

УДК 519.6

АЛГОРИТМ КОРРЕКЦИИ СЕТКИ К ОБЛАСТИ ВРАЩЕНИЯ

О. В. Ушакова
(ИММ УрО РАН, УрФУ, г. Екатеринбург)

Предлагается алгоритм коррекции граничных узлов структурированной сетки к области вращения, полученной поворотом вокруг оси на 180° плоской образующей кривой, состоящей из отрезков прямых, дуг окружностей и эллипсов.

Ключевые слова: сетки, граничные узлы, области вращения, проекция.

Введение

В процессе численного решения задач многокомпонентной гидродинамики [1], а также других задач математической физики в областях вращения узлы сетки, лежащие на поверхности вращения, по ряду причин (особенности алгоритмов решения задач и построения сеток) могут "сходиться" с поверхности вращения. Так, например, в [2, 3] граничные узлы в итерационном процессе глобальной перестройки сеток двигаются по поверхности, "сотканной" из линейчатых ячеек граней начальной сетки. При этом все узлы лежат близко к поверхности вращения на некоторой поверхности, ее аппроксимирующей, и, за исключением фиксированных линий и узлов, не принадлежат ей. В других алгоритмах, использующих иные способы аппроксимации поверхности вращения, или из-за ряда других причин сетка также может не принадлежать поверхности вращения. Однако если граничные узлы сетки принадлежат или двигаются по некоторой поверхности, отличающейся от поверхности вращения, то это может приводить к потере объема как глобально (всей области в целом), так и локально (какой-то части объема). Кроме того, если узлы сетки перестают принадлежать поверхности вращения, это также может приводить к увеличению погрешности аппроксимации краевых условий. Поэтому для математического моделирования важным условием может являться принадлежность узлов сетки поверхности вращения.

Предлагается алгоритм, реализующий указанное выше требование для поверхности, полученной вращением на 180° плоской образующей кривой, состоящей из отрезков прямых, дуг окружностей и эллипсов. Алгоритм позволяет находить проекции граничных узлов структурированной сетки на поверхность вращения, образующую границу области вращения. В разд. 1 представлено общее описание алгоритма, в котором выделены четыре отдельных этапа. В разд. 2—5 описан каждый из этапов для случаев задания элементов образующей в виде отрезка прямой, дуги окружности и дуги эллипса.

1. Общее описание алгоритма

Пусть структурированная сетка $\mathbf{x}_{ijk} = (x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$, $i = 0, \dots, N - 1$, $j = 0, \dots, M - 1$, $k = 0, \dots, L - 1$, где N , M , L задают число узлов по каждому из координатных направлений, строится в области G , полученной вращением плоской образующей кривой на 180° . Пусть образующая кривая задана в плоскости (x, z) . В рассматриваемых здесь случаях образующая всегда является замкнутой кривой, ограничивающей двумерную область, и может состоять из отрезков прямых, дуг окружностей и эллипсов (элементы образующей) (кривая $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8 P_9 P_{10} P_1$ на рис. 1).

При повороте вокруг оси z на угол π она образует тело вращения G . Необходимо отметить, что G отличается от классического тела вращения, которое получается при вращении образующей кривой на 360° . Тело G получается вращением на 180° всех точек двумерной области, ограниченной замкнутой образующей, включая саму образующую, и представляет собой половину от классического тела вращения, вырезаемую плоскостью $y = 0$ в зависимости от направления поворота вокруг оси.

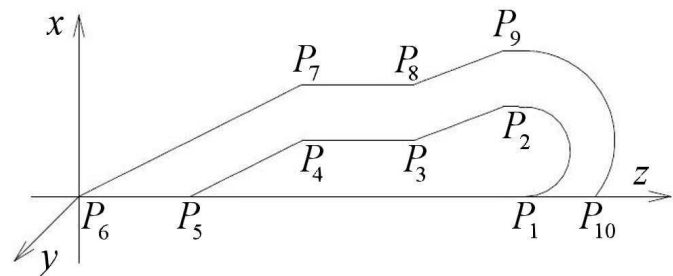


Рис. 1. Образующая кривая

Область вращения представляется при построении структурированных сеток в виде криволинейного шестигранника [2, 4, 5]. Ячейки сетки строятся с помощью трилинейного отображения единичного куба и называются линейчатыми (см. [6]) — имеют линейчатые грани. Процесс построения сетки (нахождение координат узлов) часто состоит из двух этапов: построение начальной сетки, граничные узлы которой принадлежат поверхности вращения, и оптимизация начальной сетки или глобальная перестройка начальной сетки с целью улучшения ее качества — построение оптимальной сетки. В [2, 3, 7] были предложены и описаны соответствующие алгоритмы. Они не сводятся к ротационным алгоритмам построения сеток, когда в областях вращения сетки строятся путем вращения двумерных сеток и на оси вращения возникают вырожденные ячейки (см. [8]). Алгоритмы [2, 3] относятся к трехмерному случаю, созданы в рамках вариационного подхода [9] и осуществляют конструирование сеток без вырождений на оси вращения. В процессе глобальной перестройки начальной сетки в [2, 3] граничные узлы могут либо быть фиксированными и находиться на поверхности вращения образующей кривой, так как у начальной сетки эти узлы принадлежат поверхности вращения, либо свободно двигаться по поверхности, сотканной из граней линейчатых ячеек начальной сетки.

Для построения сеток с граничными узлами, принадлежащими поверхности вращения, предложим следующий алгоритм. При нахождении граничных узлов сначала будем находить узел, принадлежащий линейчатой поверхности (линейчатой грани ячейки сетки) по алгоритмам из [2], а затем проецировать его на поверхности вращения. Таким образом, на каждой итерации процесса перестройки сетки, представляющего собой численный алгоритм минимизации дискретного функционала качества сетки, при реализации граничных условий [2, 3] будем выбирать точки, принадлежащие поверхности вращения. Предлагаемую процедуру проецирования граничных узлов можно применять и к сетке, граничные узлы которой сошли с поверхности вращения. Операция проецирования, вообще говоря, может приводить к вырождению сетки, т. е. появлению в сетке вырожденных ячеек [10–12]. Однако такой случай возможен только для достаточно грубых сеток и в имеющейся практике применения метода не встречался.

