

УДК 519.6

**РАСЧЕТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ГОДУНОВА  
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ВЗРЫВЧАТОГО ВЕЩЕСТВА  
НА ОСНОВЕ ОКТОГЕНА  
В УСЛОВИЯХ НИЗКОСКОРОСТНОГО НАГРУЖЕНИЯ**

О. М. Величко  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Представлена расчетная модель вязкоупругой среды с кинетикой образования трещин за счет сдвиговых напряжений, реализованная методом Годунова. В основу алгоритма положены связанный метод решения разностных уравнений гидроупругости и решение задачи о распаде разрыва в гидроупругой среде.

Представлены результаты применения расчетной модели для решения задач по соударению стального шарика с цилиндрическим образцом флегматизированного октогена и по деформированию образца взрывчатого вещества в опытах с составными стержнями Гопкинсона.

*Ключевые слова:* взрывчатое вещество, деформирование и разрушение, вязкоупругая модель с трещинами, метод Годунова, численное моделирование.

### Введение

В вопросах, связанных с моделированием возможности инициирования взрывчатых превращений во взрывчатом веществе (ВВ) при низкоскоростном нагружении, важную роль играет точное описание его прочностных характеристик в этих условиях. Разработке реологических моделей поведения ВВ на основе флегматизированного октогена при низкоскоростных нагрузках посвящено много исследований. В работе [1] представлена феноменологическая релаксационная модель упруго-пластического деформирования ВВ в условиях статических и низкоскоростных нагрузок. В работах американских авторов [2–4] предложено описывать поведение ВВ вязкоупругой моделью Максвелла в комбинации с моделью трещинообразования, сформулированной на основе микромеханического подхода. Этот расчетный алгоритм реализован на базе метода конечных элементов [5], получены константы модели применительно к описанию поведения американского состава ВВ РВХ 9501. Отметим исследования российских авторов [6, 7], которые позволяют определить вязкоупругие характеристики композитных материалов, в частности ВВ на основе флегматизированного октогена, по результатам сравнительного анализа динамического нагружения конструкций. Авторы работ [8–10] применяют модель [2–4] для расчета критерия взрыва в трех различных опытах.

В настоящей работе представлена расчетная модель вязкоупругой среды с кинетикой образования трещин за счет сдвиговых напряжений [2–4], реализованная на основе метода Годунова [11, 12]. Этот метод обладает свойствами монотонности и консервативности, позволяет выделять контактные границы, ударные и детонационные волны, строить сетки, адаптированные к сложной структуре течений. В основу алгоритма положены связанный метод решения разностных уравнений гидроупругости и решение задачи о распаде разрыва в гидроупругой среде [13]. Представленная реализация дает принципиальную возможность проводить сквозные расчеты всей цепочки процессов, сопровождающих реакцию ВВ на низкоскоростные воздействия, включать критерии и кинетики низкоскоростного режима взрывчатых превращений, моделировать возможный переход в детонацию.

Тестирование развиваемого подхода выполнено на задачах по ударному нагружению цилиндрического образца ВВ стальным шариком [14] и на установке с составными стержнями Гопкинсона (ССГ). В расчетах с параметрами модели, взятыми из [2–4], исследовано влияние на решение размера счетной ячейки.

Приведены пробные результаты моделирования опытов с деформированием образца ВВ на установке с ССГ из работы [1]. В расчетах использованы скорректированные параметры модели вязкоупругой среды с трещинообразованием.

### Математическая постановка задачи

Для описания процессов динамического деформирования среды используются законы сохранения массы, импульса, энергии и соотношения модели вязкоупругой среды с кинетикой образования трещин за счет сдвиговых напряжений [2–4].

