

УДК 533.9

ШЕСТИПОТОКОВАЯ ДВУМЕРНАЯ МЕТОДИКА ЭГАК-МП6 ДЛЯ РАСЧЕТА ОБРАЗОВАНИЯ И ДВИЖЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

И. М. Анисина, М. Ю. Егужова, В. А. Жмайло, О. Е. Кочеткова, Ю. В. Янилкин
(РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров)

Приводится многопотоковая модель для расчета образования и движения разреженной плазмы в геомагнитном поле (*многопотоковое* магнитно-газодинамическое приближение). Представлена двумерная методика ЭГАК-МП6, использующая эту модель в шестипотоковом варианте. Приводятся результаты расчетов по этой методике ядерного взрыва в операции "Морская звезда". Результаты расчетов сравниваются с имеющимися экспериментальными данными.

Ключевые слова: ядерный взрыв, операция "Морская звезда", магнитное поле, методика ЭГАК-МП6.

Введение

В 1958—1962 гг. в нашей стране и США было проведено несколько серий ядерных взрывов (ЯВ) в верхних (выше 150 км) слоях атмосферы [1, 2]. Многообразие и масштабность эффектов, которые проявились в этих опытах, позволяют рассматривать их в качестве уникальных источников данных по физике ионосферы, магнитосферы и общей физике плазмы. В течение многих лет эти эффекты привлекают внимание исследователей: основные экспериментальные данные приведены в работах [3—8], расчетно-теоретическому описанию посвящены работы [4, 9—16].

Среди теоретических подходов в основном используются три.

Первый (и наиболее строгий) — *гибридная* модель. В этой модели движение ионов описывается уравнениями Власова, а электроны рассматриваются как *безмассовая жидкость*. Такой подход [9, 10] весьма эффективен при расчетах начальной стадии взрыва ($t \leq 2\pi/\omega_i$, где $\omega_i \approx 10^{-2}$ с — ионная ларморовская частота), однако его реализация для более поздних моментов времени оказывается довольно сложной. Кроме того, возникают трудности с учетом столкновений между частицами.

Второй подход [15, 16] состоит в использовании стандартных уравнений магнитной газовой динамики (МГД). Такие уравнения достаточно оправданны для *столкновительной* плазмы, однако в рассматриваемых задачах, когда пробеги частиц гораздо больше их ларморовских радиусов, их применение трудно обосновать. Тем не менее данный подход допускает сравнительно простую численную реализацию и позволяет рассчитывать развитие ЯВ до больших ($t \gg 1$ с) моментов времени.

Третий подход (он рассматривается в данной работе) основан на *многопотоковом* МГД-приближении для решения исходной системы уравнений Максвелла—Больцмана. При этом подходе в рассматриваемом течении выделяется несколько *потоков*: безмассовых электронов и тяжелых частиц (заряженных и нейтральных, *быстрых* и *медленных*, частиц продуктов взрыва (ПВ) и атмосферы). Подробное описание этого подхода приведено в [17] и разд. 1 данной работы. На его основе были созданы численные методики с использованием моделей разной сложности [10, 11, 17, 18].

В настоящей работе описана двумерная лагранжево-эйлерова шестипотоковая методика ЭГАК-МП6, которая является наиболее полной (с точки зрения учета физических процессов) из развиваемых в настоящее время многопотоковых методик.

1. Многопотоковая модель. Полное описание шестипотоковой модели

Наиболее строгая математическая формулировка задачи о движении плазмы в магнитном поле сводится к записи системы уравнений Больцмана с интегралами столкновений, учитывающими довольно большое число различных типов взаимодействий между частицами, а также взаимодействие заряженных частиц с внешним геомагнитным полем. Для самосогласованного учета эффектов поля исходная система уравнений должна быть дополнена уравнениями Максвелла.

Итак, исходная система уравнений имеет следующий вид:

– уравнения Больцмана–Власова для частиц сорта α

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \nabla f_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \vec{F} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} = J_\alpha(\vec{v}), \quad (1)$$

где $f_\alpha(\vec{v}, \vec{r}, t)$ – функция распределения; e_α и m_α – заряд и масса частиц сорта α ;

– сила Лоренца

$$\vec{F} = \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}]; \quad (2)$$

– интеграл столкновений частиц сортов α и β

$$J_\alpha(\vec{v}) = \sum_\beta J_{\alpha\beta}(\vec{v}). \quad (3)$$

Система замыкается квазистационарными уравнениями Максвелла

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \vec{E}; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi \vec{j}}{c} \quad (4)$$

и законом Ома [19]

$$e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{u}_e \times \vec{H}] \right) = \vec{R}_e. \quad (5)$$

Здесь \vec{R}_e – сила трения между электронами и тяжелыми частицами; \vec{H} – вектор напряженности магнитного поля; \vec{j} – плотность электрического тока; $\vec{u}_e = \vec{u}_i - \vec{j}/(en_e)$, где \vec{u}_i – среднемассовая скорость ионов.

Для численного решения системы (1)–(5) используются различные приближенные подходы.

Как отмечалось выше, многопотоковая МГД-модель предусматривает выделение в рассматриваемом течении нескольких потоков: безмассовых электронов, а также тяжелых частиц (заряженных и нейтральных, быстрых и медленных, частиц ПВ и атмосферы). Количество потоков может меняться в зависимости от требований решаемой задачи и количества рассматриваемых веществ. Учитываются основные механизмы столкновительного и бесстолкновительного взаимодействия между потоками.

Формально этот подход состоит в использовании некоторых приближенных представлений для функций распределения $f_\alpha(\vec{v}, \vec{r}, t)$. Наиболее известный пример такого подхода в кинетической теории газов – метод моментов Грэда [20].

Подробно процесс получения уравнений многопотоковой модели описан в [17]. Исходным является так называемое бимодальное представление для описания функции распределения f_α для каждого рассматриваемого вещества:

$$f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = \sum_{j=1,2} n_\alpha^{(j)} \varphi_\alpha^{(j)}, \quad (6)$$

где

$$\varphi_\alpha^{(j)} = \frac{1}{\left[(c_\alpha^j)^2 \pi \right]^{3/2}} \exp \left(- (x_\alpha^j)^2 \right), \quad (x_\alpha^j)^2 = \frac{(\vec{v} - \vec{u}_\alpha^{(j)})^2}{2 (c_\alpha^j)^2}, \quad (c_\alpha^j)^2 = \frac{T_\alpha^{(j)}}{m_\alpha};$$

$n_{\alpha}^j(\vec{r}, t)$ — плотность; \vec{u}_{α}^j — скорость; $T_{\alpha}^{(j)}$ — температура частиц соответствующего потока. Представлению (6) соответствует разделение частиц (каждого из сортов α) на две группы: медленных и быстрых, получивших значительную энергию от ЯВ. Такое представление является приближенным, однако, как показывают соответствующие оценки и расчеты, оно позволяет получать непрерывные переходы к большому числу различных предельных случаев задач о взрыве (газодинамика и вакуум; течения с большими и малыми числами Маха, в том числе *альфвеновское*; течения нейтрального и полностью ионизированного газа и т. п.) [21, 22].

