругопластических свойств среды. Для описания схождения пор, распределенных по объему вещества, рассматривается движение одной сферической ячейки в идеально-пластической несжимаемой среде. В этом приближении получено аналитическое решение для зависимости интегральной поврежденности от давления, сдвиговой прочности и начальной поврежденности.

Получены уравнения, описывающие кинетику компактирования для случаев произвольной зависимости давления от времени и переменного предела текучести.

Ключевые слова: поврежденность, компактирование, модель, давление, предел текучести, среда с прочностью.

Введение

При численном моделировании высокоскоростного деформирования материалов, сопровождающегося разрушением и последующим компактированием дефектов (пор) при воздействии волн сжатия, возникают большие трудности. Компактирование дефектов, образующихся в результате действия импульсных растягивающих напряжений, исследовано недостаточно. Существующие в настоящее время модели компактирования [1, 2] являются либо слишком сложными для их реализации в численных методиках, либо не отражают всех эффектов, происходящих при закрытии пор.

В данной работе предлагается достаточно простая кинетическая модель компактирования поврежденной среды, основанная на описании схлопывания одиночной поры с учетом упругопластических свойств среды. Такой подход предложен Кэрроллом и Холтом [1].

Основные соотношения. Результаты численного моделирования

Предположив, что при компактировании объем вещества не меняется ($N = \text{const}$), представим поврежденную среду как систему одинаковых пор, находящихся примерно на одинаковом расстоянии от соседних пор, подобно атомам в кристаллической решетке. Тогда можно выделить элементарную ячейку вещества радиусом $R_{\text{я}}$ с одной порой радиусом R и рассмотреть сжатие этой ячейки внешним давлением (рис. 1). Пусть вещество обладает прочностью Y_0 с учетом вязкости, что будет препятствовать движению границы поры. Уравнение движения поры для такой модели компактирования, предложенной Кэрроллом и Холтом [1], представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка по времени, что достаточно сложно для анализа и получения решений в явном виде.

Внутренний и наружный радиусы ячейки связаны с плотностью пор соотношением

$$V_i = \frac{1}{N} = \frac{4}{3}\pi (R_{\text{я}}^3 - R^3), \quad (1)$$

где V_i — объем сплошного вещества в одной ячейке, который считается неизменным; R — внутренний радиус ячейки; $N = 1/V_i$ приблизительно соответствует количеству пор в единице объема.

Для поврежденности ω получается следующее уравнение:

$$\omega = \left(\frac{R}{R_{\text{я}}} \right)^3 = \frac{1}{1 + \frac{3}{4\pi N R^3}}. \quad (2)$$

Для описания схлопывания одиночной поры воспользуемся решением задачи о движении вакуумного пузырька радиусом R_0 в бесконечном объеме несжимаемой идеальной жидкости, полученным Рэлеем [3]. В этой задаче кинетическая энергия жидкости равна работе по перемещению вещества под действием внешнего давления. Если материал, в котором находится пора, обладает прочностью, то работа сил давления $A_{\text{д}}$ переходит в кинетическую энергию и частично расходуется на выделение тепла в результате совершения пластической работы $A_{\text{п}}$:

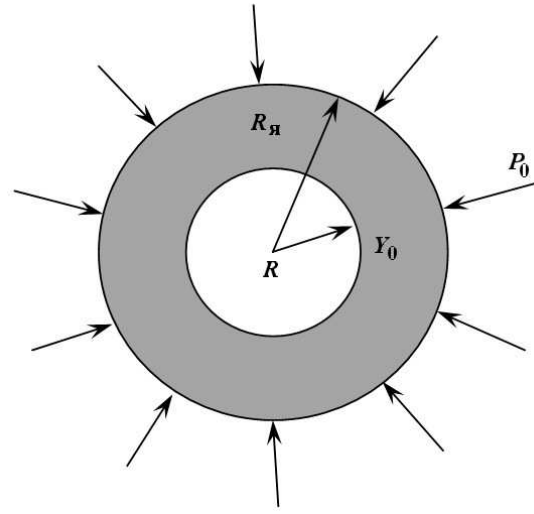


Рис. 1. Схема элементарной ячейки с наружным $R_{\text{я}}$ и внутренним R радиусами в веществе с прочностью Y_0 под воздействием давления P_0

$$\frac{2\pi\rho(R_{\text{я}} - R)R^3\dot{R}^2}{R_{\text{я}}} = \frac{4}{3}P_0\pi(R_0^3 - R^3) - A_{\text{п}}(t). \quad (3)$$