В рассматриваемых в [2, 3, 7] случаях представления области вращения в виде криволинейного шестигранника коррекция осуществляется только на гранях $k = 0$ и $k = L - 1$, так как этим граням соответствуют поверхности вращения, образованные в зависимости от направления обхода либо нижней частью $P_1P_2P_3P_4P_5$, либо верхней частью $P_6P_7P_8P_9P_{10}$ замкнутой образующей кривой $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9P_{10}P_1$ (см. рис. 1). Остальные грани $i = 0$, $i = N - 1$, $j = 0$, $j = M - 1$ криволинейного шестигранника G являются плоскими. Элементы образующей, соответствующие граням $k = 0$ и $k = L - 1$, могут быть заданы как однозначными, так и многозначными функциями $x = x(z)$. Обход образующей кривой при задании ее элементов может осуществляться как по часовой стрелке, так и против часовой стрелки.

Опишем процедуру проецирования узлов. Пусть \mathbf{x}_{ijk} — подлежащий коррекции узел сетки, лежащий на грани $k = 0$ или $k = L - 1$. Будем обозначать его также как узел $P'' = P''_{ijk}$ (рис. 2). Он имеет координаты (x'', y'', z'') . Получим точку P' , лежащую на поверхности вращения, проецированием узла P'' на поверхность вращения лучом, идущим по радиальному направлению (идея такой "подсадки" узла на поверхность вращения была предложена О. М. Козыревым). Для этого опустим из точки P'' перпендикуляр $P''L$ к оси вращения. На пересечении прямой $P''L$ с поверхностью вра-

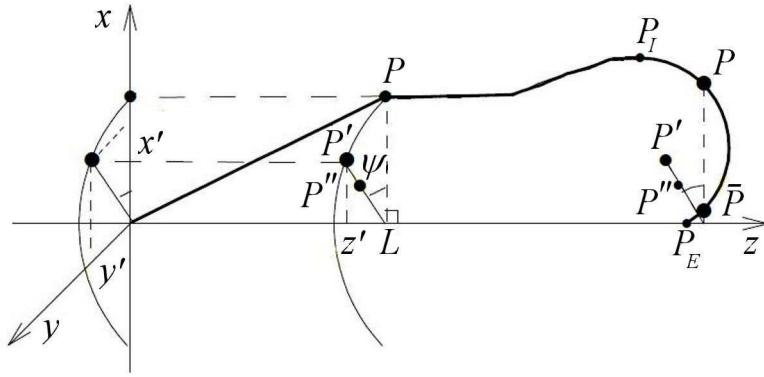


Рис. 2. Часть образующей кривой

$(x \cos \psi, x \sin \psi, z)$. Таким образом, для каждого узла сетки, лежащего на гранях $k = 0, k = L - 1$, находим узел, лежащий на поверхности вращения, и заменяем сетку узлов P''_{ijk} при $k = 0, k = L - 1$, аппроксимирующую поверхность вращения, сеткой узлов P'_{ijk} , лежащей на поверхности вращения.

Образующая кривая задается в текстовом файле с помощью задания элементов образующей и некоторой другой информации. Каждый элемент $P_I P_E$ образующей (см. рис. 2) задается номером, а также координатами начальной P_I и конечной P_E точек (за исключением случая дуги эллипса) и другими параметрами. По информации, содержащейся в файле, можно определить номера элементов образующей кривой, которые задают грани области вращения $k = 0$ и $k = L - 1$.

Алгоритм состоит из четырех этапов. Первый этап — это нахождение частей образующей, определяющих грани $k = 0$ и $k = L - 1$. Второй этап — нахождение элемента образующей для каждой точки P''_{ijk} при $k = 0, k = L - 1$, содержащего точку $P = (x, 0, z), z = z''$, порождающую проекцию P'_{ijk} узла P''_{ijk} на поверхность вращения. В случаях формирования отдельной грани с помощью образующей кривой, заданной многозначной функцией $x = x(z)$, таких элементов может быть несколько. Третий этап (определение параметров поворота) — нахождение точки $P = (x, 0, z), z = z''$ на образующей и угла поворота ψ для нахождения проекции точки P'' на поверхность вращения, а затем и самой проекции. Так как элементов, содержащих точку, порождающую проекцию, может быть несколько, необходим четвертый этап — выбор оптимальной проекции для данного узла. Оптимальная проекция выбирается путем оценки расстояния от данного узла до проекции: в качестве узла выбирается та проекция, которая дает минимальное расстояние $|P'' P'|$.

Опишем каждый из этапов.

2. Этап 1. Нахождение части образующей, определяющей грань

Для каждой грани $k = 0, k = L - 1$ на основании информации из текстового файла задания образующей определяются минимальный и максимальный номера элементов части образующей, порождающей поверхность грани — границу области, содержащую все узлы сетки P'_{ijk} . Затем для каждого узла сетки P''_{ijk} , лежащего на линейчатой поверхности ячейки сетки с предыдущей итерации, находим элемент образующей, который содержит точку, порождающую проекцию P'_{ijk} данного узла P''_{ijk} на поверхность вращения.

3. Этап 2. Нахождение элемента образующей

Для каждого узла P''_{ijk} на гранях $k = 0$ и $k = L - 1$ будем перебирать элементы образующей по возрастанию их номеров от минимального до максимального, определять для них диапазон $[z_I, z_E]$ изменения третьей координаты z и находить элемент образующей $P_I P_E$, содержащий третью коор-

дения получим точку P' . Так как точка P' лежит на поверхности вращения, то ей всегда соответствует точка $P = (x, 0, z)$ на образующей, поворотом которой на угол ψ была получена точка P' . При вращении каждая из точек образующей описывает дугу окружности, которая располагается в плоскости, перпендикулярной оси вращения, поэтому $z = z''$. Найдем угол поворота ψ и расположенную на образующей кривой точку $P = (x, 0, z), z = z''$. Точка P' будет иметь координаты

динату узла $z'' = z$ на отрезке $[z_I, z_E]$, т. е. обладающий свойством

$$z_I \leq z \leq z_E, \quad (1)$$

где z_I и z_E — минимальное и максимальное значения координаты z для элемента образующей. Для этого определим сначала z_I и z_E для каждого элемента образующей. В случае задания элементов образующей с помощью однозначных функций z_I и z_E совпадают с z_{P_I} или z_{P_E} — третьими компонентами точек $P_I = (x_{P_I}, 0, z_{P_I})$ и $P_E = (x_{P_E}, 0, z_{P_E})$ (см., например, все элементы на рис. 1, кроме P_1P_2 и P_9P_{10}).

3.1. Элемент — отрезок прямой. В случае элемента, заданного многозначной функцией в виде отрезка прямой, прямая будет перпендикулярна оси z и $z_I = z_E = z_{P_I} = z_{P_E}$.