Подставив (6) в исходную систему (1) и выполнив соответствующее интегрирование, можно получить систему уравнений для среднемассовых характеристик каждого из введенных выше потоков. Для замыкания этой системы необходимо конкретизировать вид интегралов столкновений $J_{\alpha\beta}(\vec{v})$ и вычислить соответствующие моменты от этих интегралов. Количество типов частиц и интервал относительных скоростей их движения, которые реализуются в задаче, приводят к необходимости рассматривать практически все типы столкновений, известных в атомной физике. Для упрощения задачи приходится выбирать в качестве основных те или иные из них. Этот выбор в значительной мере определяет модель образования и движения плазмы в данной задаче.

На основании данных о сечениях атомных столкновений и оценок их возможной роли в рассматриваемых течениях в модель включены следующие типы столкновений:

1. Упругие столкновения между тяжелыми частицами. Учитываются кулоновские сечения для столкновений между ионами и сечения, полученные для экранированного кулоновского потенциала, для столкновений с участием нейтральных атомов.
2. Упругие столкновения между электронами и тяжелыми частицами. Для ионов используется кулоновское сечение, для атомов — сечение, полученное с учетом уравнений [23].
3. Неупругие столкновения между тяжелыми частицами. В качестве основных рассматриваются перезарядка и ионизация. Сечение перезарядки выбирается с учетом данных [24, 25]. Исходя из них и из предположения, что ввиду большой доли возбужденных частиц, участвующих в столкновениях, перезарядка идет резонансным образом, для сечения используется формула Сена [26]. Что касается сечений по ионизации, то используются самые простые формулы, а именно полученные В. П. Фирсовым в 60-е годы [27]. Исследования показывают, что они неплохо описывают эксперимент (с точностью до "двойки"), особенно в области относительных скоростей, где сечение максимально [28].
4. Неупругие столкновения с участием электронов. Сечения ионизации и возбуждения атомов электронным ударом описываются соотношением из работы [29], причем считается, что эти процессы идут из основных состояний. Учитывается также фоторекомбинация (согласно [29]).

Вычисление моментов от интегралов столкновений перечисленных типов является довольно сложной задачей, учитывая, что каждый из таких моментов зависит от большого числа аргументов (температуры, скорости, плотности потоков), а сечения столкновений также имеют сложный вид. Поэтому при таких вычислениях используется ряд приближений. Основное из них состоит в том, что необходимые уравнения для моментов получаются как интерполяционные между двумя предельными случаями, в которых для данных интегралов столкновений можно получить сравнительно строгие выражения, — это случаи холодных потоков и потоков с малой относительной скоростью.

В модели, используемой в методике ЭГАК-МП6, разделение плазмы на потоки проводится по следующим признакам: частицы ПВ и атмосферы, заряженные и нейтральные частицы, быстрые и медленные — всего 8 потоков плюс безмассовые электроны. В целях некоторого упрощения задачи и с учетом особенностей возникающего течения (см. ниже) число рассчитываемых потоков в данной модели уменьшено с 8 до 6 за счет того, что быстрые и медленные потоки в каждом из сортов частиц ПВ (заряженных и нейтральных) объединены в один поток.

Таким образом, в данной модели рассчитывается движение и взаимодействие следующих потоков: 1) ионы ПВ; 2) нейтральные атомы ПВ; 3) быстрые ионы атмосферы; 4) быстрые нейтральные атомы атмосферы; 5) медленные ионы атмосферы; 6) медленные атомы атмосферы. Кроме этих потоков, рассчитывается безмассовый электронный компонент плазмы.

Каждый из указанных потоков характеризуется своими значениями плотности, скорости и температуры. Для потока решаются следующие уравнения:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_k \vec{u}_k) = S_k = \sum_j S_{jk}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_k \vec{u}_k) + \operatorname{div}(\rho_k \vec{u}_k \vec{u}_k) + \nabla p_k + \frac{\chi_k \rho_k}{\rho_e \varphi_k} \left(\nabla p_e - \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{H}] \right) = \sum_j \left(S_{jk} \vec{u}_j + \vec{F}_{kj} \right) + \vec{U}_k + \vec{G}_k; \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_k \varepsilon_k) + \operatorname{div}(\rho_k \varepsilon_k \vec{u}_k) + p_k \operatorname{div} \vec{u}_k = \sum_j \left[S_{jk} \left(\varepsilon_j + \frac{w_{kj}^2}{2} \right) + \vec{F}_{kj} \vec{w}_{kj} \xi_{jk} + Q_{kj} \right] + Q_{ke} + Q_{ke}^{inel}. \quad (9)$$

Для электронов

$$\rho_e = \sum_k \frac{\rho_k \chi_k}{\varphi_k}; \quad \rho_e \vec{u}_e = \sum_k \frac{\rho_k \vec{u}_k \chi_k}{\varphi_k}; \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_e \varepsilon_e) + \operatorname{div}(\rho_e \varepsilon_e \vec{u}_e) + p_e \operatorname{div} \vec{u}_e = - \sum_k Q_{ke} - \sum_k Q_{ke}^{inel} - \sum_k \vec{u}_k \vec{U}_k. \quad (11)$$

В уравнениях (7)–(11) ρ_k , n_k , \vec{u}_k , ε_k , p_k , χ_k — характеристики k -го потока: плотность, концентрация, скорость, энергия, давление и степень ионизации соответственно. При этом считается, что все заряженные потоки однократно ионизованы, а степень ионизации нейтральных потоков равна 0, т. е.

$$\chi_k = \begin{cases} 1, & k = 1, 3, 5; \\ 0, & k = 2, 4, 6. \end{cases} \quad \text{Также использованы обозначения: } \vec{w}_{kj} = \vec{u}_j - \vec{u}_k; \quad \varphi_k = m_k/m_0 - \text{относи-}$$

тельная масса частиц потока k , где m_k — безразмерная масса атома для потока k , m_0 — масса стандартного атома; $B_0 = 1/m_0$ — параметры, возникающие при безразмеривании.