Левая часть уравнения (3) есть кинетическая энергия вещества, а правая состоит из работы давления $A_{\text{д}}$ и пластической работы $A_{\text{п}}$; R — текущий радиус поры с начальным радиусом R_0 и радиусом ячейки $R_{\text{я}}$; P_0 — давление; ρ — плотность вещества. В случае отсутствия прочности уравнение (3) переходит в задачу о схлопывании одиночной поры в идеальной несжимаемой жидкости, решенную Рэлеем. Согласно уравнению (3) движение границы поры будет происходить до тех пор, пока пластическая работа меньше работы сил давления, и прекратится в случае $A_{\text{п}} = A_{\text{д}}$.

Изменение работы пластического деформирования $A_{\text{п}}$ в случае постоянного предела текучести Y_0 приближенно может быть рассчитано по следующему уравнению:

$$A_{\text{п}} \approx \int_V \int_0^t Y_d \dot{\epsilon}_i dt dV \approx -Y_0 \int_0^t dt \int_R^{R_{\text{я}}} 4\pi r^2 \frac{2\dot{R}R^2}{r^3} dr \approx \frac{8\pi}{3} Y_0 \int_{R_0}^R R^2 \ln \left(\frac{3}{4\pi N R^3} + 1 \right) dR, \quad (4)$$

где Y_d и $\dot{\epsilon}_i$ — предел текучести и скорость деформации соответственно. Уравнение (4) получено с учетом того, что при сферическом сжатии несжимаемого вещества скорость деформации связана с радиусом: $\dot{\epsilon}_i \cong \left| \frac{\partial U(r)}{\partial r} \right| = \frac{2R^2\dot{R}}{r^3}$. При схлопывании пор объем V остается неизменным, но изменяется внутренний радиус поры и наружный эффективный радиус ячейки $R_{\text{я}}$, в которой находится данная пора. В случае постоянного предела текучести можно интегрированием (4) получить точное уравнение для пластической работы:

$$A_{\text{п}} \approx \frac{8}{9}\pi Y_0 \left[R_0^3 \ln \left(1 + \frac{3}{4\pi N R_0^3} \right) - R^3 \ln \left(1 + \frac{3}{4\pi N R^3} \right) + \frac{3}{4\pi N} \ln \frac{4\pi N R_0^3 + 3}{4\pi N R^3 + 3} \right]. \quad (5)$$

После несложных преобразований получаем дифференциальное уравнение изменения радиуса поры от времени:

$$\dot{R} = -\sqrt{\frac{(A_{\text{д}} - A_{\text{п}}) R_{\text{я}}}{2\pi\rho R^3 (R_{\text{я}} - R)}}. \quad (6)$$

Из уравнения (6) видно, что остановка движения границы поры произойдет в случае $A_d = A_n$. После преобразования (6) получим условие остановки поры:

$$\frac{P}{Y_0} = \frac{2}{3} \frac{R_0^3 \ln \left(1 + \frac{3}{4\pi N R_0^3} \right) - R^3 \ln \left(1 + \frac{3}{4\pi N R^3} \right) + \frac{3}{4\pi N} \ln \frac{4\pi N R_0^3 + 3}{4\pi N R^3 + 3}}{R_0^3 - R^3}. \quad (7)$$

С учетом (2) получим уравнение, определяющее зависимость начальной и конечной поврежденностей от отношения давления к пределу текучести:

$$\frac{P}{Y_0} = \frac{2}{3} \frac{\omega \ln \omega - \omega_0 \ln \omega_0 + (1 - \omega)(1 - \omega_0) \ln \frac{1 - \omega}{1 - \omega_0}}{\omega_0 - \omega}. \quad (8)$$

