

УДК 517.958:536.2

## К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ МОНОТОННОЙ РАЗНОСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ СИСТЕМЫ $P_1$ -УРАВНЕНИЙ

А. А. Шестаков  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ",  
г. Снежинск Челябинской области)

Для нестационарной задачи переноса излучения  $P_1$ -приближение приводит к гиперболической системе уравнений, решая которую приходится сталкиваться со значительными трудностями при построении монотонной разностной схемы второго порядка аппроксимации. Сложность построения монотонных схем для  $P_1$ -приближения объясняется тем, что метод сферических гармоник обладает волновым эффектом и может давать отрицательные решения в криволинейных и многомерных геометриях для любого  $P_n$ -разложения. В данной работе исследованы возможные варианты построения монотонных разностных аппроксимаций для системы  $P_1$ -уравнений на примере двух схем.

*Ключевые слова:* перенос излучения, TVD-реконструкция,  $P_1$ -приближение.

### Введение

Самой популярной в зарубежной литературе разностной схемой для решения гиперболических уравнений является схема, разработанная в 1953 г. С. К. Годуновым и опубликованная в 1959 г. [1]. Схема Годунова получена методом конечных объемов, в котором все искомые величины определены в одних и тех же точках разностной сетки. Основным достоинством метода конечных объемов является то, что он позволяет в многомерных геометриях строить схемы на сложных сетках без потери точности.

Используемые в России разностные схемы для задач радиационной газовой динамики в основном строятся интегроинтерполяционным методом на разнесенном шаблоне, когда часть величин определена в центрах ячеек, а часть (обычно скорости и тепловые потоки) — в узлах или на гранях ячеек [2]. Построение схем на разнесенном шаблоне в многомерных геометриях может приводить к ухудшению аппроксимации на существенно неортогональных сетках.

Явным достоинством схемы Годунова является то, что она позволяет конструировать схемы с повышенным (выше первого) порядком аппроксимации и улучшенными монотонными свойствами. Первой работой в этом направлении, несомненно, является схема В. П. Колгана, предложенная в 1972 г. [3] и использующая принцип минимальных значений производных. После нее появились многочисленные публикации по построению монотонных разностных схем второго порядка для гиперболических систем (см., например, [4]), но они относились в основном к одномерному случаю. Повышение порядка аппроксимации и улучшение монотонных свойств без потери строгого теоретического обоснования в таких схемах достигается путем замены условия сохранения монотонности на условие уменьшения полной вариации (Total Variation Diminishing, т. е. TVD-схемы [5]), невозрастания полной вариации (Total Variation Non-Increasing, TVNI-схемы), ограничения полной вариации (Total Variation Bounded, TVB-схемы [6]). К этому классу относятся также существенно неосциллирующие схемы (Essentially Non-Oscillatory, ENO-схемы), взвешенные существенно неосциллирующие схемы (Weighted Essentially Non-Oscillatory, WENO-схемы), однородные неосциллирующие

схемы (Uniformly Non-Oscillatory, UNO-схемы), нелинейные монотонные схемы (Monotone Upstream Schemes for Conservation Laws, MUSCL-схемы [7]).

Следует отметить, что, хотя все вышеперечисленные схемы повышают порядок аппроксимации, они являются весьма сложными при реализации, особенно в многомерных геометриях, и требуют специальных видоизменений у границ. При этом на разрывных решениях все методы повышенного порядка аппроксимации сходятся к точному решению с порядком не выше первого. В работе [8] показано, что порядок сходимости как линейных схем, так и TVD-схем на разрывных решениях для уравнения переноса определяется как  $p/(p+1)$ , где  $p$  — порядок аппроксимации на гладком решении.

В РФЯЦ-ВНИИТФ в 1976 г. для решения одномерных гиперболических и параболических уравнений была предложена разностная схема РОМБ [9]. Схема РОМБ, не столь известная в России, как схема Годунова, и почти неизвестная за рубежом, тоже построена методом конечных объемов. Основные ее достоинства — это второй порядок аппроксимации на гладких решениях, монотонность и первый порядок аппроксимации на разрывных решениях, достаточно простая обобщаемость на многомерные геометрии. В 1977 г. схема РОМБ была обобщена для решения двумерного уравнения газодинамики, соответствующая публикация состоялась в 1996 г. [10]. В 1978 г. выполнено ее обобщение для решения двумерного параболического уравнения, что подтверждено публикацией 1982 г. [11]. В 2006 г. схема РОМБ была обобщена для решения трехмерного уравнения газодинамики, а в 2007 г. — для решения трехмерного уравнения теплопроводности [12].

В 1989 г. схема РОМБ была применена к решению двумерных уравнений многогруппового переноса излучения (УПИ) в  $P_1$ -приближении [13]. Для нестационарной задачи УПИ  $P_1$ -приближение приводит к гиперболической системе уравнений относительно первых моментов в разложении интенсивности излучения по сферическим функциям. Если пренебречь временной производной по потоку, то гиперболическая система переходит в параболическую систему и решается с использованием методики [11]. При решении гиперболических уравнений в сравнении с решением параболических уравнений приходится сталкиваться с более значительными трудностями, так как С. К. Годуновым показана невозможность сочетания монотонности и второго порядка аппроксимации в рамках линейной разностной схемы для гиперболической системы уравнений. Но именно такое сочетание монотонности и второго порядка предпочтительнее для практического применения.

Хотя обе схемы, рассматриваемые в работе, построены методом конечных объемов, между ними есть существенные отличия. Схема Годунова — явная, первого порядка аппроксимации и используется в основном для задач газовой динамики. Схема РОМБ — неявная, второго порядка аппроксимации и используется для более широкого класса задач газовой динамики, теплопроводности, переноса излучения в различных приближениях. В обеих схемах приходится использовать дополнительные соотношения, связывающие искомые величины в узлах и центрах ячеек. Сходство этих соотношений связи приводит к тому, что схему РОМБ иногда трактуют как неявную схему Годунова с решением задачи распада разрыва в центрах ячеек. В данной работе показано, что это не так.

Для параболического уравнения схема РОМБ дает монотонное решение при сохранении второго порядка аппроксимации по пространству. Для одного гиперболического уравнения схема РОМБ переходит в  $DS_n$ -метод, который позволяет получать монотонное решение с переходом на схему первого порядка в областях возникновения немонотонности. В общем случае для систем гиперболических уравнений не удастся построить монотонную схему даже первого порядка аппроксимации. Для таких систем схема РОМБ позволяет получить монотонное решение только в одномерной плоской геометрии для инвариантов. Эта возможность объясняется тем, что в одномерной плоской геометрии существует эквивалентность  $S_{2n}$ - и  $P_{2n-1}$ -приближений (при выборе узлов квадратурных формул  $S_{2n}$ -метода как нулей полиномов Лежандра), а  $S_{2n}$ -приближение позволяет строить монотонные схемы для любой геометрии.

Сложность построения монотонных схем для  $P_n$ -приближений в криволинейных и многомерных геометриях объясняется тем, что метод сферических гармоник обладает волновым эффектом и может давать отрицательные решения в криволинейных и многомерных геометриях для любого  $P_n$ -разложения [14]. Основными свойствами дифференциальной системы  $P_n$ -уравнений является линейность, гиперболичность и ротационная инвариантность. Именно сочетание этих трех харак-

теристик может приводить к отрицательным решениям. Последовательно убирая одно из этих свойств, можно получать положительное решение.

Линейность убирается с помощью нелинейного замыкания. Систему  $P_n$ -уравнений можно заменять, например, квазидиффузионными уравнениями В. Я. Гольдина [15] или уравнениями квазипереноса М. Ю. Козманова [16]. В последнем случае положительные решения получаются по диффузионным уравнениям с нелинейным множителем при коэффициенте поглощения.

Если отказаться от гиперболичности, например, переходя во втором уравнении для потока к закону Фика, то получим диффузионное приближение. Жертвуя гиперболичностью, благодаря диффузионному приближению удастся получить положительное решение. Другим возможным способом получения положительного решения является диффузионно-подобная аппроксимация, например  $SP_n$ -метод Гилберта [17]. Это также приводит к потере гиперболичности, но при таком подходе серьезное воздействие оказывается на высшие моменты  $P_n$ -уравнений — низшие моменты (наиболее важные) не страдают.

Отказ от ротационной инвариантности при переходе к методу дискретных ординат с квадратными формулами в пространстве направлений позволяет получать положительное решение, но порождает лучевые эффекты.