Уравнения для магнитного поля \vec{H} и тока \vec{j} в случае идеально проводящей плазмы:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\vec{u}_e \times \vec{H}]; \quad \vec{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{H}. \quad (12)$$

Уравнения состояния тяжелых частиц такие же, как для идеального газа (все эти частицы считаются одноатомными):

$$p_k = \varepsilon_k (\gamma - 1) \rho_k; \quad \varepsilon_k = \frac{1}{m_k} \frac{T_k}{(\gamma - 1)};$$

уравнения состояния для электронов:

$$p_e = \rho_e T_e \frac{1}{m_0}; \quad \varepsilon_e = \frac{1}{m_0} \left(\frac{T_e}{\gamma - 1} + J \right),$$

где $\rho_e = n_e m_0$; $J = \sum_{k=1,3,5} n_k J_k / n_e$, J_k — потенциалы первой ионизации атомов ПВ и воздуха соответственно.

В данной модели выполняются законы сохранения массы, импульса, полной энергии.

Источники, представленные в правых частях уравнений (7)–(11), описывают обмен массами, изменение импульсов и внутренней энергии потоков в результате различных взаимодействий: неупругих, таких как ионизация, перезарядка, рекомбинация, и упругих. Характер взаимодействий зависит от их сечений.

Например, источник S_{jk} , описывающий обмен массами, представляется в виде

$$S_{jk} = \tilde{S}_{jk} + \delta S_{jk},$$

где \tilde{S}_{jk} описывает переходы частиц между потоками j и k за счет изменения заряда, а δS_{jk} — переход частиц атмосферы из медленных в быстрые потоки за счет упругих столкновений и ларморовского ускорения (для ионов). Для четных k (для корректной записи индексы разделены запятой)

$$\tilde{S}_{k-1,k} = 0; \quad \tilde{S}_{k,k} = -A_k \rho_k; \quad \tilde{S}_{k+1,k} = B_{k+1} \rho_{k+1};$$

для нечетных k

$$\tilde{S}_{k-1,k} = A_{k-1} \rho_{k-1}; \quad \tilde{S}_{k,k} = -B_k \rho_k; \quad \tilde{S}_{k+1,k} = 0.$$

Здесь

$$A_k = \sum_{j=1}^6 A_{jk} + A_{ek}, \quad A_{jk} = \theta_{jk} n_j (1 - \chi_j), \quad A_{ek} = \Omega_k n_e;$$

$$B_k = \sum_{j=1}^6 B_{jk} + B_{ek}, \quad B_{jk} = \Lambda_{kj} n_j + \theta_{kj} n_j \chi_j, \quad B_{ek} = \Lambda_{ke} n_e;$$

θ_{jk} — коэффициент перезарядки между частицами потоков j и k ; Ω_k — скорость рекомбинации; Λ_{kj} — скорость ионизации частиц потока k частицами потока j ; Λ_{ke} — скорость ионизации электронным ударом. В матрице δS_{jk} отличны от нуля только δS_{53} и $\delta S_{55} = -\delta S_{53}$. Здесь $\delta S_{53} = \hat{\omega} \rho_5 n_3$, где $\hat{\omega} = 0$ в области 1, $\hat{\omega} = \omega / \rho_e$ в области 2 (области 1 и 2 заняты электронами ПВ и атмосферы соответственно).

Слагаемые \vec{F}_{kj} в уравнениях движения (8) описывают изменение импульса потока k за счет упругих столкновений его частиц с частицами потока j :

$$\vec{F}_{kj} = \frac{\mu_{kj}}{m_k} \rho_k N_j \vec{w}_{kj} \nu_{jk}, \quad \mu_{kj} = \frac{\varphi_k \varphi_j}{\varphi_k + \varphi_j},$$

где ν_{jk} — коэффициент, характеризующий частоту упругих столкновений между потоками.

Аналогично, источники Q_{kj} и Q_{ke} описывают эффекты упругих столкновений при непосредственном упругом взаимодействии частиц k и j (или электронов):

$$Q_{kj} = \frac{2\mu_{kj}}{M_{kj}} \rho_k n_j \nu_{jk} \left(\varepsilon_j \frac{m_j}{m_k} - \varepsilon_k \right), \quad M_{kj} = \varphi_k + \varphi_j; \quad Q_{ke} = 2m_e \rho_k n_e \nu_{ek} \left(B_k \frac{T_e}{\gamma - 1} - \varepsilon_k \right).$$

Члены \vec{U}_k и Q_{ke}^{inel} описывают изменение импульса и энергии потоков в результате ионизации столкновениями тяжелых частиц:

$$Q_{ke}^{inel} = \begin{cases} -\frac{B_0}{\gamma - 1} \sum_{j=1}^6 \left[\zeta_{kj} (I_{kj} \Delta_{kj} + I_{jk} \Delta_{jk}) + \zeta_{k+1j} I_{k+1j} \Delta_{k+1,j} \right], & k - \text{нечетное;} \\ -\frac{B_0}{\gamma - 1} \sum_{j=1}^6 \zeta_{kj} I_{jk} \Delta_{jk}, & k - \text{четное,} \end{cases}$$

где $\zeta_{kj} = 2\varepsilon_k / y_{kj}^2$, $y_{kj}^2 = (\vec{u}_j - \vec{u}_k)^2 + 2(\varepsilon_j + \varepsilon_k)$; $I_{kj} = n_k \Lambda_{kj} n_j (1 - \chi_k)$, Δ_{kj} — энергия ионизации частицы k при столкновении с частицей j ;

$$\vec{U}_k = \frac{B_0}{\gamma - 1} \sum_{j=1}^6 \left[\frac{\vec{w}_{kj}}{y_{kj}^2} (I_{kj} \Delta_{kj} + I_{jk} \Delta_{jk}) \right] \quad \forall k, \quad \vec{w}_{ki} = \vec{u}_k - \vec{u}_i.$$

Вектор \vec{G}_k в (8) характеризует магнитное ламинарное взаимодействие между потоками:

$$\vec{G}_k = \frac{m_0 \chi_k \rho_k \omega_0}{m_k H_0} \left[(\vec{u}_k - \vec{u}_e) \times \vec{H} \right],$$

где $\omega_0 = eH_0 / (m_0 c)$, e — заряд электрона, c — скорость света.

Конкретные выражения для источников здесь не приводятся ввиду их громоздкости.