Как следует из (8), процесс компактирования определяется только безразмерными интегральными характеристиками ω_0 , ω , P/Y_0 . Очевидно, что для каждого ω_0 существует минимальное критическое значение P_k/Y_0 , при котором возможно полное компактирование, т. е. $R = 0$. Оно определяется соотношением

$$\frac{P_k}{Y_0} = -\frac{2}{3} \left(\ln \omega_0 - \frac{1 - \omega_0}{\omega_0} \ln \frac{1}{1 - \omega_0} \right). \quad (9)$$

Кроме того, существует другой критический уровень — отношение P_0/Y_0 , при котором поврежденность вообще не будет изменяться. Это условие $\frac{dA_d}{dR} - \frac{dA_n}{dR} = 0$, из которого после вычислений получаем следующее соотношение:

$$\frac{P_0}{Y_0} = \frac{2}{3} \ln \frac{1}{\omega_0}. \quad (10)$$

На рис. 2 показаны расчетные зависимости поврежденности ω от отношения P/Y , полученные по уравнениям (7)–(10). Видно, что существуют три характерные области: полного, неполного компактирования и так называемая *мертвая зона*, в которой не происходит никакого движения. Для полного компактирования необходимо воздействие давлением больше минимального критического, т. е. $P \geq P_k = -\frac{2}{3} Y_0 \left(\ln \omega_0 - \frac{1 - \omega_0}{\omega_0} \ln \frac{1}{1 - \omega_0} \right)$. Если давление меньше критического, $\frac{P_0}{Y_0} < \frac{P}{Y_0} < \frac{P_k}{Y_0}$, то поврежденность уменьшается до значения, определяемого уравнением (8).

Интересным следствием уравнения (8) является сильная зависимость результатов компактирования от последовательности воздействия импульсами давления. Если первый импульс давления P_1 имеет амплитуду такую, что $P_0 < P_1 < P_k$, то поврежденность уменьшается с ω_0 до ω_1 . При этом для полного компактирования ω_1 следующий импульс давления должен быть больше: $P_2 > P_1$, т. е. проявляется свойство неаддитивности процесса компактирования.

Расчетные зависимости поврежденности от времени в случае действия постоянного давления $P = 3$ ГПа при разной прочности, полученные по уравнениям (2), (6), показаны на рис. 3. Расчеты сделаны для меди с параметрами $\rho_0 = 8,93$ г/см³; $R_0 = 0,05$ см; $R_x = 0,074$ см ($\omega = 0,3$; $N = 852$ см⁻³). Из рис. 3 видно, что с увеличением прочности время компактирования увеличивается. Для сравнения на рисунке приведена зависимость $\omega(t)$, полученная по модели компактирования из работы [2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} P = 0 \quad \text{при} \quad \omega > \omega_0; \\ P = P_k \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{1/2} \right] \\ \omega = 0 \quad \text{при} \quad P > P_k. \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \omega = \omega_0 \left(1 - \frac{P}{P_k} \right)^2 \quad \text{при} \quad P < P_k \quad \text{и} \quad \omega < \omega_0; \quad (11)$$