Несмотря на эти свойства дифференциальной системы  $P_1$ -уравнений, численные методы могут давать положительное решение, исправляя волновой эффект  $P_n$ -приближения. Примером монотонной схемы повышенного порядка аппроксимации в сферически-симметричной геометрии служит схема, построенная в работе [18]. В ней используется один из наиболее перспективных подходов к решению гиперболической системы — TVD-подход, который позволяет в классе нелинейных схем сочетать монотонность для инвариантов, положительность для плотности излучения и второй порядок аппроксимации, кроме отдельных точек с экстремумами.

Смысл любой TVD-реконструкции заключается в создании нелинейного механизма, обеспечивающего непрерывный переход от немонотонной схемы второго порядка аппроксимации к монотонной схеме первого порядка. Поэтому, пока не построена монотонная схема первого порядка, нет никакого смысла применять TVD-реконструкцию, и уж тем более реконструкции более высоких порядков.

В  $P_1$ -приближении монотонной схемой является только схема первого порядка, которая эквивалентна схеме бегущего счета в инвариантах для плоской геометрии, поэтому за базовую схему при применении TVD-реконструкции можно взять эту схему. Для получения положительного решения в криволинейных одномерных и многомерных геометриях необходимо выполнять итерационную коррекцию  $P_1$ -уравнений: перенести отрицательные члены в левую или правую часть уравнения и использовать их с предыдущей итерации. Далее путем реконструкции инвариантов с применением соответствующего ограничителя можно построить монотонную схему второго порядка. В работе [18] такая схема построена для сферически-симметричной геометрии. Доказательство принадлежности этой схемы к TVD-схемам затруднено из-за применения линеаризации, поэтому такие схемы можно называть TVDR (Total Variation Diminishing Reconstruction). Построенная указанным способом схема типа TVDR обладает следующими свойствами:

- неявность, безусловная устойчивость;
- положительность плотности излучения;
- первый порядок аппроксимации по времени и второй порядок аппроксимации по пространству из-за применения TVD-реконструкции, кроме отдельных точек с экстремумами;
- консервативность в смысле выполнения разностного аналога интегрального закона сохранения в каждой ячейке;
- однородность, заключающаяся в проведении расчета по единообразным формулам без явного выделения особенностей решения.

### Постановка задачи

Рассмотрим одномерную систему переноса лучистой энергии в многогрупповом  $P_1$ -приближении:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial U_g}{\partial t} + \frac{\partial (r^\sigma S_g)}{r^\sigma \partial r} + \alpha_{cg} U_g &= \alpha_{cg} B_g; \\ \frac{1}{c} \frac{\partial S_g}{\partial t} + \frac{1}{3} \frac{\partial U_g}{\partial r} + \alpha_g S_g &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $c$  — скорость света;  $t$  — время;  $r$  — координата;  $g$  — индекс энергетической группы,  $g = 1, \dots, G$ ;  $J_g$  — интенсивность излучения группы  $g$ ;  $U_g = \int_{-1}^1 J_g d\mu$  — плотность излучения, умноженная на ско-

рость света;  $S_g = \int_{-1}^1 \mu J_g d\mu$  — поток излучения;  $\varepsilon_g$  — энергия;  $B_g = \frac{8\pi}{c^2 \tilde{h}^3} \int_{\Delta\varepsilon_g} \frac{\varepsilon^3}{\exp(\varepsilon T^{-1}) - 1} d\varepsilon$  —

функция Планка с размерным множителем для группы  $g$ ;  $\tilde{h}$  — постоянная Планка;  $\alpha_{cg}$  — коэффициент поглощения фотонов;  $\alpha_{sg}$  — коэффициент рассеяния фотонов;  $\alpha_g$  — коэффициент ослабления,  $\alpha_g = \alpha_{cg} + \alpha_{sg}$ ;  $\sigma = 0, 1, 2$  соответствуют случаям плоской, цилиндрически-симметричной и сферически-симметричной геометрий.

Граничные условия имеют вид

$$\alpha_{0,g} U_g + \beta_{0,g} S_g = \varphi_{0,g}; \quad \alpha_{1,g} U_g + \beta_{1,g} S_g = \varphi_{1,g},$$

где  $\alpha_{0,g}, \beta_{0,g}, \varphi_{0,g}, \alpha_{1,g}, \beta_{1,g}, \varphi_{1,g}$  — параметры для задания граничных условий.

### Уравнения для инвариантов

Исследование поведения решения системы (1) начнем с простейшего одногруппового случая при нулевых коэффициентах поглощения и рассеяния в одномерной плоской геометрии.

Для плоской геометрии в вакууме систему  $P_1$ -уравнений вида

$$\frac{1}{c} \frac{dU}{dt} + \frac{\partial S}{\partial r} = 0; \quad \frac{1}{c} \frac{dS}{dt} + \frac{1}{3} \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

можно свести к системе двух уравнений колебаний

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{c^2}{3} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - \frac{c^2}{3} \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} = 0, \quad (3)$$

которые имеют общее решение

$$U = f_1 \left( r + \frac{ct}{\sqrt{3}} \right) + f_2 \left( r - \frac{ct}{\sqrt{3}} \right); \quad S = f_3 \left( r + \frac{ct}{\sqrt{3}} \right) + f_4 \left( r - \frac{ct}{\sqrt{3}} \right),$$

где  $f_1, f_2, f_3, f_4$  — произвольные функции.

Эти решения представляют две бегущие волны с постоянным профилем, распространяющиеся вправо (в положительном направлении оси  $R$ ) и влево со скоростью  $c/\sqrt{3}$ . Система (3) описывает колебательные процессы, поэтому в решениях  $P_1$ -уравнений всегда возникают осцилляции, которые объясняются близостью  $P_1$ -системы к уравнениям колебаний в оптически прозрачных средах.

Решение задачи Коши для уравнений колебаний дается формулой Д'Аламбера. Но решить аналитически краевую задачу для уравнений колебаний довольно сложно. Существуют только отдельные частные решения при специально выбранных краевых условиях.

Для решения уравнений (2) в плоской геометрии переходят к координатам, связанным с характеристиками  $\mu = ct - \sqrt{3}x$ ,  $\nu = ct + \sqrt{3}x$ , и получают обыкновенные дифференциальные уравнения для производных вдоль характеристик. Наиболее простой вид они имеют в вакууме:

$$\frac{d\psi_1}{d\mu} = 0; \quad \frac{d\psi_2}{d\nu} = 0, \quad (4)$$

где  $\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}U - S$ ;  $\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}U + S$ . Выражение  $\frac{d\psi_1}{d\mu} = \frac{1}{c} \frac{\partial\psi_1}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial\psi_1}{\partial x}$  есть оператор дифференцирования по переменной  $\mu$  вдоль характеристики  $\sqrt{3}x + ct = \text{const}$ , выражение  $\frac{d\psi_2}{d\nu} = \frac{1}{c} \frac{\partial\psi_2}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial\psi_2}{\partial x}$  — оператор дифференцирования по переменной  $\nu$  вдоль характеристики  $\sqrt{3}x - ct = \text{const}$ .

Из решения характеристической системы (4) видно, что инвариант  $\psi_1$  постоянен вдоль характеристики  $\sqrt{3}x + ct = \text{const}$ , а инвариант  $\psi_2$  — вдоль характеристики  $\sqrt{3}x - ct = \text{const}$ . Рассмотрение поведения решений характеристической системы помогает при построении соотношений связи разностных схем.

Сначала проанализируем схемы С. К. Годунова и РОМБ, чтобы выбрать наилучшую схему по точности и монотонности для повышения порядка аппроксимации с помощью TVD-реконструкции.

### Схема Годунова

По схеме Годунова предполагается в каждом интервале ячейки разностной сетки постоянное значение основных величин  $U, S$ . Интегрируя характеристическую систему (4) в рамках одной ячейки, получаем разностную схему в инвариантах:

$$\begin{aligned} \frac{(\psi_1)_{i+1/2}^{n+1} - (\psi_1)_{i+1/2}^n}{c\tau} - \frac{(\psi_1)_{i+1}^* - (\psi_1)_i^*}{\sqrt{3}h} &= 0; \\ \frac{(\psi_2)_{i+1/2}^{n+1} - (\psi_2)_{i+1/2}^n}{c\tau} + \frac{(\psi_2)_{i+1}^* - (\psi_2)_i^*}{\sqrt{3}h} &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где  $\psi_{i+1/2}^{n+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi^{n+1} dx$ ;  $\psi_i^* = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \psi_i dt$ ;  $\tau = t^{n+1} - t^n$ ;  $h = x_{i+1} - x_i$ ;  $i = 0, \dots, I-1$  ( $I$  — число ячеек).