3.2. Элемент — дуга эллипса. Определим значения z_I и z_E для эллипса, а затем для его дуги P_IP_E .

Определение начальной и конечной точек элемента. Прежде всего определим начальную P_I и конечную P_E точки элемента дуги эллипса в системе координат (x, z) , так как при задании эллипса координаты этих точек не являются входными параметрами. Будем рассматривать систему координат (ξ, η) для задания эллипса с помощью канонического уравнения и в параметрическом виде. Для точек P_I, P_E при описании эллипса указываются значения величин углов $\varphi_I = \angle AOP_I \geq 0$ и $\varphi_E = \angle AOP_E \geq 0$ (рис. 3), где точка O — центр эллипса, точка A — пересечение эллипса с положительной частью оси η . Задаются также координаты вектора $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = (x_a, 0, z_a)$, координаты центра эллипса $O = (x_O, 0, z_O)$ в системе координат (x, y, z) (см. рис. 3). Если при задании элемента обход от P_I к P_E осуществляется по часовой стрелке, то указывается параметр $\delta = 1$, если против часовой стрелки, то $\delta = -1$.

Пусть эллипс задан в системе координат (ξ, η) с помощью канонического уравнения

$$\frac{\eta^2}{a^2} + \frac{\xi^2}{b^2} = 1, \quad \text{где } a = \sqrt{x_a^2 + z_a^2}, \quad b = ra, \quad (2)$$

а r задается при описании эллипса.

Переход от системы координат (x, z) к системе координат (ξ, η) осуществляется по формулам поворота и параллельного переноса:

$$x = x_O + \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha; \quad (3)$$

$$z = z_O + \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha, \quad (4)$$

где α — угол между положительными направлениями осей ξ и x .

Будем использовать также следующее параметрическое задание эллипса:

$$\eta = a \cos t; \quad \xi = b \sin t, \quad (5)$$

где t — параметр.

Для угла φ_I имеем

$$\operatorname{ctg} \varphi_I = \operatorname{tg} \bar{\varphi}_I = \frac{\eta}{\xi} = \frac{a}{b} \operatorname{ctg} t,$$

где $\bar{\varphi}_I$ — угол между лучом OP_I и положительным направлением оси ξ (см. рис. 3), откуда

$$\operatorname{tg} t = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi_I.$$

Для вычисления параметрических значений эллипса понадобятся значения $\sin t, \cos t$. Имеем

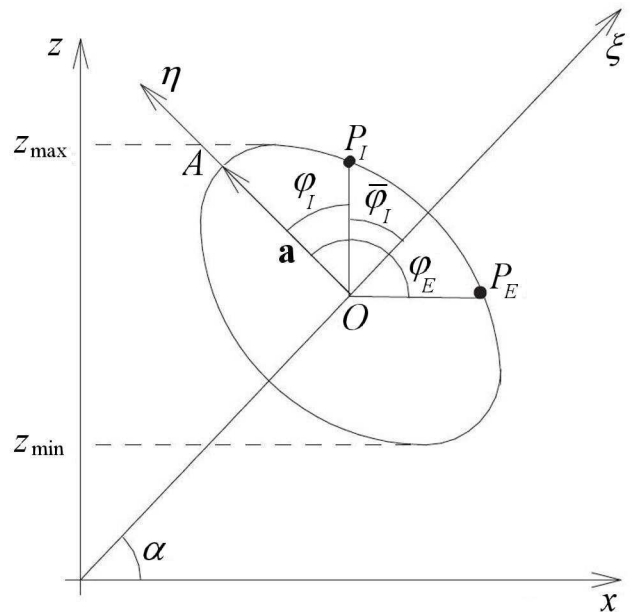


Рис. 3. Дуга эллипса P_IP_E и диапазон изменения компоненты z для эллипса

$$\operatorname{tg} \varphi_I = \frac{\sin \varphi_I}{\cos \varphi_I}.$$

Пусть $\cos \varphi_I = 0$. Тогда сразу можно определить $\eta = 0$. Если $\sin \varphi_I = 1$, то $\xi = b$; если $\sin \varphi_I = -1$, то $\xi = -b$.

Пусть теперь $\cos \varphi_I \neq 0$. Имеем два случая.

Случай 1: выполняются неравенства $\sin \varphi_I > 0$, $\cos \varphi_I > 0$ ($\operatorname{tg} \varphi_I > 0$, $\operatorname{tg} t > 0$) либо $\sin \varphi_I < 0$, $\cos \varphi_I > 0$ ($\operatorname{tg} \varphi_I < 0$, $\operatorname{tg} t < 0$). Тогда имеем

$$\sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}; \quad \cos t = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}.$$

Случай 2: выполняются неравенства $\sin \varphi_I > 0$, $\cos \varphi_I < 0$ ($\operatorname{tg} \varphi_I < 0$, $\operatorname{tg} t < 0$) либо $\sin \varphi_I < 0$, $\cos \varphi_I < 0$ ($\operatorname{tg} \varphi_I > 0$, $\operatorname{tg} t > 0$). Тогда имеем

$$\sin t = -\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}; \quad \cos t = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}.$$

Определив значения $\sin t$, $\cos t$, по формулам (5) найдем ξ , η . Для вычисления x_{P_I} , z_{P_I} используем формулы поворота и параллельного переноса (3), (4). Значения $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ находим по формулам

$$\cos \alpha = \frac{z_A - z_O}{a} = \frac{z_{\mathbf{a}}}{a}; \quad \sin \alpha = \frac{x_O - x_A}{a} = -\frac{x_{\mathbf{a}}}{a}, \quad (6)$$

которые следуют из (3), (4), применяемых при $\xi = 0$, $\eta = a$ для вычисления x_A , z_A .

Аналогично находим координаты точки P_E в системе координат (ξ, η) , а затем и в системе координат (x, z) . При этом вместо параметра φ_I (φ_I) в вышеприведенных формулах используем параметр φ_E (φ_E), а вместо точки P_I — точку P_E .

Определение диапазона изменения координаты z для эллипса. Формулы для определения минимального и максимального значений z для эллипса в целом

$$z_{\min} = z_O - \sqrt{b^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha}; \quad z_{\max} = z_O + \sqrt{b^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha} \quad (7)$$

были любезно предоставлены В. А. Гордейчуком. Докажем их.