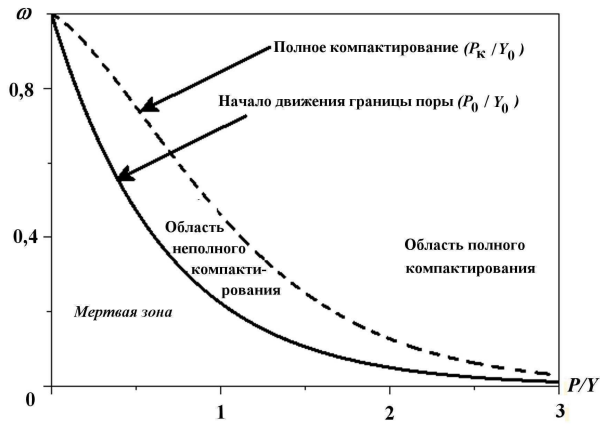


Рис. 2. Расчетные зависимости поврежденности от P_k/Y_0 и P_0/Y_0

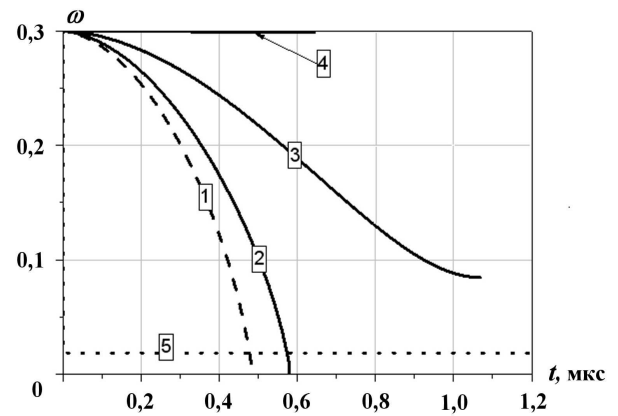


Рис. 3. Зависимости поврежденности от времени при разной прочности ($P_0 = 3$ ГПа; $R_0 = 0,05$ см): 1 — $Y = 0$; 2 — $Y_0 = 1,0$ ГПа; 3 — $Y_0 = 2,5$ ГПа; 4 — $Y_0 = 3,81$ ГПа; 5 — по модели из работы [2]

При расчете по этой модели для меди выбраны постоянные параметры: $P_k = 4$ ГПа, $\omega_0 = 0,3$. Уравнение (11) не зависит от прочности, откуда следует, что компактирование происходит всегда при $P < P_k$, тогда как согласно уравнениям (1)–(10) может быть такое сочетание P/Y , при котором поврежденность не изменится (кривая 4 на рис. 3).

Тестирование уравнения (6) проведено по двумерной эйлеровой методике счета для компактирования одиночной поры в меди ($\rho_0 = 8,93$ г/см³) с параметрами $R_0 = 0,05$ см и $R_0 = 0,0015$ см и соответствующими радиусами ячейки $R_{я} = 0,074$ см и $R_{я} = 0,0022$ см. В обоих случаях поврежденность одинакова: $\omega = 0,3$. В расчетах задавалась одна ячейка (см. рис. 1) с прочностью Y_0 под действием постоянного давления P_0 .

На рис. 4, 5 показаны зависимости радиуса от времени, полученные при расчете по двумерной эйлеровой методике и по уравнению (6). Видно, что зависимости близки по форме и времени полного компактирования, что свидетельствует о корректности выбранного подхода.

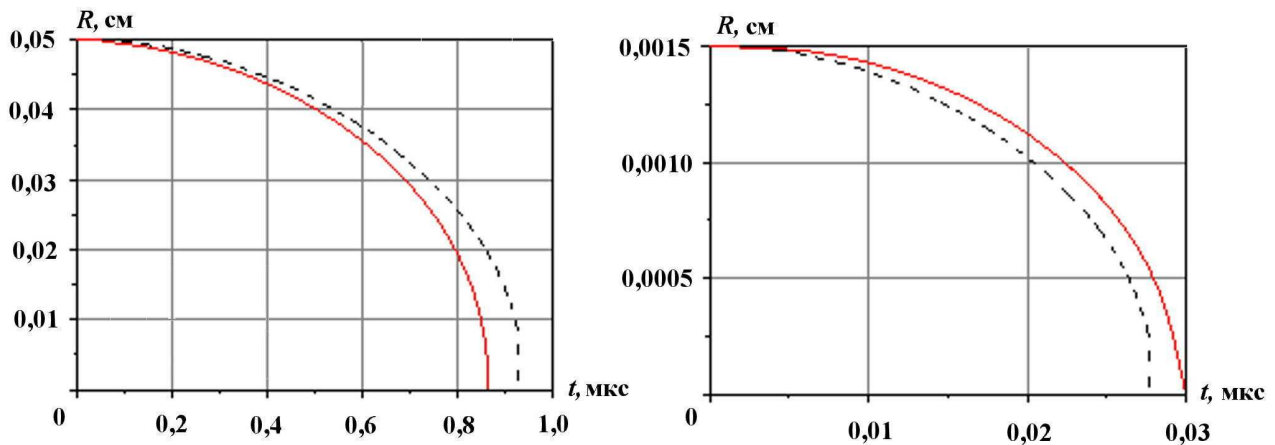


Рис. 4. Зависимости радиуса от времени, $P = 1,0$ ГПа; $Y = 0,05$ ГПа: — — — расчет по двумерной методике; — — — расчет по уравнению (6)