Систему (5) запишем в общем виде:

$$\psi_{i+1/2}^{n+1} + \frac{\lambda\tau}{h} \Delta_i \psi^* = \psi_{i+1/2}^n,$$

где  $\psi = \psi_{1,2}$ ;  $\Delta_i \psi^* = \psi_{i+1}^* - \psi_i^*$ ;  $\lambda = \mp \frac{c}{\sqrt{3}}$ ;  $K = \frac{|\lambda|\tau}{h}$  — число Куранта. При  $\psi^* = \psi^n$  получаем явную схему, при  $\psi^* = \psi^{n+1}$  — неявную.

Зная из точного решения поведение инвариантов вдоль характеристик  $\psi_1(\mu) = \text{const}$ ,  $\psi_2(\nu) = \text{const}$  и рассматривая римановы инварианты, приходящие в узел из соседних ячеек, для системы уравнений (5) можно построить монотонную схему Годунова первого порядка точности:

$$\psi_{2,i}^* = \psi_{2,i-1/2}^n; \quad \psi_{1,i}^* = \psi_{1,i+1/2}^n.$$

При  $\psi_{2,i}^* = \psi_{2,i-1/2}^{n+1}$  и  $\psi_{1,i}^* = \psi_{1,i+1/2}^{n+1}$  получаем неявную схему бегущего счета (в теории переноса схема бегущего счета называется противопотоковой схемой или St-схемой).

Свойства схемы Годунова хорошо изучены [19]. Первое дифференциальное приближение схемы Годунова для инвариантов в точке  $(n, i + 1/2)$  имеет вид  $\frac{\partial\psi}{\partial t} + \lambda \frac{\partial\psi}{\partial x} = D \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ , где  $D = \frac{\lambda h}{2} (1 - K)$  для явной схемы,  $D = \frac{\lambda h}{2} (1 + K)$  для неявной схемы. Линейные схемы первого порядка аппроксимации в первом дифференциальном приближении дают уравнение диффузии, которое обладает диссипативными свойствами и имеет монотонное решение.

В классе линейных схем есть много способов повышения порядка аппроксимации схемы Годунова. Схемы Уорминга—Бима, Лакса—Вендроффа, Фромма имеют второй порядок аппроксимации по времени и пространству. Схема, рассмотренная в работе [20], имеет третий порядок аппроксимации.

Линейные схемы второго порядка аппроксимации в первом дифференциальном приближении дают уравнение Кордевега де Вриза  $\frac{\partial \psi}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x} = A \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}$ , которое создает колебания до или после разрыва в зависимости от знака коэффициента  $A$  перед третьей производной. Возникновение осцилляций характерно для всех линейных схем второго порядка, поэтому для сохранения монотонности надо переходить к исследованию схем более высокого, например третьего, порядка аппроксимации либо к нелинейным схемам. Как показывают исследования линейных схем третьего порядка [21], их диссипации не хватает, чтобы погасить осцилляции, возникающие на разрывах, но количество и амплитуды этих осцилляций становятся меньше.

Перейдем от характеристической системы к системе в исходных переменных  $U, S$ . Для системы разностных  $P_1$ -уравнений в схеме Годунова по формулам обратного перехода получаем соотношения связи для  $U$  и  $S$  в узлах:

$$U_i = \frac{U_{i+1/2} + U_{i-1/2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} (S_{i+1/2} - S_{i-1/2}); \quad S_i = \frac{S_{i+1/2} + S_{i-1/2}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} (U_{i+1/2} - U_{i-1/2}). \quad (6)$$

Хотя благодаря повышению порядка аппроксимации за счет какой-либо нелинейной реконструкции схема Годунова получила широчайшее распространение в задачах газодинамики, в задачах переноса излучения она не применяется из-за жесткого ограничения на шаг по времени. Если же при решении системы  $P_1$ -уравнений использовать неявную схему типа Годунова, то рекуррентного счета, как при явной аппроксимации, уже не получается.

Неявная аппроксимация после подстановки соотношений связи (6) в систему

$$\begin{aligned} \frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^n}{c\tau} + \frac{S_{i+1}^{n+1} - S_i^{n+1}}{h} + \alpha_c U_{i+1/2}^{n+1} &= \alpha_c B_{i+1/2}^{n+1}; \\ \frac{S_{i+1/2}^{n+1} - S_{i+1/2}^n}{c\tau} + \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{3h} + \alpha S_{i+1/2}^{n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^n}{c\tau} + \frac{S_{i+3/2}^{n+1} - S_{i-1/2}^{n+1}}{2h} - \frac{U_{i-1/2}^{n+1} - 2U_{i+1/2}^{n+1} + U_{i+3/2}^{n+1}}{2\sqrt{3}h} + \alpha_c U_{i+1/2}^{n+1} &= \alpha_c B_{i+1/2}^{n+1}; \\ \frac{S_{i+1/2}^{n+1} - S_{i+1/2}^n}{c\tau} + \frac{U_{i+3/2}^{n+1} - U_{i-1/2}^{n+1}}{6h} - \frac{S_{i-1/2}^{n+1} - 2S_{i+1/2}^{n+1} + S_{i+3/2}^{n+1}}{2\sqrt{3}h} + \alpha S_{i+1/2}^{n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Систему (8) можно записать в более общем виде:

$$\begin{aligned} a_i^0 U_{i-1/2} + b_i^0 U_{i+1/2} + c_i^0 U_{i+3/2} + d_i^0 S_{i-1/2} + e_i^0 S_{i+1/2} + g_i^0 S_{i+3/2} &= f_i^0; \\ a_i^1 U_{i-1/2} + b_i^1 U_{i+1/2} + c_i^1 U_{i+3/2} + d_i^1 S_{i-1/2} + e_i^1 S_{i+1/2} + g_i^1 S_{i+3/2} &= f_i^1, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} a_i^0 &= -1/\sqrt{3}; \quad b_i^0 = 2hq_1 + 2/\sqrt{3}; \quad c_i^0 = -1/\sqrt{3}; \quad d_i^0 = -1; \quad e_i^0 = 0; \quad g_i^0 = 1; \\ a_i^1 &= -1; \quad b_i^1 = 0; \quad c_i^1 = 1; \quad d_i^1 = -\sqrt{3}; \quad e_i^1 = 6hq + 2\sqrt{3}; \quad g_i^1 = -\sqrt{3}; \\ f_i^0 &= 2h \left( \frac{1}{c\tau} U_{i+1/2}^n + \alpha_c B_{i+1/2}^{n+1} \right); \quad f_i^1 = \frac{6h}{c\tau} S_{i+1/2}^n; \quad q = \frac{1}{c\tau} + \alpha; \quad q_1 = \frac{1}{c\tau} + \alpha_c; \quad i = 0, \dots, I-1. \end{aligned}$$

Система (9) является трехточечной схемой, которая решается матричной прогонкой.

При использовании неявной аппроксимации для решения системы  $P_1$ -уравнений следует отметить некоторые недостатки схемы Годунова:

- 1) некомпактность, в одномерном случае на трехточечном шаблоне первый порядок аппроксимации;
- 2) нарушение монотонности в криволинейных и многомерных геометриях;

- 3) явная схема позволяет решать по рекуррентным формулам бегущего счета, но дает ограничение на шаг;
- 4) неявная схема не позволяет использовать рекуррентный счет (приводит к решению матричной прогонкой).

### Схема РОМБ

Хотя схема РОМБ в общем случае имеет второй порядок аппроксимации, сначала рассмотрим схему первого порядка, которая ближе всего по построению к схеме Годунова.

Приравнивая инварианты в узлах к инвариантам, приходящим из центра, для системы уравнений (5) можно записать

$$\psi_{1,i}^* = \psi_{1,i+1/2}^{n+1}; \quad \psi_{2,i+1}^* = \psi_{2,i+1/2}^{n+1}.$$

По формулам обратного перехода получаем соотношения связи для  $U$  и  $S$  в схеме РОМБ первого порядка в центрах ячеек:

$$U_{i+1/2} = \frac{U_i + U_{i+1}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} (S_{i+1} - S_i); \quad S_{i+1/2} = \frac{S_i + S_{i+1}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} (U_{i+1} - U_i). \quad (10)$$

Подставляя соотношения связи (10) в систему разностных  $P_1$ -уравнений (7), получаем следующие уравнения:

$$a_i^0 U_i + b_i^0 U_{i+1} + c_i^0 S_i + d_i^0 S_{i+1} = f_i^0; \quad a_i^1 U_i + b_i^1 U_{i+1} + c_i^1 S_i + d_i^1 S_{i+1} = f_i^1,$$

где  $a_i^0, b_i^0, c_i^0, d_i^0, a_i^1, b_i^1, c_i^1, d_i^1, f_i^0, f_i^1$  — некоторые коэффициенты.