Пусть $P_{\min/\max} = (x_{\min/\max}, z_{\min/\max})$ — точки касания эллипса и прямых

$$z = z_{\min/\max}. \quad (8)$$

Получим уравнения касательных (8) к эллипсу в этих точках (см. рис. 3, 4) в системе координат (ξ, η) . Точка касания принадлежит эллипсу. Найдем соответствующие значения $\xi_{\min/\max}$, $\eta_{\min/\max}$. Осуществим в уравнениях касательных (8) переход к переменным ξ , η по формуле (4). Получим уравнения $z_O + \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha = z_{\min/\max}$, которые преобразуем к виду $\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha = z_{\min/\max} - z_O$. Так как $z_{\min/\max} - z_O \neq 0$, получаем уравнения касательных в системе координат (ξ, η) в виде

$$\xi \frac{\sin \alpha}{z_{\min/\max} - z_O} + \eta \frac{\cos \alpha}{z_{\min/\max} - z_O} = 1.$$

Сравнивая их с общим видом уравнений касательных к эллипсу в точках (см., например, [13]) $(\xi_{\min/\max}, \eta_{\min/\max})$ в системе координат (ξ, η)

$$\frac{\xi \xi_{\min/\max}}{b^2} + \frac{\eta \eta_{\min/\max}}{a^2} = 1,$$

получаем

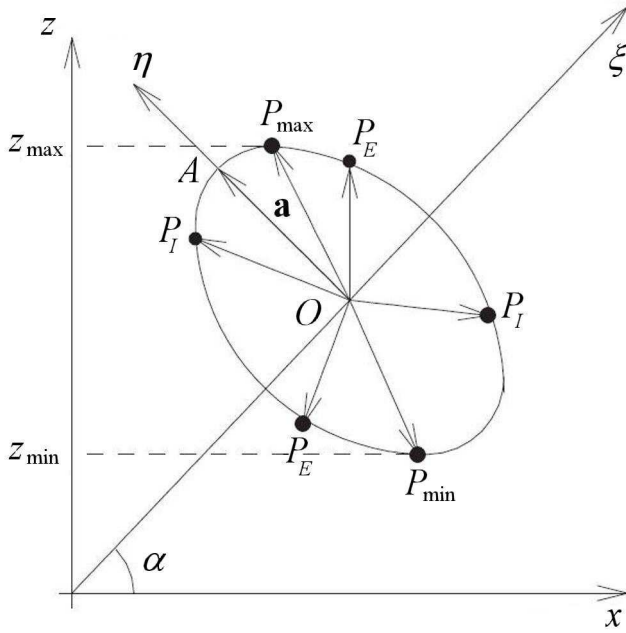


Рис. 4. Варианты расположения точек P_I, P_E по отношению к точкам P_{min}, P_{max}

Определение диапазона изменения координаты z для дуги эллипса. Значения z_I, z_E будут определяться для рассматриваемой дуги $P_I P_E$ в зависимости от расположения точек $P_I, P_E, P_{min}, P_{max}$ на эллипсе по отношению друг к другу (см. рис. 4). Если

$$z_{P_I} = z_{min}, \quad z_{P_E} = z_{max} \quad \text{или} \quad z_{P_I} = z_{max}, \quad z_{P_E} = z_{min}, \quad (10)$$

то имеет место случай задания дуги эллипса с помощью однозначной функции и

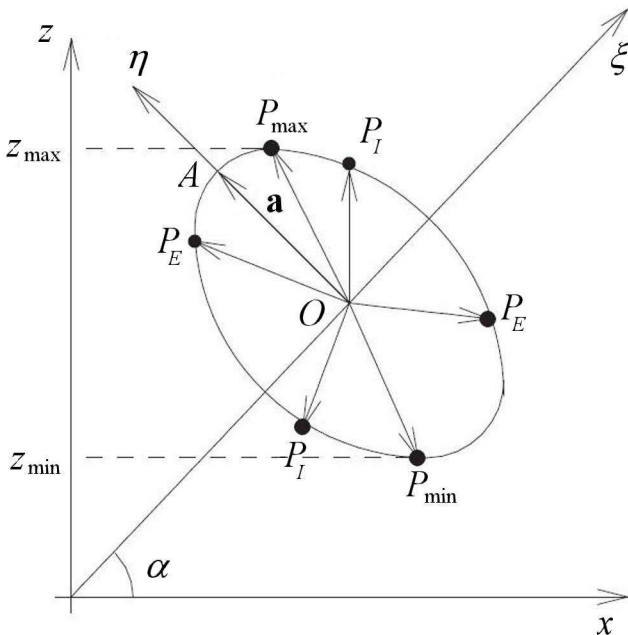


Рис. 5. Варианты расположения точек P_I, P_E по отношению к точкам P_{min}, P_{max} (обход дуги $P_I P_E$ против часовой стрелки)

$$\begin{aligned} \xi_{min/max} &= b^2 \frac{\sin \alpha}{z_{min/max} - z_O}; \\ \eta_{min/max} &= a^2 \frac{\cos \alpha}{z_{min/max} - z_O}. \end{aligned} \quad (9)$$

Точки $P_{min/max} = (\xi_{min/max}, \eta_{min/max})$ принадлежат эллипсу. Следовательно, они удовлетворяют уравнению эллипса. Подставляя их в уравнение, имеем

$$\frac{b^4}{b^2 (z_{min/max} - z_O)^2} \sin^2 \alpha + \frac{a^4}{a^2 (z_{min/max} - z_O)^2} \cos^2 \alpha = 1.$$

Далее получаем $b^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha = (z_{min/max} - z_O)^2$, а затем формулы (7).

Подставим (6) в (7) и определим z_{min}, z_{max} , а затем по формулам (9) координаты точек $P_{min} = (\xi_{min}, \eta_{min}), P_{max} = (\xi_{max}, \eta_{max})$ в системе координат (ξ, η) . Эти значения понадобятся далее при определении z_I, z_E для произвольной дуги эллипса $P_I P_E$.

$$\begin{aligned} z_I &= z_{P_I}, \quad z_E = z_{P_E}, \quad \text{если } z_{P_I} < z_{P_E}, \\ \text{или} \\ z_I &= z_{P_E}, \quad z_E = z_{P_I}, \quad \text{если } z_{P_I} > z_{P_E}. \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда выполняется алгоритм 1 этапа 3 (см. подразд. 4.3) для случая задания дуги эллипса с помощью однозначной функции.

Обход дуги эллипса от P_I к P_E может осуществляться как по часовой стрелке (см. рис. 4) — тогда $\delta = 1 > 0$ (задается при описании эллипса), так и против часовой стрелки (рис. 5) — тогда $\delta = -1 < 0$. Для обоих направлений обхода возможны два случая.