2. Методика ЭГАК-МП6

При численной реализации данной системы уравнений в рамках методики ЭГАК предполагается, что вся область рассматриваемого течения может включать в себя несколько потоков частиц разного сорта (компонентов)*. Каждый из компонентов обладает своими полем скоростей и термодинамическими параметрами: плотностью, энергией, давлением и др., характеризующими данный сорт частиц. Потоки частиц взаимодействуют друг с другом по определенным законам, обмениваясь импульсом, массой и энергией. Используется единая для всех компонентов счетная сетка, состоящая из четырехугольных ячеек, которая может двигаться в процессе счета по определенным исполнителем расчета алгоритмам; в простейшем случае сетка является неподвижной. В методике предполагается, что плотности, концентрации, компоненты магнитного поля и энергии определены в ячейке, скорости определены в узлах.

Перед началом очередного шага по времени все величины для компонентов заданы на единой счетной сетке. Численное решение системы уравнений производится с использованием метода расщепления на несколько этапов:

- 1) расчет *магнитной добавки* в уравнении движения;
- 2) решение уравнений газовой динамики для каждого компонента в лагранжевых переменных (лагранжев этап газовой динамики);
- 3) расчет магнитного поля;
- 4) учет конвективных потоков для всех величин (эйлеров этап);
- 5) учет взаимодействия между компонентами.

Расчет магнитной добавки в уравнении движения. В уравнение движения (8) входит изменение скорости за счет магнитной добавки:

$$\frac{d\vec{u}_i}{dt} = \frac{\chi_i}{\rho_e \varphi_i} \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{H}].$$

Уравнение изменения скорости за счет магнитной силы $\vec{f}_m = [\vec{j} \times \vec{H}]$ для осесимметричного движения и магнитного поля $\vec{H} = (H_r, 0, H_z)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{dt} &= H_z \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) = H_z \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_z^2}{\partial r}; \\ \frac{du_z}{dt} &= H_r \left(\frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial z} \right) = H_r \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_r^2}{\partial z}. \end{aligned}$$

Для аппроксимации частных производных воспользуемся интегральным представлением [30]. Применяя эти формулы к четырехугольнику (в рассматриваемом случае это ромб 2031, представленный на рис. 1), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{1}{A} \left[\frac{F_0}{2} (y_0 - y_2) + \frac{F_1}{2} (y_3 - y_0) + \frac{F_3}{2} (y_1 - y_3) + \frac{F_2}{2} (y_2 - y_1) \right]; \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -\frac{1}{A} \left[\frac{F_0}{2} (x_0 - x_2) + \frac{F_1}{2} (x_3 - x_0) + \frac{F_3}{2} (x_1 - x_3) + \frac{F_2}{2} (x_2 - x_1) \right]. \end{aligned}$$

Здесь F_0, F_1, F_2, F_3 — значения функции F в узлах 0, 1, 2, 3 соответственно; A — площадь ромба.

Полученные значения аппроксимируют производные в узле C , окруженном четырьмя прилегающими к нему ячейками. На данном этапе происходит передача полученных значений на соседние процессоры.

* Дальнейшая замена термина *поток* на термин *компонент* делается во избежание путаницы с магнитным потоком и потоками других физических величин (объема, массы и т. д.), используемыми в настоящей работе.

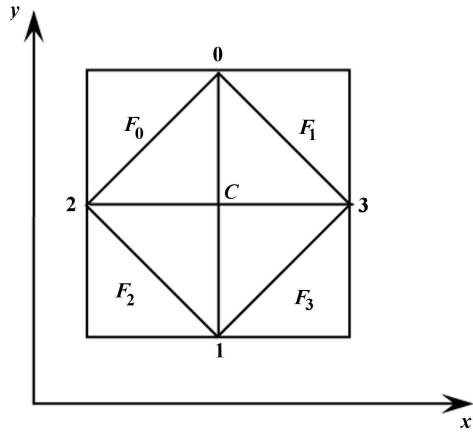


Рис. 1. Применение интегральной формулы к сеточному шаблону

Лагранжев этап газовой динамики. Лагранжев этап представляет собой решение уравнений газовой динамики для каждого компонента и электронов в лагранжевых переменных.

Исходная система уравнений (7)–(9) с нулевыми правыми частями для ионов, решаемая на данном этапе, эквивалентна следующей:

$$\frac{d\vec{u}_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_i} \text{grad } P_i - \frac{\chi_i}{\rho_e \varphi_i} \text{grad } P_e; \quad (13)$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \text{div} \vec{u}_i; \quad (14)$$

$$\frac{de_i}{dt} = -\frac{P_i}{\rho_i} \text{div} \vec{u}_i; \quad (15)$$

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{u}_i. \quad (16)$$

При численной реализации системы (13)–(16) в уравнения (13), (15) к давлению добавляется счетная вязкость компонента. В данном случае это квадратичная искусственная вязкость, $q_i = k\rho_i(h_i \text{div} u_i)^2$, i — номер компонента. Система уравнений (13)–(16) замыкается уравнением состояния среды для каждого компонента: $P_i = P_i(\rho_i, e_i)$.

Исходная система уравнений для электронов эквивалентна следующей:

$$\rho_e = \sum_i \frac{\chi_i \rho_i}{\varphi_i}; \quad (17)$$

$$\rho_e \vec{u}_e = \sum_i \frac{\chi_i \rho_i \vec{u}_i}{\varphi_i}; \quad (18)$$

$$\frac{de_e}{dt} = -\frac{P_e}{\rho_e} \text{div} \vec{u}_e. \quad (19)$$

Здесь суммирование ведется только по нечетным i ; $\varphi_i = m_i/m_0$, где m_0 — константа. При численной реализации системы (17)–(19) в уравнение (19) к давлению добавляется счетная вязкость электронов. Система уравнений (17)–(19) замыкается уравнением состояния среды для электронного компонента: $P_e = P_e(\rho_e, e_e)$.

Перед началом счета по компонентам рассчитывается *электронная добавка* $\chi_i \text{grad } P_e / (\rho_e \varphi_i)$ в уравнении движения, которая затем прибавляется к приращению скорости, рассчитанному на данном этапе.

Разностная схема решения уравнений газовой динамики описана в работе [31]. Остановимся лишь на изменениях, связанных с распараллеливанием. Поскольку вычисления производятся только по явным схемам, можно воспользоваться типовой схемой поточечного распараллеливания [32].