Проведем сравнение дифференциальных приближений схемы РОМБ и неявной схемы Годунова в вакууме. Невязка  $\varphi_1$  в неявной схеме Годунова имеет вид

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \frac{c\tau}{\sqrt{3}} + h \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{2c^3} \left[ \left( \frac{c\tau}{\sqrt{3}} \right)^2 + h^2 \right] \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \frac{1}{4!\sqrt{3}} \left[ \left( \frac{c\tau}{\sqrt{3}} \right)^3 + h^3 \right] \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + O(\tau^4 + h^4).$$

В схеме РОМБ

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \frac{c\tau}{\sqrt{3}} + h \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{2c^3} \left[ \left( \frac{c\tau}{\sqrt{3}} \right)^2 + h^2 \right] \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \frac{1}{4!\sqrt{3}} \left[ \left( \frac{c\tau}{\sqrt{3}} \right)^3 + h^3 \right] \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - \\ & - \frac{h}{2\sqrt{3} \cdot 4!} \left( h^2 + \frac{4c^2\tau^2}{3} - \sqrt{3}c\tau h \right) \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - \frac{\sqrt{3}h}{4c^3} \left( \sqrt{3}h + c\tau \right) \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + O(\tau^4 + h^4). \end{aligned}$$

Из сравнения невязок схем РОМБ и Годунова следует, что первые слагаемые, которые определяют основную погрешность схем, совпадают. Можно сказать, что схема РОМБ первого порядка и схема Годунова по погрешности аппроксимации близки. Невязки этих схем отличаются слагаемыми более высоких порядков аппроксимации. Аналогичные исследования можно провести для невязки  $\varphi_2$  второго уравнения.

Если решить задачу Римана в центре ячейки, т. е. найти формулы распада разрыва, то получим

$$U_{i+1/2} = \frac{U_i + U_{i+1}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} (S_{i+1} - S_i); \quad S_{i+1/2} = \frac{S_i + S_{i+1}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} (U_{i+1} - U_i). \quad (11)$$

Видно, что в соотношениях связи схемы РОМБ (10) и в соотношениях связи (11), которые получаются из формул распада разрыва, как в схеме Годунова, второе слагаемое берется с другим знаком. Это означает, что величины  $U$  и  $S$  в узлах годуновского типа ведут себя при аппроксимации совсем по-другому, чем те же величины в центрах ячеек для схемы РОМБ, и соотношения связи в схеме

РОМБ не являются формулами распада разрыва в центрах ячеек. При этом нельзя построить полностью эквивалентных соотношений связи этих схем, так как в схеме РОМБ нет соотношений связи в узлах, а в схеме Годунова — в центрах ячеек.

Свойства неявной схемы РОМБ для  $P_1$ -приближения изучены в работах [22, 23]. В этих работах показано, что безусловная положительность в схеме РОМБ при аппроксимации системы  $P_1$ -уравнений получается при первом порядке аппроксимации в плоской геометрии.

Анализ дифференциальных приближений схемы РОМБ и схемы Годунова не позволяет сделать однозначного вывода, какую схему предпочтительнее использовать для повышения порядка аппроксимации TVD-реконструкцией, поэтому рассмотрим TVD-реконструкции обеих схем.

### TVD-реконструкция схемы РОМБ

Рассмотрим систему разностных  $P_1$ -уравнений в одномерной криволинейной геометрии (для упрощения записи здесь опущены индексы  $i + 1/2$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\tau}U^{n+1} + \frac{1}{V_i}\Delta_i(r^\sigma S^{n+1}) + \alpha U^{n+1} &= \frac{1}{c\tau}U^n + \alpha_c B^{n+1} + \alpha_s U^{n+1}; \\ \frac{1}{c\tau}S^{n+1} + \frac{1}{3h}\Delta_i U^{n+1} + \alpha S^{n+1} &= \frac{1}{c\tau}S^n, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $h = r_{i+1} - r_i$ ;  $V_i = \frac{r_{i+1}^{\sigma+1} - r_i^{\sigma+1}}{\sigma + 1}$ .

Прежде чем перейти к TVD-реконструкции, построим монотонную схему первого порядка для криволинейной геометрии. В качестве такой схемы возьмем схему, эквивалентную монотонной схеме бегущего счета в инвариантах. Однако для криволинейных координатных систем возникает проблема, состоящая в том, что в обоих уравнениях для инвариантов появляется слагаемое  $\frac{\sigma}{r^{\sigma-1}}(\psi_2 - \psi_1)$ , которое может иметь любой знак. Из-за этого может нарушаться монотонность схемы бегущего счета в инвариантах. Предлагается следующий алгоритм разрешения данной проблемы. Если упомянутое слагаемое на предыдущей итерации отрицательно, то переносим его в правую часть уравнения как положительную добавку с предыдущей итерации. В противном случае учитываем это слагаемое слева нелинейным образом.

Выделим из системы (12) *плоскую* дивергенцию  $\frac{1}{h}\Delta_i S$  и запишем (12) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\tau}U^{n+1} + \frac{1}{h}\Delta_i S^{n+1} + \alpha U^{n+1} + 0,5(1 + \text{sign } \Lambda^{n+1})\Lambda^{n+1} &= \frac{1}{c\tau}U^n + Q^{n+1}; \\ \frac{1}{c\tau}S^{n+1} + \frac{1}{3h}\Delta_i U^{n+1} + \alpha S^{n+1} &= \frac{1}{c\tau}S^n, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\Lambda = \frac{1}{V_i}\Delta_i(r^\sigma S) - \frac{1}{h}\Delta_i S$ ;  $Q^{n+1} = \alpha_c B^{n+1} + \alpha_s U^{n+1} - 0,5(1 - \text{sign } \Lambda^{n+1})\Lambda^{n+1}$ ; правая часть первого уравнения всегда положительна.

Систему (13) будем решать итерационно, совместно с уравнением энергии:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\tau}U^{\nu+1} + \frac{1}{h}\Delta_i S^{\nu+1} + \alpha U^{\nu+1} + 0,5(1 + \text{sign } \Lambda^\nu)\Lambda^{\nu+1} &= \frac{1}{c\tau}U^n + Q^{\nu+1/2}; \\ \frac{1}{c\tau}S^{\nu+1} + \frac{1}{3h}\Delta_i U^{\nu+1} + \alpha S^{\nu+1} &= \frac{1}{c\tau}S^n, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\nu$  — итерационный индекс,  $Q^{\nu+1/2} = \alpha_c B^{\nu+1/2} + \alpha_s U^\nu - 0,5(1 - \text{sign } \Lambda^\nu)\Lambda^\nu$ , а организация итераций для  $B^{n+1}$  такова, что решение системы (14) происходит с известной правой частью  $B^{\nu+1/2}$ .