Случай 1: $\sphericalangle P_I P_E \leq 180^\circ$, т. е. $\sigma = \delta [\overrightarrow{OP_E}, \overrightarrow{OP_I}] = \delta (\xi_{P_E} \eta_{P_I} - \xi_{P_I} \eta_{P_E}) \geq 0$. Возможны следующие ситуации.

Точка P_{min} или P_{max} принадлежит дуге $P_I P_E$. Если $P_{max} \in \sphericalangle P_I P_E$, т. е. $\sigma_1 = \delta [\overrightarrow{OP_E}, \overrightarrow{OP_{max}}] = \delta (\xi_{P_E} \eta_{max} - \xi_{max} \eta_{P_E}) \geq 0$, $\sigma_2 = \delta [\overrightarrow{OP_{max}}, \overrightarrow{OP_I}] = \delta (\xi_{max} \eta_{P_I} - \xi_{P_I} \eta_{max}) \geq 0$, то $z_E = z_{max}$; $z_I = \min\{z_{P_I}, z_{P_E}\}$.

Если $P_{\min} \in \sphericalcap P_I P_E$, т. е. $\sigma_3 = \delta \left[\overrightarrow{OP_E}, \overrightarrow{OP_{\min}} \right] = \delta(\xi_{P_E} \eta_{\min} - \xi_{\min} \eta_{P_E}) \geq 0$, $\sigma_4 = \delta \left[\overrightarrow{OP_{\min}}, \overrightarrow{OP_I} \right] = \delta(\xi_{\min} \eta_{P_I} - \xi_{P_I} \eta_{\min}) \geq 0$, то $z_I = z_{\min}$, $z_E = \max\{z_{P_I}, z_{P_E}\}$. Далее на этапе 3 (см. подразд. 4.3) выполняется алгоритм 2 для многозначных функций.

Если дуге $P_I P_E$ не принадлежит ни одна из точек P_{\min} или P_{\max} , т. е. $\sigma_i < 0$, $i = 1, \dots, 4$, то далее выполняется алгоритм 1 этапа 3 (см. подразд. 4.3) для случая задания дуги эллипса с помощью однозначной функции.

Случай 2: $\sphericalcap P_I P_E > 180^\circ$, т. е. $\sigma = \delta \left[\overrightarrow{OP_E}, \overrightarrow{OP_I} \right] < 0$. В этом случае дуге $P_I P_E$ принадлежит хотя бы одна из точек P_{\min} , P_{\max} . Тогда на этапе 3 (см. подразд. 4.3) осуществляется алгоритм 2. Если обе точки P_{\min} , P_{\max} принадлежат дуге $P_I P_E$, то $z_I = z_{\min}$, $z_E = z_{\max}$. Если $P_{\max} \in \sphericalcap P_I P_E$, то, как и в случае 1, $z_E = z_{\max}$, $z_I = \min\{z_{P_I}, z_{P_E}\}$; если $P_{\min} \in \sphericalcap P_I P_E$, то $z_I = z_{\min}$, $z_E = \max\{z_{P_I}, z_{P_E}\}$. При обходе элемента против часовой стрелки проверка условия $P_{\max} \in \sphericalcap P_I P_E$ осуществляется проверкой неравенства $\sigma_2 > 0$, а условия $P_{\min} \in \sphericalcap P_I P_E$ — проверкой неравенства $\sigma_3 > 0$ (см. рис. 4). При обходе образующей против часовой стрелки проверка условия $P_{\max} \in \sphericalcap P_I P_E$ осуществляется проверкой неравенства $\sigma_1 > 0$, а условия $P_{\min} \in \sphericalcap P_I P_E$ — проверкой неравенства $\sigma_4 > 0$ (см. рис. 5).

3.3. Элемент — дуга окружности.

Определение диапазона изменения координаты z для окружности. Для окружности алгоритм нахождения диапазона изменения третьей координаты более простой, так как нет необходимости переходить в локальную систему координат (ξ, η) , как у эллипса, но его суть остается прежней. Окружность задается уравнением

$$(x - x_C)^2 + (z - z_C)^2 = R^2 = |P_E C|^2,$$

где x_C , z_C — координаты центра окружности $C = (x_C, 0, z_C)$ (рис. 6). Минимальные и максимальные значения z вычисляем по формулам $z_{\min} = z_C - R$, $z_{\max} = z_C + R$.

Определение диапазона изменения координаты z для дуги окружности. Определим теперь диапазон изменения координаты z для элемента дуги окружности $P_I P_E$. Этот диапазон, как и для случая эллипса, определяется в зависимости от направления обхода окружности и взаимного расположения точек P_I , P_E , P_{\min} , P_{\max} , где $P_{\min} = (x_C, z_{\min})$, $P_{\max} = (x_C, z_{\max})$ (см. рис. 6).

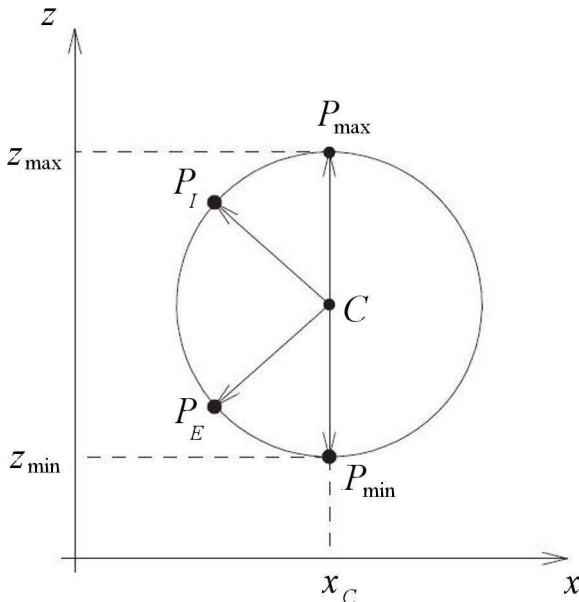


Рис. 6. Диапазон изменения компоненты z для окружности

Если выполняются условия (10), то имеет место случай задания дуги окружности с помощью однозначной функции. Тогда z_I , z_E определяются по формулам (11) и далее коррекция точек к области вращения на этапе 3 выполняется по алгоритму 1 (см. подразд. 4.2) для случая задания элементов с помощью однозначных функций.