Все вычисления лагранжева этапа разбиваются на шесть подэтапов:

1. Определение давления электронов $P_e = P_e(\rho_e, e_e)$ в центрах счетных ячеек, рассчитываемых на данном процессоре (для краткости — ячеек данного процессора), а также ячеек двух доступных слоев *перекрывтия процессоров* (в дальнейшем такие слои будем называть *внешними*). Передач данных на соседние процессоры на этом подэтапе нет.
2. Вычисления, аппроксимирующие уравнения движения, связанные с градиентом давления электронов. Результатом являются значения ускорений электронов в центрах граней ячеек данного процессора и двух внешних слоев. Передач данных нет.
3. Определение давления каждого компонента $P_i = P_i(\rho_i, e_i)$ в центрах ячеек данного процессора, а также ячеек двух внешних слоев. Передач данных нет.

4. Вычисления, аппроксимирующие уравнения движения для компонентов. Результат вычислений — значения ускорений в центрах граней ячеек данного процессора и двух внешних слоев. Передач данных нет.
5. Определение новых скоростей в узлах счетной сетки для каждого компонента и электронов и передача полученных значений на соседние процессоры.
6. Определение новых координат узлов сетки (они разные для разных компонентов) и выполнение вычислений, аппроксимирующих уравнения неразрывности и энергии для ячеек данного процессора и двух внешних слоев. Результатом являются значения энергий, плотностей и объемных концентраций для компонентов. Передач данных нет.

МГД-этап. На этом этапе выполняется расчет изменения магнитного поля (12). Схема расчета основана на использовании интегрального вида уравнения (12). В работе В. М. Головизнина и др. [33] для двумерной МГД применяется закон сохранения магнитного потока через лагранжевы поверхности, являющиеся диагоналями ячеек сетки. Аналогичная идея применена авторами настоящей статьи в двумерной МГД в коде ЭГАК.

Итак, соотношения, полученные из уравнения (12)

$$\frac{\partial H_r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (u_{er} H_z - u_{ez} H_r); \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r (u_{er} H_z - u_{ez} H_r) \right],$$

выражают закон сохранения магнитного потока через любую замкнутую лагранжеву поверхность для *вмороженного* в среду магнитного поля. Это свойство потока используется для разностной аппроксимации.

На лагранжевом этапе расчета сохраняются магнитные потоки Φ_0 , Φ_1 через поверхности от вращения на один радиан вокруг оси симметрии диагоналей счетной ячейки (рис. 2):

$$\Phi_0^{n+1} = \Phi_0^n; \quad \Phi_1^{n+1} = \Phi_1^n. \quad (20)$$

Положительным направлением будем считать направление при повороте диагоналей l_0 , l_1 против часовой стрелки.

Выражения для магнитных потоков в координатной записи выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= (-H_z \Delta r_{03} + H_r \Delta z_{03}) r_{03}; \\ \Phi_1 &= (-H_z \Delta r_{12} + H_r \Delta z_{12}) r_{12}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\Delta r_{mn} = r_m - r_n$; $\Delta z_{mn} = z_m - z_n$; $r_{mn} = (r_m + r_n) / 2$.

Запишем с учетом сохранения потоков (20) и формул (21) выражения для вычисления нового магнитного поля:

$$H_z^{n+1} = \frac{1}{2S^{n+1}} \left(\frac{\Phi_0^n \Delta z_{12}}{r_{03}} - \frac{\Phi_1^n \Delta z_{03}}{r_{12}} \right)^{n+1}; \quad H_r^{n+1} = \frac{1}{2S^{n+1}} \left(\frac{\Phi_0^n \Delta r_{12}}{r_{03}} - \frac{\Phi_1^n \Delta r_{03}}{r_{12}} \right)^{n+1},$$

где $S^{n+1} = \frac{1}{2} (\Delta z_{03} \Delta r_{12} - \Delta r_{03} \Delta z_{12})^{n+1}$.

Некоторые особенности реализации связаны с предполагаемой вмороженностью магнитного поля в электроны. Электроны находятся во всей области, поэтому возникает проблема отслеживания контактной границы электронов, находящихся в ПВ. В настоящей работе ее положение определяется по скорости электронов. На данном этапе передаются массивы с радиусами электронов и значения величин hx , hy .

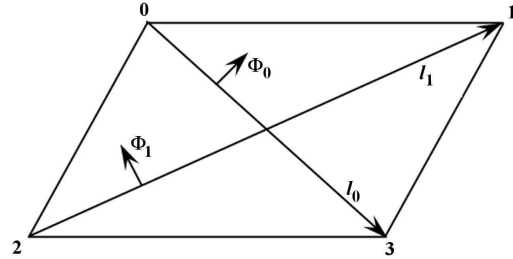


Рис. 2. Сеточный шаблон для расчета магнитного поля

Эйлеров этап газовой динамики. На этом этапе строится новая счетная сетка, которая является единой для всех компонентов (как правило, сетка возвращается в свое первоначальное положение). Пересчитывается магнитная энергия по каждому координатному направлению:

$$E_{mr} = \frac{H_r^2}{2}; \quad E_{mz} = \frac{H_z^2}{2}.$$

Новым значениям составляющих вектора магнитного поля присваивается знак, который у них был после расчета лагранжева этапа. Также производится учет конвективных потоков для всех компонентов, т. е. решаются уравнения

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla (\vec{u}_i \rho_i) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \vec{u}_i) + \nabla (\rho_i \vec{u}_i \vec{u}_i) = 0; \quad \frac{\partial \rho_i e_i}{\partial t} + \nabla (\rho_i e_i \vec{u}_i) = 0.$$

При этом в качестве начальных данных используются значения величин, полученные на лагранжевом этапе вычислений.

Разностная схема на данном этапе практически ничем не отличается от используемой на этапе адвекции в газодинамической методике ЭГАК [31]. Заметим только, что имеются схемы как первого порядка аппроксимации (донорный метод), так и третьего порядка (метод PPM).

Отметим особенности, связанные с распараллеливанием. Поскольку все схемы эйлерова этапа также являются явными, то и здесь можно воспользоваться типовой схемой поточечного распараллеливания [32].

Все вычисления на данном этапе разбиваются на пять подэтапов:

1. Определение покомпонентных потоков объема ΔV_i через грани ячеек, а также новых объемных концентраций β_i для всех ячеек текущего процессора. Передача данных на соседние процессоры на этом подэтапе нет.
2. Вычисление потоков массы компонентов и новых плотностей. Одновременно с вычислениями происходит передача на соседние процессоры рассчитанных величин (потоков объема и массы через стороны, новых значений концентраций и плотностей) для гранично-процессорных точек.
3. Интерполяция всех остальных величин, определенных на единицу массы (или объема) ячейки или единицу массы (или объема) компонента, включая внутреннюю энергию. Передача данных нет.
4. Расчет потоков импульса для всех ячеек процессора, а также всех ячеек одного (ближайшего) внешнего слоя. Расчет потоков импульса для одного внешнего слоя позволяет избежать передачи потоков между процессорами при расчете значений узловых скоростей. На этом подэтапе производится передача значений величин, рассчитанных на подэтапе 3.
5. Пересчет составляющих вектора скорости каждого компонента для всех ячеек процессора и ячеек двух внешних слоев, а также передача рассчитанных скоростей на соседние процессоры.