Запишем систему (14) в инвариантах:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\tau} \psi_1^{\nu+1} - \frac{1}{h\sqrt{3}} \Delta_i \psi_1^{\nu+1} + \alpha \psi_1^{\nu+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} (1 + \text{sign } \Lambda^\nu) \Lambda^{\nu+1} &= \frac{1}{c\tau} \psi_1^n + \frac{1}{\sqrt{3}} Q^{\nu+1/2}; \\ \frac{1}{c\tau} \psi_2^{\nu+1} + \frac{1}{h\sqrt{3}} \Delta_i \psi_2^{\nu+1} + \alpha \psi_2^{\nu+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} (1 + \text{sign } \Lambda^\nu) \Lambda^{\nu+1} &= \frac{1}{c\tau} \psi_2^n + \frac{1}{\sqrt{3}} Q^{\nu+1/2}. \end{aligned}$$

Для построения монотонной аппроксимации перейдем к нелинейным схемам. Приведем левые части этих уравнений к зависимости только от  $\psi_1^{\nu+1}$  или от  $\psi_2^{\nu+1}$ , заменив соответственно выражение  $\Lambda^{\nu+1}(\psi_1^{\nu+1}, \psi_2^{\nu+1}) = \frac{1}{2} \Delta_i \left[ \left( \frac{r^\sigma}{V} - \frac{1}{h} \right) (\psi_2^{\nu+1} - \psi_1^{\nu+1}) \right]$  на  $\frac{\Lambda^\nu}{\psi^\nu} \psi^{\nu+1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\tau} \psi_1^{\nu+1} - \frac{1}{h\sqrt{3}} \Delta_i \psi_1^{\nu+1} + \alpha \psi_1^{\nu+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} (1 + \text{sign } \Lambda^\nu) \frac{\Lambda^\nu}{\psi_1^\nu} \psi_1^{\nu+1} &= \frac{1}{c\tau} \psi_1^n + \frac{1}{\sqrt{3}} Q^{\nu+1/2}; \\ \frac{1}{c\tau} \psi_2^{\nu+1} + \frac{1}{h\sqrt{3}} \Delta_i \psi_2^{\nu+1} + \alpha \psi_2^{\nu+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} (1 + \text{sign } \Lambda^\nu) \frac{\Lambda^\nu}{\psi_2^\nu} \psi_2^{\nu+1} &= \frac{1}{c\tau} \psi_2^n + \frac{1}{\sqrt{3}} Q^{\nu+1/2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для системы (15) при положительных правых частях можно построить положительную схему первого порядка аппроксимации, используя соотношения связи

$$(\psi_1)_{i+1/2}^{\nu+1} = (\psi_1)_i^{\nu+1}; \quad (\psi_2)_{i+1/2}^{\nu+1} = (\psi_2)_{i+1}^{\nu+1}. \quad (16)$$

При  $Q = 0$  в правой части системы (15) соотношения связи (16) будут давать монотонную схему первого порядка.

Теперь с помощью TVD-методологии представим  $\psi$  на интервале  $r_i \leq r \leq r_{i+1}$  в кусочно-линейной форме:

$$\psi(r) = \psi_{i+1/2} + \frac{\partial \psi_{i+1/2}}{\partial r} (r - r_{i+1/2}), \quad \text{где } r_{i+1/2} = 0,5(r_i + r_{i+1}), \quad (17)$$

т. е. реконструкцию решения проведем в инвариантах.

В соответствии с TVD-методологией в качестве  $\frac{\partial \psi_{i+1/2}}{\partial r}$  берутся некоторые ограничители. Тогда из формулы (17) получаем

$$(\psi_1)_i^{\nu+1} = (\psi_1)_{i+1/2}^{\nu+1} - 0,5L(\Delta\psi_1)_{i+1/2}^{\nu+1}; \quad (\psi_2)_{i+1}^{\nu+1} = (\psi_2)_{i+1/2}^{\nu+1} + 0,5L(\Delta\psi_2)_{i+1/2}^{\nu+1}, \quad (18)$$

где  $(\Delta\psi)_{i-1/2} = \psi_{i+1/2} - \psi_{i-1/2}$ ;  $L(\Delta\psi)_{i+1/2} = L(\Delta\psi_{i-1/2}, \Delta\psi_{i+1/2})$  — некоторый ограничитель.

Формулы (18) соответствуют трехточечной схеме. Проведем линеаризацию системы (18) следующим образом:

$$\begin{aligned} (\psi_1)_i^{\nu+1} &= a_- (\psi_1)_{i+1/2}^{\nu+1}, \quad a_- = 1 - \frac{1}{2} \frac{L(\Delta\psi_1)_{i+1/2}^n}{(\psi_1)_{i+1/2}^n}; \\ (\psi_2)_{i+1}^{\nu+1} &= a_+ (\psi_2)_{i+1/2}^{\nu+1}, \quad a_+ = 1 + \frac{1}{2} \frac{L(\Delta\psi_2)_{i+1/2}^n}{(\psi_2)_{i+1/2}^n}. \end{aligned} \quad (19)$$

Формулы (19), в отличие от формул (18), уже соответствуют двухточечной схеме на  $(\nu + 1)$ -й итерации. При  $\psi_1^n = 0$  полагаем  $a_- = 1$ , при  $\psi_2^n = 0$  полагаем  $a_+ = 1$ . Здесь использован тот факт, что  $\frac{L(\Delta\psi)_{i+1/2}^{\nu+1}}{(\psi)_{i+1/2}^{\nu+1}} \approx \frac{L(\Delta\psi)_{i+1/2}^n}{(\psi)_{i+1/2}^n}$  как дробно-линейный функционал слабо меняется. Соотношения (19) с

точностью до  $O(h)$  отличаются от соотношений связи схемы первого порядка (16):

$$a_\pm - 1 = \pm \frac{L(\Delta\psi)_{i+1/2}^n}{2\psi_{i+1/2}^n} \approx \pm \frac{h}{2\psi_{i+1/2}^n} \frac{\partial \psi_{i+1/2}^n}{\partial r} = \pm \frac{h}{2} \frac{\partial (\ln \psi_{i+1/2}^n)}{\partial r} = O(h).$$

Введенные указанным образом коэффициенты  $a_{\pm}$  удовлетворяют условию положительности, но доказательство принадлежности схемы (19) к TVD-схемам затруднено из-за проведенной линеаризации.

По формулам обратного перехода получаем из формул (19) соотношения связи для  $U$  и  $S$ :

$$U_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left( \frac{U_i}{a_-} + \frac{U_{i+1}}{a_+} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{S_{i+1}}{a_+} - \frac{S_i}{a_-} \right); \quad S_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left( \frac{S_i}{a_-} + \frac{S_{i+1}}{a_+} \right) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \frac{U_{i+1}}{a_+} - \frac{U_i}{a_-} \right). \quad (20)$$

Из системы (15) по формулам обратного перехода получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\tau} U^{\nu+1} + \frac{1}{h} \Delta_i S^{\nu+1} + \alpha U^{\nu+1} + W_1^{\nu+1} &= \frac{1}{c\tau} U^n + Q^{\nu+1/2}; \\ \frac{1}{c\tau} S^{\nu+1} + \frac{1}{3h} \Delta_i U^{\nu+1} + \alpha S^{\nu+1} + W_2^{\nu+1} &= \frac{1}{c\tau} S^n, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} W_{1,i+1/2}^{\nu+1} &= \delta_{i+1/2}^{\nu} U_{i+1/2}^{\nu+1} - 3\theta_{i+1/2}^{\nu} S_{i+1/2}^{\nu+1}; & W_{2,i+1/2}^{\nu+1} &= -\theta_{i+1/2}^{\nu} U_{i+1/2}^{\nu+1} + \delta_{i+1/2}^{\nu} S_{i+1/2}^{\nu+1}; \\ \delta_{i+1/2}^{\nu} &= \frac{\Lambda_0^{\nu}}{2\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\psi_1^{\nu}} + \frac{1}{\psi_2^{\nu}} \right) = \frac{\Lambda_0^{\nu} U^{\nu}}{(U^2 - 3S^2)^{\nu}}; & \theta_{i+1/2}^{\nu} &= \frac{\Lambda_0^{\nu}}{6} \left( \frac{1}{\psi_1^{\nu}} - \frac{1}{\psi_2^{\nu}} \right) = \frac{\Lambda_0^{\nu} S^{\nu}}{(U^2 - 3S^2)^{\nu}}. \end{aligned}$$

Подставляя соотношения связи (20) в систему (21), получаем следующие уравнения:

$$a_i^0 U_i + b_i^0 U_{i+1} + c_i^0 S_i + d_i^0 S_{i+1} = f_i^0; \quad a_i^1 U_i + b_i^1 U_{i+1} + c_i^1 S_i + d_i^1 S_{i+1} = f_i^1, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} a_i^0 &= c_i^1 = \left( \frac{1}{a_-} \left( 1 + \frac{\theta\sqrt{3}}{q_1} \right) \right)_{i+1/2}^{\nu}; & b_i^0 &= d_i^1 = \left( \frac{1}{a_+} \left( 1 - \frac{\theta\sqrt{3}}{q_1} \right) \right)_{i+1/2}^{\nu}; & q_1 &= \frac{1}{c\tau} + \alpha + \delta; \\ c_i^0 &= \left( -\frac{\sqrt{3}}{a_-} - \frac{2}{q_1 h} - \frac{3\theta}{q_1 a_-} \right)_{i+1/2}^{\nu}; & d_i^0 &= \left( \frac{\sqrt{3}}{a_+} + \frac{2}{q_1 h} - \frac{3\theta}{q_1 a_+} \right)_{i+1/2}^{\nu}; & a_i^1 &= \frac{c_i^0}{3}; & b_i^1 &= \frac{d_i^0}{3}; \\ f_i^0 &= \frac{2}{q_1} \left( \frac{1}{c\tau} U_{i+1/2}^n + Q_{i+1/2}^{\nu+1/2} \right); & f_i^1 &= \frac{2}{c\tau q_1} S_{i+1/2}^n. \end{aligned} \quad (23)$$

Система уравнений (22), (23) является двухточечной схемой, которая решается методом потоковой прогонки.