Если (10) не выполняются, то алгоритм аналогичен алгоритму для эллипса. Вычисляем значения

$$\begin{aligned} \sigma &= \delta \left[\overrightarrow{OP_E}, \overrightarrow{OP_I} \right] = \delta(x_{P_E} z_{P_I} - x_{P_I} z_{P_E}); \\ \sigma_1 &= \delta \left[\overrightarrow{OP_E}, \overrightarrow{OP_{\max}} \right] = \delta(x_{P_E} z_{\max} - x_{\max} z_{P_E}); \\ \sigma_2 &= \delta \left[\overrightarrow{OP_{\max}}, \overrightarrow{OP_I} \right] = \delta(x_{\max} z_{P_I} - x_{P_I} z_{\max}); \\ \sigma_3 &= \delta \left[\overrightarrow{OP_E}, \overrightarrow{OP_{\min}} \right] = \delta(x_{P_E} z_{\min} - x_{\min} z_{P_E}); \\ \sigma_4 &= \delta \left[\overrightarrow{OP_{\min}}, \overrightarrow{OP_I} \right] = \delta(x_{\min} z_{P_I} - x_{P_I} z_{\min}), \end{aligned}$$

где $\delta = 1 > 0$ в случае обхода окружности по часовой стрелке, $\delta = -1 < 0$ в случае обхода против часовой стрелки. Анализируем расположение то-

чек на дуге окружности так же, как и для эллипса, на основе значений $\sigma, \sigma_i, i = 1, \dots, 4$; определяем z_I, z_E для окружности и номер алгоритма, применяемого на этапе 3.

4. Этап 3. Нахождение точки на образующей и угла поворота

4.1. Элемент образующей — отрезок прямой.

Алгоритм 1. Для нахождения точки P нужно найти ее координату x . Если элемент образующей $P_I P_E$, удовлетворяющий условию (1), — отрезок прямой линии, такой что $z_I \neq z_E$, то x находим по правилу $a = (x_I - x_E)/(z_I - z_E)$; $b = x_I - az_I$; $x = az + b$.

Алгоритм 2. Если $z_I = z_E$, то элемент образующей является многозначной функцией $x = x(z)$ и задается уравнением $z = z_I$. В этом случае поверхность вращения для данного элемента — это плоскость $z = z_I$. Узел будет либо принадлежать плоскости $z = z_I$, и тогда корректировать его не нужно ($P'' = P'$), либо будет лежать на поверхностях вращения, соответствующих другим элементам, и его тоже для данного элемента корректировать не нужно — он будет скорректирован в случаях других элементов образующей.

4.2. Элемент образующей — дуга окружности.

Алгоритм 1. Однозначный случай. Если элемент образующей $P_I P_E$ — дуга окружности, то x находим следующим образом: $x = x_C \pm \sqrt{R^2 - (z - z_C)^2}$. Знак "+" или "-" в формуле выбирается из условия совпадения направлений обхода дуг $P_I P_E$ и $P_I P$. Иными словами, точка P должна принадлежать дуге $P_I P_E$. Это реализуется следующей проверкой. Сначала в формуле выбираем знак "+". Вычисляем векторное произведение векторов $\vec{CP_I} = (x_{P_I} - x_C, z_{P_I} - z_C)$ и $\vec{CP} = (x - x_C, z - z_C)$: $v = (x_{P_I} - x_C)(z - z_C) - (z_{P_I} - z_C)(x - x_C)$. Если $\delta v \leq 0$ (δ — параметр, задающий направление обхода), то с учетом того, что в однозначном случае градусная мера дуги меньше или равна 180° , направления обхода дуг $P_I P$ и $P_I P_E$ совпадают. Если $\delta v > 0$, то направления обхода дуг разные и в формуле выбираем знак "-".

Алгоритм 2. Многозначный случай. Алгоритм 2 для элементов образующих, заданных в форме дуги окружности и эллипса в случае многозначной функции (см., например, дугу окружности $P_I P_E$ на рис. 2), по сути одинаков. При нахождении точки на образующей кривой находятся точки пересечения окружности и эллипса с прямой $z = z''$. Точек пересечения в рассматриваемом случае всегда будет две: P и \bar{P} (см. рис. 2 справа и рис. 7). Для элементов, заданных в виде однозначных функций, среди точек выбирается та, которая принадлежит дуге (алгоритм 1).

В случае многозначных функций среди точек P и \bar{P} будем выбирать ту, которая порождает проекцию P' и \bar{P}' , дающую наикратчайшее расстояние до проектируемого узла P'' . В этом случае будет обеспечиваться невырожденность сетки.

Вычисляем расстояния от узла P'' до проекций P' и \bar{P}' , порождаемых точками P и \bar{P} : $|P'' P'|$ и $|P'' \bar{P}'|$. Сравниваем квадраты расстояний $|P'' P'|^2$ и $|P'' \bar{P}'|^2$. Имеем $|P'' P'|^2 = |PP'''|^2$, $|P'' \bar{P}'|^2 = |\bar{P}P'''|^2$, где P''' — точка, лежащая в плоскости (x, z) , поворотом которой на угол ψ была получена точка P'' .

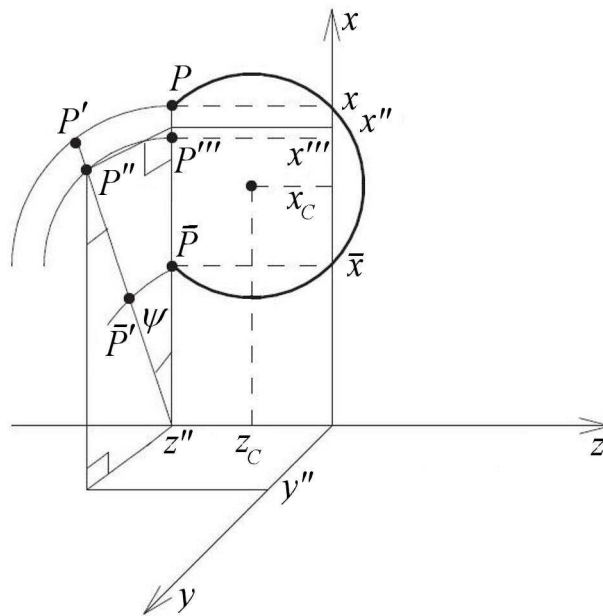


Рис. 7. Выбор проекции: определение точки P и угла поворота ψ

Отличие алгоритма 2 для дуги окружности и эллипса состоит в способе вычисления указанных выше расстояний. Для дуги окружности вычисление расстояний осуществляется в системе координат (x, z) , для дуги эллипса — в системе координат (ξ, η) . Для дуги окружности имеем

$$P''' = (x''', z''') = \left(\sqrt{x''^2 + y''^2}, z \right). \quad (12)$$

Тогда $|P''P'|^2 = |PP'''|^2 = \left(x - \sqrt{x''^2 + y''^2} \right)^2$, $|P''\bar{P}'|^2 = |\bar{P}P'''|^2 = \left(\bar{x} - \sqrt{x''^2 + y''^2} \right)^2$, где $x = x_C + \sqrt{R^2 - (z - z_C)^2}$, $\bar{x} = x_C - \sqrt{R^2 - (z - z_C)^2}$. Выбираем наименьшее расстояние и соответствующую точку.