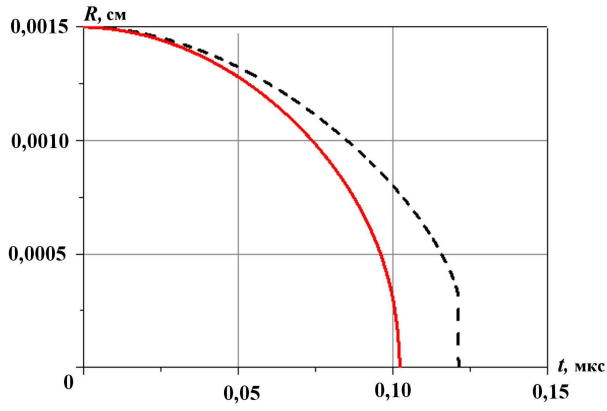


Рис. 5. Зависимости радиуса от времени, $P = 0,1$ ГПа; $Y = 0,05$ ГПа: --- расчет по двумерной методике; — — — расчет по уравнению (6)

Отметим, что уменьшение размера поры с $R_0 = 0,05$ см до $R_0 = 0,0015$ см уменьшает время компактирования с $t \sim 0,9$ мкс до $t \sim 0,03$ мкс. Уменьшение действующего на пору давления в десять раз приводит к увеличению времени компактирования примерно в 4 раза.

В случае, когда на границе ячейки давление переменное, следует рассматривать уравнение

$$\frac{2\pi\rho(R_{\text{я}} - R)R^3\dot{R}^2}{R_{\text{я}}} = 4\pi \int_0^t P(t)R^2\dot{R}dt - A_{\text{п}}(t).$$

В случае переменного предела текучести уравнение для пластической работы усложняется:

$$A_{\text{п}} \approx \int_0^t dt \int_R^{R_{\text{я}}} 8\pi Y_d(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i, T) \frac{\dot{R}R^2}{r} dr = \frac{8\pi}{3} \int_0^t Y_d \ln \left(1 + \frac{3}{4\pi R^3 N} \right) R^2 \dot{R} dt.$$

Уравнение для изменения радиуса поры в общем случае имеет вид

$$\dot{R} = - \sqrt{\frac{R_{\text{я}}}{\rho R^3 (R_{\text{я}} - R)} \left\{ \int_0^t \left[2C_1 P(t) - \frac{4}{3} C_2 Y_d(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i, T) \ln \left(1 + \frac{3}{4\pi N R^3} \right) \right] R^2 \dot{R} dt \right\}}, \quad (12)$$

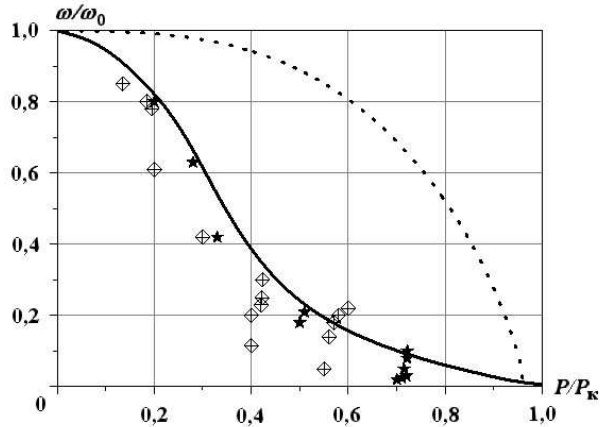


Рис. 6. Экспериментальные и расчетные зависимости ω/ω_0 от $P/P_{\text{к}}$: \boxtimes — эксперимент [5], $\omega_0 = 0,356$; \star — эксперимент [5], $\omega_0 = 0,15$; — — — расчет с переменным пределом текучести; - - - — расчет по уравнениям (2)–(6) с постоянным пределом текучести $Y = 0,1$ ГПа

где C_1 и C_2 — постоянные коэффициенты, введенные для корректировки уравнения (12). Для группы пор следует использовать уравнение компактирования отдельной поры (12) и далее рассчитывать поврежденность по уравнению (2).