### TVD-реконструкция схемы Годунова

Для системы (15) можно построить положительную схему первого порядка аппроксимации, используя соотношения связи Годунова

$$(\psi_1)_{i+1/2}^{\nu+1} = (\psi_1)_i^{\nu+1}; \quad (\psi_2)_{i-1/2}^{\nu+1} = (\psi_2)_i^{\nu+1}.$$

С помощью TVD-методологии увеличим порядок аппроксимации:

$$(\psi_1)_i^{\nu+1} = (\psi_1)_{i+1/2}^{\nu+1} - 0,5L (\Delta\psi_1)_{i+1/2}^{\nu+1}; \quad (\psi_2)_i^{\nu+1} = (\psi_2)_{i-1/2}^{\nu+1} + 0,5L (\Delta\psi_2)_{i-1/2}^{\nu+1}. \quad (24)$$

Проведем линеаризацию системы (24) по формулам, аналогичным (19), и по формулам обратного перехода получим соотношения связи для  $U$  и  $S$ :

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{a_- U_{i+1/2} + a_+ U_{i-1/2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} (a_- S_{i+1/2} - a_+ S_{i-1/2}); \\ S_i &= \frac{a_- S_{i+1/2} + a_+ S_{i-1/2}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} (a_- U_{i+1/2} - a_+ U_{i-1/2}). \end{aligned} \quad (25)$$

Из сравнения соотношений связи (20) и (25) видно, что TVD-реконструкция в схеме Годунова действует совершенно по-другому, чем в схеме РОМБ. В соотношениях связи схемы Годунова величины  $U_{i+1/2}$ ,  $U_{i-1/2}$ ,  $S_{i+1/2}$ ,  $S_{i-1/2}$  заменяются величинами  $a_-U_{i+1/2}$ ,  $a_+U_{i-1/2}$ ,  $a_-S_{i+1/2}$ ,  $a_+S_{i-1/2}$ ; в соотношениях связи схемы РОМБ величины  $U_i$ ,  $U_{i+1}$ ,  $S_i$ ,  $S_{i+1}$  заменяются величинами  $U_i/a_-$ ,  $U_{i+1}/a_+$ ,  $S_i/a_-$ ,  $S_{i+1}/a_+$ . Следовательно, если, например, коэффициенты  $a_-$ ,  $a_+$  увеличивают (или уменьшают) значения  $U$ ,  $S$  в соотношениях связи схемы Годунова, то эти же коэффициенты соответственно уменьшают (или увеличивают) значения основных величин в соотношениях связи схемы РОМБ.

Подставляя соотношения связи (25) в уравнения (21), получаем

$$\begin{aligned} a_i^0 U_{i-1/2} + b_i^0 U_{i+1/2} + c_i^0 U_{i+3/2} + d_i^0 S_{i-1/2} + e_i^0 S_{i+1/2} + g_i^0 S_{i+3/2} &= f_i^0; \\ a_i^1 U_{i-1/2} + b_i^1 U_{i+1/2} + c_i^1 U_{i+3/2} + d_i^1 S_{i-1/2} + e_i^1 S_{i+1/2} + g_i^1 S_{i+3/2} &= f_i^1, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} a_i^0 &= -\frac{(a_+)_{i-1/2}^n}{\sqrt{3}}; & b_i^0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(a_+ + a_-)_{i+1/2}^n + 2h(q_1)_{i+1/2}^\nu; & c_i^0 &= -\frac{(a_-)_{i+3/2}^n}{\sqrt{3}}; \\ d_i^0 &= -(a_+)_{i-1/2}^n; & e_i^0 &= (a_+ - a_-)_{i+1/2}^n - 6h\theta_{i+1/2}^\nu; & g_i^0 &= (a_-)_{i+3/2}^n; & q_1 &= \frac{1}{c\tau} + \alpha + \delta; \\ a_i^1 &= -(a_+)_{i-1/2}^n; & b_i^1 &= (a_+ - a_-)_{i+1/2}^n - 6h\theta_{i+1/2}^\nu; & c_i^1 &= (a_-)_{i+3/2}^n; & f_i^0 &= 2h\left(\frac{1}{c\tau}U_{i+1/2}^n + Q_{i+1/2}^{\nu+1/2}\right); \\ d_i^1 &= -\sqrt{3}(a_+)_{i-1/2}^n; & e_i^1 &= \sqrt{3}(a_+ + a_-)_{i+1/2}^n + 6h(q_1)_{i+1/2}^\nu; & g_i^1 &= -\sqrt{3}(a_-)_{i+3/2}^n; & f_i^1 &= \frac{6h}{c\tau}S_{i+1/2}^n. \end{aligned}$$

Матрица коэффициентов в системе (26), как и в системе (9), не является симметричной, но соответствует трехточечной схеме, которую можно решать матричной прогонкой.

### Численные расчеты

В качестве примера рассмотрим две модельные задачи, описывающие остывание плоского и сферического слоев в вакууме. Обе задачи дают разрывные решения. Для доказательства сохранения положительности на разрывных решениях сравниваются TVDR-схема, построенная с помощью TVD-реконструкции схемы РОМБ, и линейная монотонная схема РОМБ первого порядка.

**Задача 1 (остывание плоского слоя в вакууме).** Граничные условия при  $r = 0$  заданы в виде условия отражения, при  $r = R = 4$  см — в виде условия на свободной поверхности. Пространственная сетка равномерная, 10 000 интервалов. Шаг по времени  $\tau = 10^{-8}$  мкс.

Для наглядности точное решение представлено в фазовой плоскости  $(t, r)$  в виде схемы на рис. 1. Из рисунка следует, что полученное решение разрывно по всем основным величинам  $U$ ,  $S$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ . Линиями разрыва являются диагональные линии-характеристики  $\sqrt{3}r \pm ct = \text{const}$ .

Точное решение в виде профилей температуры фотонов  $T_{\text{fot}} = \sqrt[4]{U/4110}$  в зависимости от пространственной координаты при начальных данных  $U_0 = 4110$  на момент времени  $t = 0,1$  мкс через равные промежутки времени приводится на рис. 2. Для сравнения здесь же приведены численные результаты по разностным схемам первого и второго порядков аппроксимации.

Из рис. 2 видно, что TVD-реконструкция схемы РОМБ повышает порядок аппроксимации и дает монотонное положительное решение. С течением времени профиль температуры по схеме с TVD-реконструкцией размазывается слабее, чем по схеме первого порядка.

**Задача 2 (остывание сферического слоя в вакууме).** Рассматривается остывание сферы радиусом 4 см, заполненной только фотонами. Остальные данные совпадают с предыдущей задачей.

На рис. 3 приведены решения, полученные по схеме РОМБ с TVD-реконструкцией и без нее. Видно, что TVD-реконструкция схемы РОМБ в сферически-симметричной геометрии на разрывном