4.3. Элемент образующей — дуга эллипса.

Алгоритм 1. Однозначный случай. Считаем, что рассматриваемая дуга эллипса является однозначной функцией $x = x(z)$ и для нее выполняется неравенство (1). Напомним, что для точки $P'' = (x'', y'', z'')$ по z'' ищется точка $P = (x, 0, z)$, $z = z''$, принадлежащая рассматриваемой дуге эллипса P_IP_E и порождающая проекцию $P' = (x', 0, z')$. Имеем

$$z'' = z_O + \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha. \quad (13)$$

Рассмотрим сначала случай 1, когда $\cos \alpha = 0$. Если $\sin \alpha = 1$, то $z'' = z_O + \xi$. Отсюда $\xi = z'' - z_O$. Аналогично, если $\sin \alpha = -1$, то $z'' = z_O - \xi$. Отсюда

$$\xi = z_O - z''. \quad (14)$$

Значение η находим по формуле

$$\eta = \pm \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{b^2}} a. \quad (15)$$

Знак "+" или "-" выбирается из условия совпадения направлений обхода дуги эллипса P_IP_E , входящей в состав образующей, и дуги P_IP . Иными словами, точка P должна принадлежать дуге P_IP_E образующей. Затем по формуле (3) находим значение x .

Теперь рассмотрим случай 2, когда $\cos \alpha \neq 0$. Из (13) имеем

$$\eta = \frac{z'' - z_O - \xi \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Подставим это значение в уравнение эллипса (2). Получим

$$\left(\frac{z'' - z_O - \xi \sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 \frac{1}{a^2} + \frac{\xi^2}{b^2} = 1.$$

Обозначив $w = z'' - z_O$, перепишем последнее равенство в виде

$$\left(\frac{w}{\cos \alpha} - \xi \operatorname{tg} \alpha \right)^2 \frac{1}{a^2} + \frac{\xi^2}{b^2} = 1.$$

Раскроем квадрат суммы и сгруппируем слагаемые по степеням ξ . Получим квадратный трехчлен

$$\xi^2 \left(\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{a^2}{b^2} \right) - 2 \frac{w}{\cos \alpha} \operatorname{tg} \alpha \xi + \frac{w^2}{\cos^2 \alpha} - a^2 = 0.$$

Обозначим $A_1 = \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{a^2}{b^2}$, $B_1 = -2 \frac{w}{\cos \alpha} \operatorname{tg} \alpha$, $C_1 = \frac{w^2}{\cos^2 \alpha} - a^2 = 0$. Если $D_1 = B_1^2 - 4A_1C_1 < 0$, то квадратное уравнение вещественных корней не имеет. В данном случае такой ситуации возникнуть

не может. Тем не менее, если в программе такая ситуация возникает, то выдается сообщение об ошибке. Пусть $D_1 = B_1^2 - 4A_1C_1 \geq 0$. Имеем

$$\xi = \frac{-B_1 \pm \sqrt{D_1}}{2A_1}; \quad \eta = \frac{w - \xi \sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad (16)$$

Знак "+" или "-" в формуле для вычисления ξ выбирается тоже так, чтобы совпадали направления обхода дуги эллипса $P_I P_E$, входящей в состав образующей, и дуги $P_I P$. То есть, как и в случае с окружностью, точка P должна принадлежать дуге $P_I P_E$ образующей. Это реализуется следующей проверкой.

Сначала в формулах любого из случаев 1 и 2 выбираем знак "+". Вычисляем векторное произведение векторов $\vec{OP} = (\xi, \eta)$ и $\vec{OP_I} = (\xi_I, \eta_I)$ в системе координат (ξ, η) : $v = \eta_I \xi - \xi_I \eta$. Если $\delta v < 0$ (δ — параметр, задающий направление обхода), то точка P не принадлежит дуге. Тогда в соответствующих формулах случаев 1 и 2 выбираем знак "-" и в качестве точки P выбираем точку, соответствующую этому знаку. Так как рассматривается однозначный случай и выполняется условие (1), то проверять расположение точки P на дуге по отношению к P_E не нужно, т. е. нет необходимости при выполнении условия $v\delta > 0$ вычислять еще одно векторное произведение векторов $\vec{OP} = (\xi, \eta)$ и $\vec{OP_E} = (\xi_E, \eta_E)$, равное $\eta\xi_E - \xi\eta_E$ в системе координат (ξ, η) , и при $\delta(\eta\xi_E - \xi\eta_E) > 0$ менять знак на противоположный. Условие (1) в случае однозначного алгоритма вместе с условием $\delta v > 0$, как и в случае с окружностью $\delta v < 0$, обеспечивает принадлежность точки дуге. Затем по формуле (3) находим значение x .

Алгоритм 2. Многозначный случай. Рассмотрим теперь многозначный случай. Как и в случае с окружностью, для эллипса будем вычислять квадраты расстояний $|P'' P'|^2 = |PP''|^2$ и $|P'' \bar{P}'|^2 = |\bar{P}P''|^2$ (см. рис. 7), но, в отличие от случая с окружностью, не в системе координат (x, z) , а в локальной системе координат (ξ, η) , связанной с эллипсом. Для этого необходимо найти координаты точки P''' в системе координат (ξ, η) .

Из (3), (4) осуществляем обратный переход из системы координат (x, z) в систему координат (ξ, η) по формулам

$$\xi = (x - x_O) \cos \alpha + (z - z_O) \sin \alpha; \quad (17)$$

$$\eta = (z - z_O) \cos \alpha - (x - x_O) \sin \alpha. \quad (18)$$

Подставляя координаты (12) точки P''' в системе координат (x, z) в (17), (18), находим координаты точки $P''' = (\xi_{P'''}, \eta_{P'''})$ в системе координат (ξ, η) :

$$\xi_{P'''} = \left(\sqrt{x''^2 + y''^2} - x_O \right) \cos \alpha + (z - z_O) \sin \alpha;$$

$$\eta_{P'''} = (z - z_O) \cos \alpha - \left(\sqrt{x''^2 + y''^2} - x_O \right) \sin \alpha.$$

Найдем координаты точек $P = (\xi_P, \eta_P)$ и $\bar{P} = (\xi_{\bar{P}}, \eta_{\bar{P}})$ в системе координат (ξ, η) . Точки P, \bar{P}, P'' имеют одинаковую третью координату z'' . P, \bar{P} — точки пересечения эллипса с прямой $z = z''$. Они определяются координатами (14), (15) либо (16).