Этап обмена между компонентами. В общем виде система уравнений, описывающих обмен массой, импульсом и энергией каждого из компонентов k со всеми остальными компонентами и электронами, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} &= \sum_j S_{jk}; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \vec{u}_k) &= \sum_j \left(S_{jk} \vec{u}_j + \vec{F}_{jk} \right) + \vec{G}_k + \vec{U}_k; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \varepsilon_k) &= \sum_j \left[S_{jk} \left(\varepsilon_j + \frac{w_{kj}^2}{2} \right) + \vec{F}_{kj} \cdot \vec{w}_{kj} \xi_j + Q_{kj} \right] + Q_{ke} + Q_{ke}^{inel}; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e \varepsilon_e) &= - \sum_k Q_{ke} + \frac{B}{\gamma - 1} \sum_k \sum_j I_{kj} \Delta_{kj}. \end{aligned}$$

Детальное описание правых частей приведено в разд. 1. Вычисления производятся с данными, полученными на предыдущем этапе, которым ниже соответствуют переменные без временного индекса или с индексом n .

Разностный аналог системы уравнений имеет следующий вид:

$$m_k^{n+1} = m_k^n + \tau \sum_j S_{jk} V \beta_{sec}, \quad (22)$$

где $\beta_{sec} = \beta_k + \beta_j - 1$ есть объем пересечения двух компонентов; $m_k^n = \rho_k V \beta_k$ — масса компонента k ; V — объем ячейки. Взаимодействие происходит между компонентами 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, 3 и 5. Из (22) имеем

$$\rho_k^{n+1} = \frac{m_k^{n+1}}{V_k \beta_k}.$$

Была исследована также неявная разностная схема для масс компонентов, подобная описанной в [17].

Интегрируя систему уравнений движения по объему ячейки импульса (она включает в себя четвертинки окружающих данный узел ячеек, см. [31]) и используя явную разностную схему первого порядка аппроксимации, получаем систему разностных уравнений

$$u_k^{n+1} = \frac{m_k^{n*} u_k^n + \tau \beta_{sec} V \left(\sum_j S_{jk}^* u_j + F_{jk} + G_k + U_k \right)}{m_k^{(n+1)*}},$$

где $\tau = \Delta t$ — шаг по времени; m_k^* — масса k -го компонента; верхний индекс * у m_k и S_{jk} показывает, что значения массы и плотности здесь рассчитываются как средние арифметические по четырем ячейкам, окружающим узел, в котором рассчитывается скорость. Также отметим, что в связи с появлением азимутальной составляющей скорости в уравнении движения для r -й составляющей скорости появляется сила, равная $F_r = u_\varphi^2 / r$, а для φ -й компоненты — сила скорости $F_\varphi = u_\varphi u_r / r$.

Для аппроксимации уравнений энергии компонентов используется явная разностная схема первого порядка аппроксимации. Интегрируя уравнения энергии по объему ячейки, получаем следующую систему разностных уравнений:

$$m_k^{n+1} \varepsilon_k^{n+1} - m_k^n \varepsilon_k^n = \tau V \beta_{sec} \sum_j \left[S_{jk} \left(\varepsilon_j + \frac{w_{kj}^2}{2} \right) + F_{kj} w_{kj} \xi_j + Q_{kj} \right] + \tau V \beta_{sec} (Q_{ke} + Q_{ke}^{inel}),$$

откуда

$$\varepsilon_k^{n+1} = \frac{m_k^n \varepsilon_k^n + \tau V \beta_{sec} \sum_j \left[S_{jk} \left(\varepsilon_j + \frac{w_{kj}^2}{2} \right) + F_{kj} w_{kj} \xi_j + Q_{kj} \right] + \tau V \beta_{sec} (Q_{ke} + Q_{ke}^{inel})}{m_k^{n+1}}.$$

Заметим, что при вычислении энергии компонентов на $(n+1)$ -м временном шаге плотности, скорости и концентрации также берутся с предыдущего этапа вычислений.

Для аппроксимации уравнений энергии электронов используется явная разностная схема первого порядка аппроксимации. Интегрируя уравнения энергии электронов по объему ячейки, получаем

$$\varepsilon_e^{n+1} = \frac{m_e^n \varepsilon_e^n - \tau V \beta_{sec} \left(\sum_k Q_{ke} + \frac{B}{\gamma - 1} \sum_k \sum_j I_{kj} \Delta_{kj} \right)}{m_e^{n+1}}.$$

Поскольку все схемы данного этапа являются явными, можно воспользоваться типовой схемой поточечного распараллеливания [32].

Все вычисления разбиваются на три подэтапа:

1. Пересчет составляющих вектора скорости каждого компонента, измененных за счет обменов, для всех ячеек процессора и двух внешних слоев, а также передача рассчитанных скоростей на соседние процессоры.
2. Пересчет энергии каждого компонента, измененной за счет обменов, для всех ячеек процессора и двух внешних слоев, а также передача рассчитанных энергий на соседние процессоры.
3. Пересчет плотности каждого компонента, измененной за счет обменов, для всех ячеек процессора и двух внешних слоев, а также передача рассчитанных плотностей на соседние процессоры.

3. Расчеты операции "Морская звезда"

В качестве примера применения методики ЭГАК-МП6 был рассчитан американский взрыв "Морская звезда" — ЯВ с энерговыделением $q = 1400$ кт, который был произведен 9 июля 1962 г. в Тихом океане на высоте 400 км над о. Джонсон. В 2006 г. появилась статья [8], в которой содержится большое количество экспериментальных данных по операции "Морская звезда". По методике ЭГАК-МП6 были проведены секторные расчеты этой операции в направлениях вертикально вверх, вниз и горизонтально поперек линий магнитного поля.