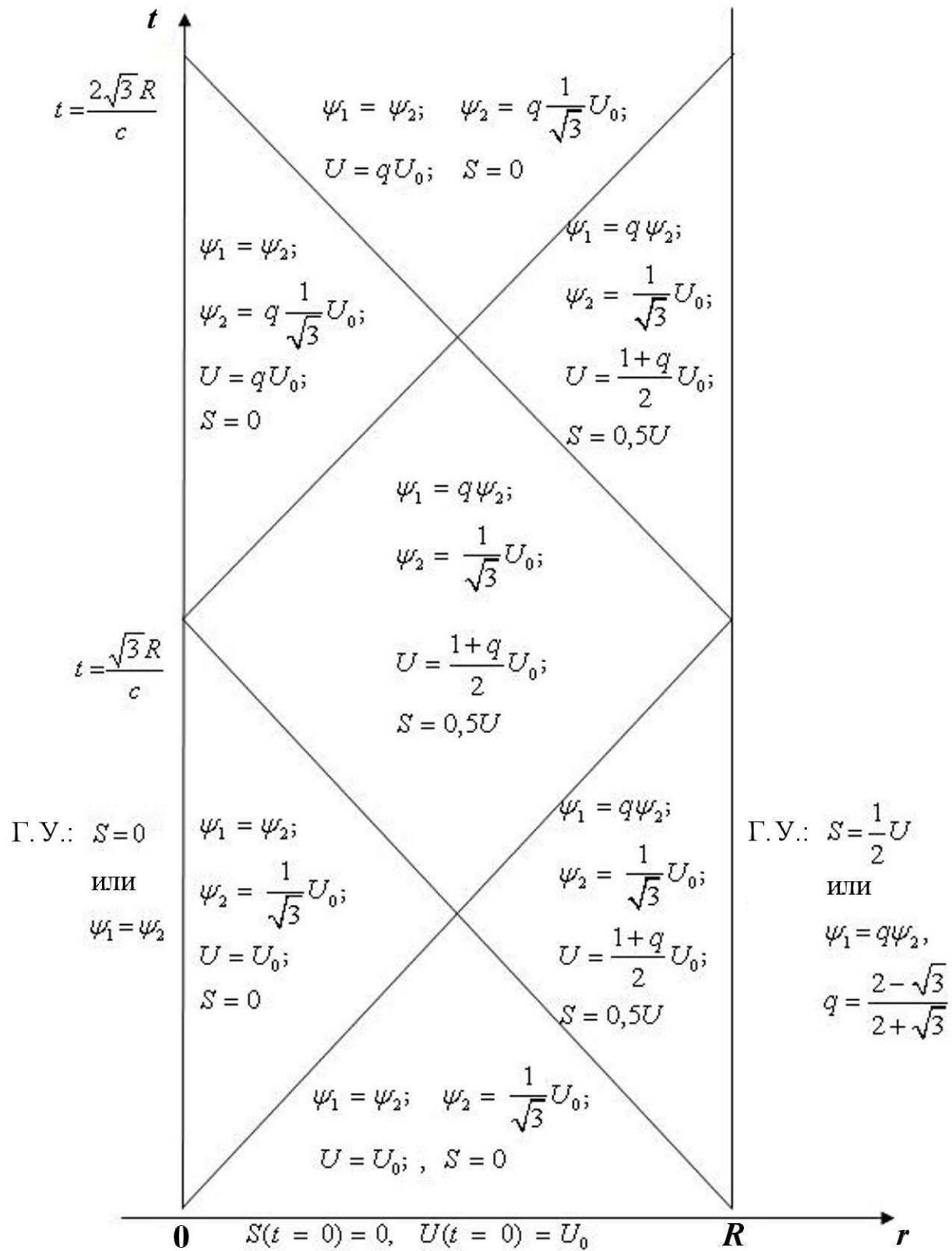


Рис. 1. Схема точного решения в фазовой плоскости  $(t, r)$

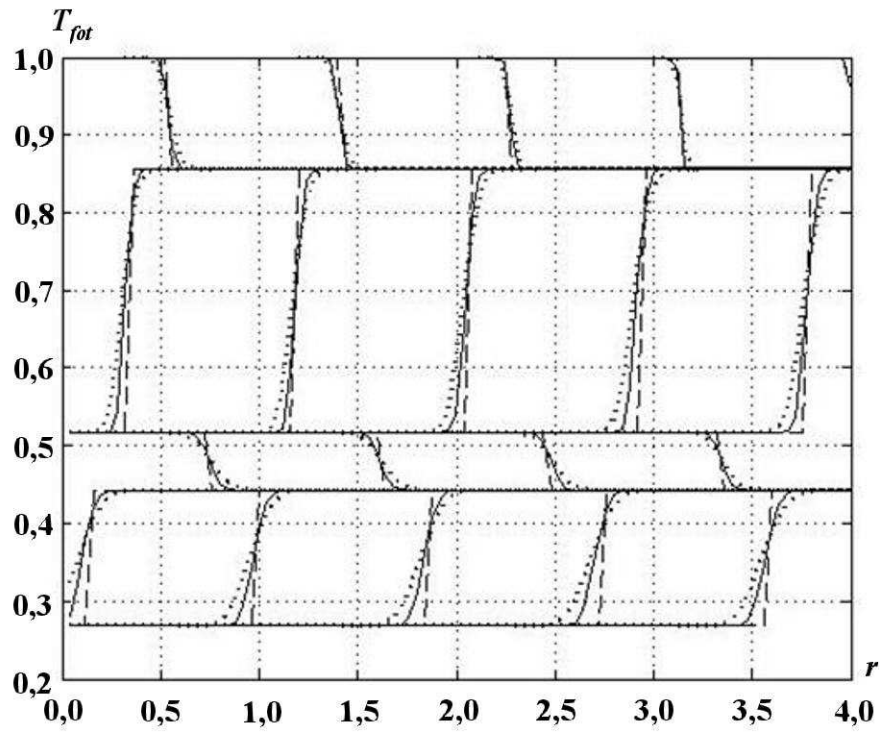


Рис. 2. Профили  $T_{fot}$  в плоской геометрии через промежутки времени  $\Delta t = 0,0005$  мкс: — — TVD-реконструкция схемы РОМБ;  $\cdots$  — схема РОМБ первого порядка; --- — точное решение

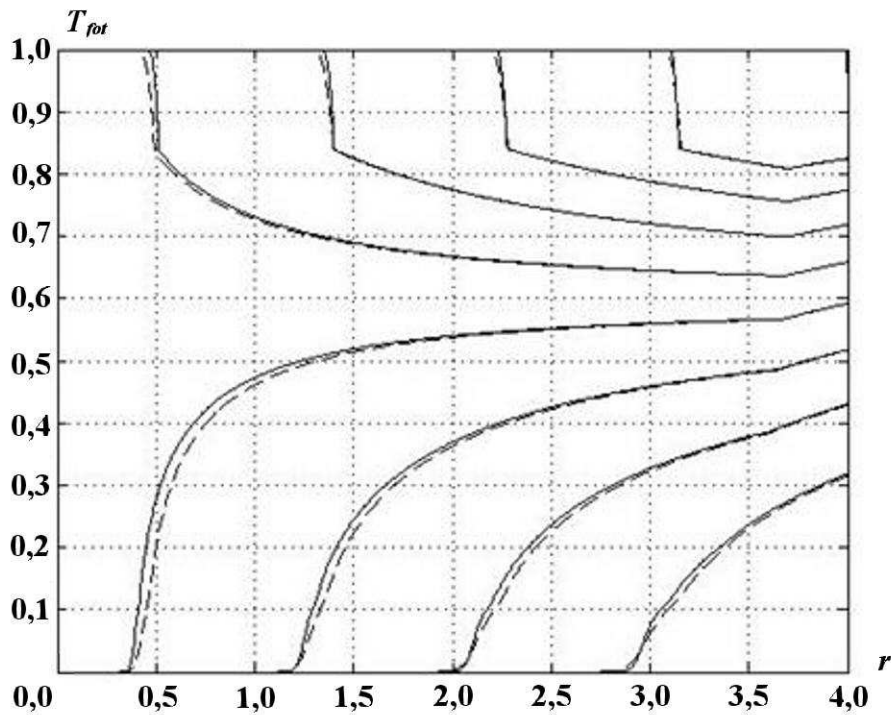


Рис. 3. Профили  $T_{fot}$  в сферически-симметричной геометрии через промежутки времени  $\Delta t = 0,0005$  мкс: — — TVD-реконструкция схемы РОМБ; --- — схема РОМБ первого порядка

решении дает без потери положительности более крутой профиль температуры, чем схема первого порядка.

### Заключение

Основной целью данной работы было исследование возможных направлений построения монотонных разностных аппроксимаций системы  $P_1$ -уравнений. Для этого детально проанализированы две схемы: схема Годунова и схема РОМБ.

В результате проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

Для построения разностной аппроксимации системы  $P_1$ -уравнений желательно сочетать высокий порядок аппроксимации и компактность схемного шаблона с монотонностью или, в крайнем случае, положительностью получаемого решения. Построение компактных разностных схем возможно методом конечных объемов, который позволяет в многомерных геометриях строить схемы на сложных сетках без потери точности.

Линейные схемы второго порядка аппроксимации в первом дифференциальном приближении дают уравнение Кордевега де Вриза, которое создает колебания в разрывных решениях. Поэтому линейные схемы второго порядка всегда будут нарушать положительность и монотонность решения. Линейные схемы третьего порядка более диссипативны, но их диссипации не хватает, чтобы погасить осцилляции, возникающие на разрывах. Линейные схемы более высоких порядков являются весьма сложными при реализации, особенно в многомерных геометриях. Нахождение монотонных схем повышенного порядка аппроксимации для системы  $P_1$ -уравнений в классе линейных схем невозможно.