Для точек P, \bar{P} по формуле (3) находим значение x .

Окончательно имеем: $|P'' P'|^2 = |PP''|^2 = (\xi_P - \xi_{P''})^2 + (\eta_P - \eta_{P''})^2$, $|P'' \bar{P}'|^2 = |\bar{P}P''|^2 = (\xi_{\bar{P}} - \xi_{P''})^2 + (\eta_{\bar{P}} - \eta_{P''})^2$. Среди точек P и \bar{P} выбираем ту, которая дает наименьшее расстояние.

Определение угла поворота. Определение величин $\cos \psi$ и $\sin \psi$ осуществляется по формулам $\cos \psi = x'' / \sqrt{x''^2 + y''^2}$, $\sin \psi = y'' / \sqrt{x''^2 + y''^2}$, где ψ — угол поворота образующей вокруг оси z (см. рис. 7). В случае $\sqrt{x''^2 + y''^2} = 0$ коррекция не производится, так как точка P'' лежит на оси вращения.

5. Этап 4. Определение оптимальной проекции

Так как элементов, содержащих точку, порождающую проекцию, может быть несколько, необходим четвертый этап выбора оптимальной проекции для данного узла. Оптимальная проекция выбирается с помощью оценки расстояния от данного узла до проекции. В качестве узла выбирается та проекция, которая дает минимальное расстояние $|P''P'|$. Данный этап необходим, как правило, в том случае, если при задании одной грани образующая в целом (не при задании одного элемента, а при задании разных элементов) будет являться многозначной функцией. Такая ситуация будет возникать всегда, если минимальный элемент образующей задавать равным 1, а максимальный — равным числу элементов в образующей, что выполнялось в первоначальном варианте алгоритма. В настоящем варианте алгоритма для каждой из граней $k = 0$, $k = L - 1$ минимальный и максимальный элементы — свои собственные, и они определяются из информации, указываемой при описании образующей.

При выполнении данного этапа для каждой грани $k = 0$, $k = L - 1$ формируется матрица расстояний между корректируемым узлом и его проекцией, выявляющая в каждом узле степень коррекции

$$C_{ijk} = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2}.$$

Заключение

Предложен алгоритм специальной коррекции узлов структурированной сетки к области вращения. Алгоритм реализован в программах глобальной перестройки сетки [2], а также в программах коррекции структурированной сетки к заданной области вращения, написанных на языках Fortran и C++. Процедура коррекции отдельного узла может использоваться в алгоритмах построения как структурированных, так и неструктурированных сеток. Так как созданные алгоритмы и программы обеспечили принадлежность граничных узлов сетки поверхностям вращения, они позволили существенно повысить эффективность математического моделирования задач многокомпонентной гидродинамики [1]. Результаты расчета сеток с применением алгоритма коррекции будут представлены в отдельной статье.

Автор благодарит А. А. Чарахчяна за ценные замечания к работе и Н. А. Артёмову за помощь в техническом оформлении статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-04146), УрО РАН (проекты 15-16-1-10, 15-7-1-13); исследования подразд. 4.3 выполнены при поддержке Российского научного фонда (проект 14-35-00005).

Список литературы

1. *Anuchina N. N., Volkov V. I., Gordeychuk V. A. et al.* Numerical simulation of 3D multi-component vortex flows by MAH-3 code // *Advances in Grid Generation* / Ed. by O. V. Ushakova. New York: Novascience Publishers, 2007. P. 337—380.
2. *Ушакова О. В.* Алгоритмы оптимизации трехмерных сеток для областей вращения // *Труды института математики и механики*. 2008. Т. 14, № 1. С. 150—180.
3. *Bronina T. N., Ushakova O. V.* Application of optimal grid generation algorithms to the volumes of revolution // *Advances in Grid Generation* / Ed. by O. V. Ushakova. New York: Novascience Publishers, 2007. P. 283—320.
4. *Ушакова О. В.* О невырожденности трехмерных сеток // *Труды института математики и механики*. 2004. Т. 11, № 1. С. 78—100.
5. *Бронина Т. Н., Гасилова И. А., Ушакова О. В.* Алгоритмы построения трехмерных структурированных сеток // *Журнал вычисл. мат. и мат. физ.* 2003. Т. 43, № 6. С. 875—883.

6. Шведов А. С. Формулы для объема ячеек // Математические заметки. 1986. Т. 39. Вып. 4. С. 597–605.
7. Бронина Т. Н. Алгоритмы построения начальных трехмерных структурированных сеток для областей вращения // Труды института математики и механики. 2008. Т. 14, № 1. С. 3–10.
8. Ушакова О. В. Классификация шестигранных ячеек // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2008. Т. 48, № 8. С. 1–24.
9. Khairullina O. B., Sidorov A. F., Ushakova O. V. Variational methods of construction of optimal grids // Handbook of Grid Generation / Ed by J. F. Thompson, B. K. Soni, N. P. Weatherill. Boca Raton, FL: CRC Press, 1999. P. 36-1–36-25.
10. Ушакова О. В. Условия невырожденности трехмерных ячеек. Формула для объема ячеек // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2001. Т. 41, № 6. С. 881–894.
11. Ushakova O. V. Conditions of nondegeneracy of three-dimensional cells. A formula of a volume of cells // SIAM J. Sci. Comp. 2001. No 23. P. 1273–1289.
12. Ushakova O. V. Nondegeneracy tests for hexahedral cells // Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. 2011. No 200. P. 1649–1658.
13. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1964.

Статья поступила в редакцию 18.02.15.

AN ALGORITHM OF CORRECTING A GRID WITH RESPECT TO THE SURFACE OF REVOLUTION / O. V. Ushakova // (IMM of RAS UrB, UrFU named after the first RF President B. N. Yeltsin, Ekaterinburg).

The paper presents an algorithm of correcting positions of boundary nodes of a structured grid with respect to the surface of revolution generated by the revolution through 180° around its axis of a plane generator consisting of straight line segments, arcs of circles and ellipses.

Keywords: grids, boundary nodes, domains (regions) of revolution, projection.