Постановка расчетов. Начальные данные для этих расчетов задавались следующим образом. Считалось, что при $t = 0$ ПВ разлетелись на расстояние $R_0 = 5$ км. Их плотность постоянна по радиусу. Полная масса $M = 1000$ кг, полная энергия разлетающейся плазмы $E_0 = \frac{1}{6} E_{tot}$, где $E_{tot} = 1,4$ Мт, т. е. $E_0 \sim 10^9$ МДж. Предполагалось, что 90 % массы ПВ составляет масса ионов ПВ с учетом закалки (первый поток), а 10 % — масса нейтральных частиц ПВ (второй поток). Полагалось, что доля внутренней энергии ПВ составляет 10 % от полной начальной энергии ПВ, а доля кинетической энергии — 90 %. Профиль скорости линейный по радиусу. Скорость границы составляла $v_0 = 1730$ км/с.

Магнитное поле $\vec{H} = (H_x, H_y)$ в области $r > R_0$ задавалось как суперпозиция однородного магнитного поля \vec{H}_0 и поля магнитного диполя с радиусом R_0 , ориентированного по \vec{H}_0 . Принималось, что линии магнитного поля \vec{H}_0 направлены горизонтально и $\vec{H}_0 = 0,25$ Э;

$$H_x = H_0 \left[1 + \frac{R_0^3}{2} \frac{y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right]; \quad H_y = -1,5H_0 xy \frac{R_0^3}{(x^2 + y^2)^{5/2}},$$

где $R_0 = 5$; $H_0 = 0,7$, что соответствует напряженности магнитного поля \vec{H}_0 в 0,25 Э. Характеристики атмосферы задавались в соответствии со справочником [34] и работой [8].

Подробнее постановка расчетов описана в работе [17].

На рис. 3, взятом из работы [8], представлены данные о размерах магнитной каверны в вертикальной плоскости XU в различные моменты времени.

На рис. 4 расчетные размеры каверны сравниваются с данными работы [8]. На рис. 5—7 представлены расчетные графики напряженности магнитного поля в сравнении с экспериментом. Значения напряженности нормированы на H_0 .

Заключение

Основные результаты работы состоят в следующем:

- разработана физическая модель для описания течений разреженной плазмы в магнитном поле, основанная на многопоточковом МГД-приближении;
- один из вариантов модели (шестипоточковый) реализован в виде двумерной лагранжево-эйлеровой методики ЭГАК-МП6;

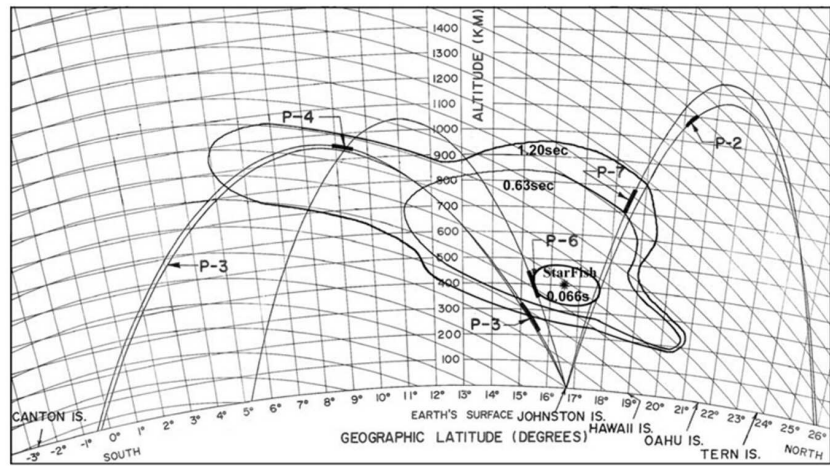


Рис. 3. Форма каверны в моменты времени $t = 0,066; 0,63; 1,2$ с; P-2, P-3, P-4 — ракеты, запущенные для измерения параметров области взрыва

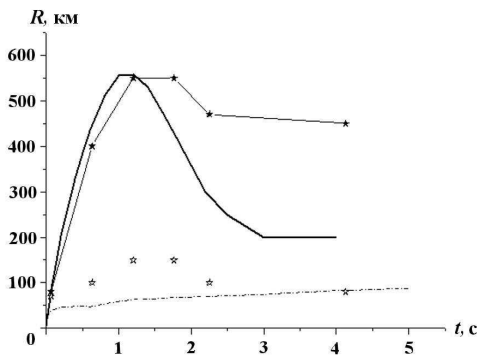


Рис. 4. Зависимости от времени радиусов каверны в направлениях вверх и вниз: —*— вверх, данные из статьи [8]; — — вверх, расчет ЭГАК-МП6; * — вниз, данные из статьи [8]; ---- — вниз, расчет ЭГАК-МП6

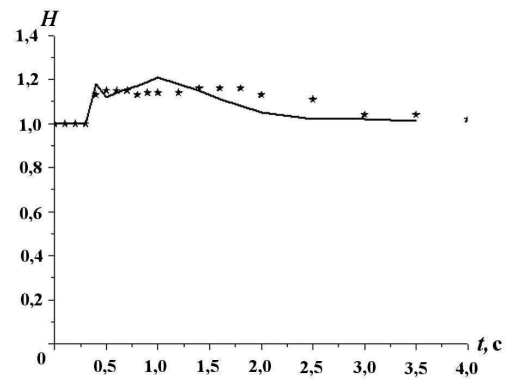


Рис. 5. Зависимость от времени напряженности магнитного поля: — — расчет ЭГАК-МП6; * — данные измерений ракетой P-2

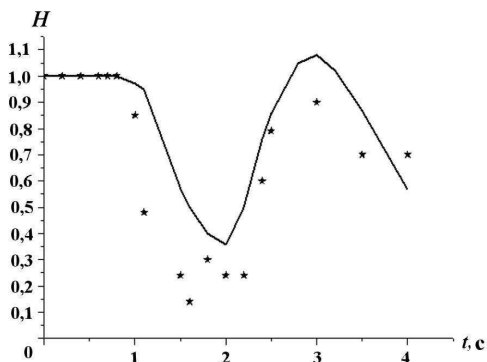


Рис. 6. Зависимость от времени напряженности магнитного поля: — — расчет ЭГАК-МП6; * — данные измерений ракетой P-4

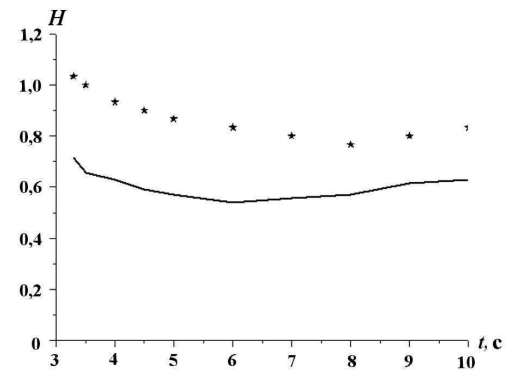


Рис. 7. Зависимость от времени напряженности магнитного поля: — — расчет ЭГАК-МП6; * — данные измерений ракетой P-3

- проведены секторные расчеты динамики плазмы и магнитного поля для опыта "Морская звезда", получено хорошее согласие с результатами измерений в опыте.