Проведены расчеты зависимости поврежденности от давления в меди с использованием переменного (учитывающего влияние деформирования) и постоянного пределов текучести — по эйлеровой методике с моделью прочности РИНГ [4] и с использованием уравнений (2)–(6) при $Y_0 = 0,1$ ГПа; $\rho_0 = 8,93$ г/см³; $R_0 = 0,0015$ см; $R_{\text{я}} = 0,0022$ см; $\omega = 0,3$.

На рис. 6 показаны расчетные зависимости ω/ω_0 от $P/P_{\text{к}}$ в сравнении с экспериментальными данными из работы [5]. Видно, что расчет с моделью прочности РИНГ, учитывающей сложную зависимость предела текучести от параметров напряженно-деформированного состояния, позволяет описать большинство экспериментальных резуль-

татов. Лучшего согласия с экспериментами можно добиться, подбирая постоянные коэффициенты C_1 и C_2 в (12), благодаря которым учитывается отличие компактирования сферических пор от реальных. В качестве определяющих моделей среды можно использовать уравнения [6]

$$\tilde{Y}_d = (1 - \omega) Y_d; \quad \tilde{G} = (1 - \omega) G; \quad \tilde{P} = (1 - \omega) P \left(\frac{\rho}{1 - \omega}, T \right).$$

Заключение

Предложена кинетическая модель компактирования поврежденности, которая учитывает влияние временной зависимости действующего давления, прочности, начальной поврежденности и кинетики процесса. Аналитические решения, полученные для постоянных значений давления и прочности, согласуются с численными расчетами, что свидетельствует о корректности используемого подхода. Анализ решений показывает сложную картину процесса компактирования.

Основные выводы следующие:

1. Процесс компактирования зависит не только от давления и прочности, но и от начальной поврежденности: чем меньше поврежденность, тем больше давление, которым необходимо воздействовать на вещество для его полного компактирования.
2. Существует два критических значения отношения давления к прочности:
 - 1) минимальный уровень P_0/Y , при котором возможно уменьшение поврежденности; при $P/Y \ll P_0/Y$ поврежденность не изменяется;
 - 2) уровень P_k/Y , при котором происходит полное компактирование.

Согласно полученному решению уменьшение поврежденности до конечного значения происходит в интервале $P_0/Y \ll P/Y < P_k/Y$.

3. Процесс и конечное состояние материала зависят не только от давления, но и от его временной зависимости. Это обусловлено инерцией сжатия пор.

Список литературы

1. *Carrol M. M., Holt A. C.* Static and dynamic pore-collapse relations for ductile porous materials // J. Appl. Phys. 1972. Vol. 43. P. 1626–1635.
2. *Огородников В. А., Садовой А. А., Софронов В. Н. и др.* Кинетическая модель пластического разрушения с учетом диссипативных процессов // Хим. физика. 2002. Т. 21, № 9. С. 104–109.
3. *Rayleigh* // Phil. Mag. 1917. Vol. 34. P. 94.
4. *Глушаков Б. Л., Игнатова О. Н., Надёжин С. С., Раевский В. А.* Релаксационная модель сдвиговой прочности пяти металлов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2012. Вып. 2. С. 25–36.
5. *Boade R. R.* Compression of porous copper by shock waves // J. Appl. Phys. 1968. Vol. 39, No 12. P. 5639–5702.
6. *Подурец М. А.* Термодинамическая модель пористого тела // Мат. моделирование. 1996. Т. 8, № 2. С. 29–31.

Статья поступила в редакцию 15.05.13.