Повышения порядка аппроксимации до второго и улучшения монотонных свойств можно достичь путем замены условия сохранения монотонности на условие уменьшения полной вариации в нелинейных TVD-схемах. Нелинейные схемы более высоких порядков аппроксимации (второго порядка и выше — TVNI, TVB, ENO, WENO, UNO и т. д.) не исключают осцилляций, которые недопустимы в задачах переноса теплового излучения с обязательным требованием положительности температуры. Эти схемы также нежелательны к применению для  $P_1$ -уравнений, так как монотонность и положительность в задачах переноса теплового излучения являются более важными требованиями, чем порядок аппроксимации. Широко распространенные в задачах газодинамики нелинейные монотонные MUSCL-схемы являются явными и накладывают жесткие ограничения на выбор временного шага, поэтому не применимы для задач переноса излучения.

Анализ дифференциальных приближений схемы РОМБ первого порядка аппроксимации и схемы Годунова не позволяет сделать однозначного вывода, какую схему предпочтительнее использовать для повышения порядка аппроксимации TVD-реконструкцией. Хотя линейная схема РОМБ в общем случае имеет второй порядок аппроксимации, для повышения порядка аппроксимации TVD-реконструкцией можно использовать только монотонную схему РОМБ первого порядка, которая близка по построению к схеме Годунова и дает похожие результаты. Поэтому TVD-реконструкции обеих схем практически не различаются по точности. Однако схема Годунова использует трехточечный шаблон, который приводит к решению матричной прогонкой, а схема РОМБ — двухточечный шаблон, который позволяет использовать более дешевую потоковую прогонку в одномерных геометриях. В многомерных геометриях на структурированных сетках для использования прогонок можно применять различные методы расщепления по направлениям. На неструктурированных сетках, где нельзя применить матричную и потоковую прогонки, приходится использовать решатели, в которых ситуация может поменяться. Из-за более сильного диагонального преобладания матрица коэффициентов разностной системы линейных уравнений, полученная по схеме Годунова, может легче и быстрее обращаться, чем матрица, полученная по схеме РОМБ [24].

Проведенные исследования и практика расчетов показывают, что хотя в  $P_1$ -приближении линейная схема РОМБ второго порядка аппроксимации [25] и нелинейная схема Годунова с TVD-реконструкцией [26] дают неплохие результаты, построение положительной схемы повышенного порядка аппроксимации со строгим теоретическим обоснованием возможно только с помощью нелинейной реконструкции, позволяющей переходить к характеристической системе в плоской геометрии, т. е. по TVDR-схемам.

## Список литературы

1. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник. 1959. № 47. Вып. 3. С. 271—306.
2. Бондаренко Ю. А., Башуров В. В., Янилкин Ю. В. Математические модели и численные методы для решения задач нестационарной газовой динамики: Препринт № 88. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2003.
3. Колган В. П. Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3, № 6. С. 68—77.
4. Копченов В. И., Крайко А. Н. Монотонная разностная схема второго порядка для гиперболических систем с двумя независимыми переменными // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1983. Т. 23, № 4. С. 848—858.
5. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. 1983. Vol. 49. P. 357—393.
6. Shu Chi-Wang. TVB uniformly high-order schemes for conservation laws // Mathematics of Computation. 1987. Vol. 49, No 179. P. 105—121.
7. Van Leer B. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme // J. Comp. Phys. 1974. Vol. 14. P. 361—370.
8. Banks J. W., Aslam T., Rider W. J. On sub-linear convergence for linearly degenerate waves in capturing schemes // Ibid. 2008. Vol. 227. P. 6985—7002.
9. Гаджиев А. Д., Писарев В. Н. Неявный конечно-разностный метод РОМБ для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1979. Т. 19, № 5. С. 1288—1303.
10. Гаджиев А. Д., Кузьмин С. Ю., Лебедев С. Н., Писарев В. Н. Неявный конечно-разностный метод РОМБ для численного решения двумерных уравнений газовой динамики на произвольных лагранжево-эйлеровых сетках: Препринт № 94. Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 1996.
11. Гаджиев А. Д., Писарев В. Н., Шестаков А. А. Метод расчета двумерных задач теплопроводности на неортогональных сетках // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1982. Т. 22, № 2. С. 339—347.
12. Писарев В. Н., Чернова С. В. Схема РОМБ для решения трехмерного параболического уравнения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2007. Вып. 3—4. С. 3—14.
13. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Метод РОМБ для решения многогруппового уравнения переноса излучения в  $P_1$ -приближении // Там же. 1989. Вып. 3. С. 66—70.
14. McClarren R. G., Holloway J. P., Brunner T. A. On solutions to the  $P_n$ -equations for thermal radiative transfer // J. Comp. Phys. 2008. Vol. 227. P. 2864—2885.
15. Гольдин В. Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1964. Т. 4, № 6. С. 1078—1087.
16. Карлыханов Н. Г., Козманов М. Ю. Учет кинетических эффектов в диффузионном приближении для расчета переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2010. Вып. 4. С. 3—9.
17. Gelbard E. M. Application of Spherical Harmonics Methods to Reactor Problems. Report WAPD-BT-20. Bettis Atomic Power Laboratory, 1960.
18. Вершинская А. С., Гаджиев А. Д., Грабовенская С. А., Шестаков А. А. Применение TVD реконструкции для построения монотонной и второго порядка схемы РОМБ решения уравнения переноса теплового излучения в  $P_1$ -приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 21—36.

19. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. и др. Численное решение многомерных задач гидродинамики. М.: Наука, 1976.
20. Родионов А. В. О взаимосвязи разрывного метода Галёркина со схемами MUSCL-типа // Мат. моделирование. 2015. Т. 27, № 10. С. 96—116.
21. Leonard D. P., Niknafs H. S. Sharp monotonic resolution of discontinuities without clipping of narrow extrema // Computers & Fluids. 1991. Vol. 19, No 1. P. 141—154.
22. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Об устойчивости и сходимости конечно-разностной схемы РОМБ для совместного решения уравнения энергии и уравнения переноса излучения в  $P_1$ -приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып. 1. С. 31—37.
23. Шестаков А. А. Безусловно устойчивые разностные схемы для решения задачи переноса лучистой энергии в диффузионном и  $P_1$ -приближениях // Там же. Вып. 3. С. 47—53.
24. Vaziev E. M., Gadzhiev A. D., Kuzmin S. Y. An implicit finite-volume TVD method for solving 2D hydrodynamics equations on unstructured meshes // Numerical Analysis and Scientific Computation with Applications (NASCA 13). Calais, France. 24—26 June, 2013.
25. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Двумерная методика РОМБ для численного решения уравнений переноса излучения в многогрупповом  $P_1$ -приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1990. Вып. 1. С. 41—47.
26. Гаджиев А. Д., Чубарешко И. С., Шестаков А. А. Неявная конечно-объемная схема с TVD-реконструкцией для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в  $P_1$ -приближении // Забабакхинские науч. чтения XII. Тез. докл. Снежинск, 2014. С. 334.

Статья поступила в редакцию 16.02.16.

ON THE CONSTRUCTION OF A MONOTONE DIFFERENCE APPROXIMATION SCHEME FOR THE  $P_1$ -EQUATION SYSTEM / A. A. Shestakov (FSUE "E. I. Zababakhin RFNC-VNIITF", Snezhinsk, Chelyabinsk region)

In a nonstationary radiation transport problem, the  $P_1$ -approximation leads to a hyperbolic system of equations and its solution causes significant difficulties of constructing a monotone difference scheme of the second approximation order. In a multidimensional case, one fails to construct a monotone scheme even of the first order of approximation for hyperbolic equation systems. The difficulties of constructing monotone schemes for the  $P_1$ -approximation can be explained by the fact that the method of spherical harmonics has the wave effect and may give negative solutions in curved and multidimensional geometries for any  $P_n$ -expansion. The second approximation order and an improved monotone behavior can be achieved by replacing the monotonicity preservation requirement by the requirement of a reduced full variation in nonlinear TVD-schemes. The objective of work was to study possible variants of constructing monotone difference approximation schemes for the  $P_1$ -equation system by the example of two schemes.

*Keywords:* radiation transport, TVD-reconstruction,  $P_1$ -approximation.

---