Приведенные результаты показывают, что методика ЭГАК-МП6 может применяться для расчета эффектов образования и движения плазмы в магнитном поле. В дальнейшем предполагается развитие физической модели и методики ЭГАК-МП6 и проведение как таких расчетов ЯВ, так и расчетов лазерных экспериментов по исследованию взаимодействия потоков разреженной плазмы с магнитным полем для верификации методики и валидации модели.

Список литературы

1. Ядерные испытания СССР. Т. 2. Лос-Аламос: Begell-Atom, 1998. С. 51—73.
2. *Hoerlin H.* US High-Altitude Test Experiments. LASL, LA-6405, 1976. Los Alamos National Laboratory Research Library, NM 87544.
3. Операция "Морская звезда". Сборник статей. М.: Атомиздат, 1964.
4. *Хесс В.* Радиационный пояс и магнитосфера. М.: Атомиздат, 1972.
5. *Berg R. A.* A Starfish Happening. Lockheed Missiles and Space Co. March, 1967. Rep. DASA—1925, AD-955681.
6. *Гаврилов Б. Г., Гайнуллин К. Г., Жмайло В. А. и др.* Геомагнитные эффекты от расширяющегося плазменного образования высотного ЯВ // ФГВ. 2004. Т. 40, № 6. С. 31—41.
7. *Vomke H. A., Balton I. A., Grote H. H., Harris A. K.* Near and distant observation of the 1962 Johnston Island high-altitude nuclear tests // J. of Geophys. Res. 1964. Vol. 69, No 15. P. 3125—3140.
8. *Dyal P.* Particle and field measurements of the starfish diamagnetic cavity // Ibid. 2006. Vol. 111. P. A12211.
9. *Голубев А. И., Соловьев А. А., Терехин В. А.* О бесстолкновительном разлете ионизированного облака в однородную замагниченную плазму // ПМТФ. 1978. № 5. С. 33—43.
10. *Башурин В. П., Голубев А. И., Терехин В. А.* О бесстолкновительном торможении ионизированного облака, разлетающегося в однородную замагниченную плазму // Там же. 1983. № 5. С. 10—17.
11. *Антоненко Э. М., Башурин В. П., Долголева Г. В., Жмайло В. А.* Метод расчета "двухпоточных" вязких течений неравновесной плазмы в магнитном поле // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1995. Вып. 1—2. С. 48—53.
12. *Губков Е. В., Жмайло В. А., Самигулин М. С.* Образование и движение плазмы при сильных взрывах в магнитосфере (операция "Морская звезда") // Тез. докл. науч. конф. "II Забавинские научные чтения". Снежинск, 1995.
13. *Башурин В. П., Богуненко Ю. Д., Гайнуллин К. Г. и др.* Физические эффекты ЯВ в атмосфере // Высокие плотности энергии. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 1997.
14. *Жмайло В. А.* Физические эффекты космических ЯВ // Теоретики ВНИИЭФ. Прошлое и настоящее. Саров, 2003. С. 56—60.
15. *Холодов Я. А., Холодов А. С., Ступицкий Е. Л., Репин А. Ю.* Численное исследование поведения плазменного облака в верхней ионосфере // Математическое моделирование. 2005. Т. 17, № 11. С. 43—62.
16. *Ступицкий А. Е., Холодов А. С.* Моделирование динамики плазменного сгустка высокой удельной энергии в верхней атмосфере // Геомагнетизм и аэронавигация. 2012. Т. 52, № 4. С. 435—456.

17. Жмайло В. А., Анисина И. М., Будников В. И. и др. Физические эффекты ядерного взрыва в операции "Морская звезда" // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2008. Т. 13. С. 16—37.
18. Залялов А. Н., Жмайло В. А., Широков А. Е., Соболев И. В. Расчеты магнитного поля и потоков электронов в области взрыва операции "Морская звезда" // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2012. Вып. 3. С. 47—57.
19. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005.
20. Grad H. On the kinetic theory of rare gases // Comm. Pure and Appl. Phys. 1949. Vol. 2. P. 331.
21. Башурин В. П., Долголева Г. В., Кочубей Ю. К., Терехин В. А. Кинетическое описание сильного взрыва в разреженном газе // ПМТФ. 1986. № 2. С. 80—85.
22. Бахрах С. М., Губков Е. В., Жмайло В. А., Терехин В. А. Разлет плазменного облака в однородном магнитном поле // Там же. 1974. № 4. С. 146—150.
23. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
24. Смирнов Б. М. Асимптотические методы в теории атомных столкновений. М.: Атомиздат, 1973.
25. Гольданский В. М., Никитин Е. Е., Смирнов Б. М. Теория столкновений атомных частиц. М.: Наука, 1981.
26. Сена Л. А. Столкновения электронов и ионов с атомами газа. Л.-М.: Физматгиз, 1948.
27. Фирсов В. П. Естественная трактовка средней энергии возбуждения электронов при атомных столкновениях // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 1517—1520.
28. Fleschmann H. H., Dehmel R. C., Lee S. K. Direct-transition features in stripping collisions of heavy neutral atoms and ions // Phys. Rev. A. 1972. Vol. 5, No 4. P. 1784—1798.
29. Вайнштейн Л. А., Соболев И. И., Юлов Е. А. Возбуждение атомов и уширение спектральных линий. М.: Наука, 1979.
30. Бронштейн И. Н., Семендяев К. И. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986.
31. Янилкин Ю. В., Беляев С. П., Бондаренко Ю. А. и др. Эйлеровы численные методики ЭГАК и ТРЭК для моделирования многомерных течений многокомпонентной среды // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2008. Вып. 12. С. 54—68.
32. Беляев С. П. Метод мелкозернистого распараллеливания с динамической балансировкой на примере задачи газовой динамики и вычислительные эксперименты на параллельной системе // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2000. Вып. 1. С. 45—49.
33. Головизнин В. М., Коршия Т. К., Самарский А. А., Фаворский А. В. О вариационно-разностных схемах двумерной магнитной гидродинамики: Препринт № 57. М.: ИПМ АН СССР, 1977.
34. Околосземное космическое пространство. Справочник / Под ред. Ф. С. Джонсон. М.: Мир, 1966.

Статья поступила в редакцию 30.04.13.