Система дифференциальных уравнений сохранения массы, импульса, энергии в дивергентной форме для плоских и осесимметричных задач записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial r^\nu \rho}{\partial t} + \frac{\partial (r^\nu \rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (r^\nu \rho v)}{\partial r} &= 0; \\
 \frac{\partial (r^\nu \rho u)}{\partial t} + \frac{\partial r^\nu (\rho u^2 - s_{xx} + p)}{\partial x} + \frac{\partial r^\nu (\rho uv - s_{xr})}{\partial r} &= \nu s_{xr}; \\
 \frac{\partial r^\nu (\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial r^\nu (\rho uv - s_{xr})}{\partial x} + \frac{\partial r^\nu (\rho v^2)}{\partial r} &= -r^\nu \frac{\partial (p - s_{rr})}{\partial r} + \nu (s_{xx} + 2s_{rr}); \\
 \frac{\partial r^\nu \rho E}{\partial t} + \frac{\partial r^\nu \rho u H}{\partial x} + \frac{\partial r^\nu \rho v H}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial x} r^\nu (us_{xx} + vs_{xr}) - \frac{\partial}{\partial r} r^\nu (us_{xr} + vs_{rr}) &= 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $\rho$  — плотность среды;  $p$  — давление;  $\varepsilon$  — внутренняя энергия;  $u, v$  — компоненты скорости в направлении осей  $x, r$ ;  $E = \varepsilon + \frac{u^2 + v^2}{2}$ ;  $H = E + \frac{p}{\rho}$ . Компоненты тензора напряжений в среде  $\tau_{ij}$  представлены в виде суммы давления  $p$  и девиаторной части  $s_{ij}$ , характеризующей сопротивляемость среды деформациям сдвига:  $\tau_{ij} = s_{ij} - p\delta_{ij}$ ,  $-p = \frac{1}{3}(\tau_{xx} + \tau_{rr} + \tau_{\theta\theta})$ . Термодинамические величины — давление, плотность, внутренняя энергия — подчиняются двучленному уравнению состояния вида  $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon + (\rho - \rho_0)c_0^2$ , где  $\rho_0, c_0, p_0 = \rho_0 c_0^2$  — некоторые константы;  $\nu = 0$  для плоской задачи в декартовых координатах  $x, r$ ;  $\nu = 1$  для осесимметричной задачи в цилиндрических координатах  $x, r, \theta$  с осью симметрии  $x$ .

Выбранная форма записи уравнений гидроупругости (1) позволяет избежать счетного эффекта, который может возникнуть в расчетах осесимметричных задач, проводимых методом Годунова [11] при восполнении сеточных кривых прямыми линиями. А именно в окрестности оси симметрии может сформироваться струйное течение, являющееся следствием неудовлетворительной аппроксимации членов с градиентом давления в уравнении движения для составляющей скорости  $v$ .

В модели [2–4] предполагается, что в каждом элементарном объеме сдвиговые напряжения описываются вязкоупругой моделью Максвелла из пяти элементов, соединенных параллельно. Каждый элемент состоит из двух компонентов, которые моделируют сопротивление сдвигу (модуль сдвига  $\mu^k$ ) и вязкость (время релаксации  $\tau^k$ ). Модель разрушения среды построена в предположении изотропии материала, т. е. изначально трещины одинакового размера равномерно распределены по всему объему вне зависимости от направления. Степень разрушения материала характеризуется текущим размером трещин  $s$  и характерным размером трещин  $s_a$ , который является нормирующей эмпирической константой.

Девиатор тензора полных напряжений  $s_{ij}$  равен сумме девиаторов тензоров напряжений пяти элементов Максвелла:

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^5 s_{ij}^{(k)}. \tag{2}$$

Скорость изменения девиатора тензора напряжений  $k$ -го элемента Максвелла определяется следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial (\rho s_{xx}^k)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u s_{xx}^k)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v s_{xx}^k)}{\partial r} &= \frac{2\mu^k \rho}{3} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial r} - \nu \frac{v}{r} \right) + s_{xr}^k \rho \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \\
 &- \frac{\rho s_{xx}^k}{\tau^k} - \frac{\mu^k}{\mu} \rho \left[ 3 \left( \frac{c}{c_a} \right)^2 \frac{\dot{c}}{c_a} s_{xx} + \left( \frac{c}{c_a} \right)^3 \dot{s}_{xx} \right]; \\
 \frac{\partial (\rho s_{rr}^k)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u s_{rr}^k)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v s_{rr}^k)}{\partial r} &= \frac{2\mu^k \rho}{3} \left( 2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{v}{r} \right) - s_{xr}^k \rho \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \\
 &- \frac{\rho s_{rr}^k}{\tau^k} - \frac{\mu^k}{\mu} \rho \left[ 3 \left( \frac{c}{c_a} \right)^2 \frac{\dot{c}}{c_a} s_{rr} + \left( \frac{c}{c_a} \right)^3 \dot{s}_{rr} \right]; \\
 \frac{\partial (\rho s_{xr}^k)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u s_{xr}^k)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v s_{xr}^k)}{\partial r} &= \mu^k \rho \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{(s_{rr}^k - s_{xx}^k) \rho}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \\
 &- \frac{\rho s_{xr}^k}{\tau^k} - \frac{\mu^k}{\mu} \rho \left[ 3 \left( \frac{c}{c_a} \right)^2 \frac{\dot{c}}{c_a} s_{xr} + \left( \frac{c}{c_a} \right)^3 \dot{s}_{xr} \right].
 \end{aligned} \tag{3}$$

Производные  $\dot{s}_{xx}$ ,  $\dot{s}_{xr}$ ,  $\dot{s}_{rr}$  не являются независимыми от  $s_{ij}^k$  и согласно уравнению сохранения массы и условиям (2), (3) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial (\rho s_{xx})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u s_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v s_{xx})}{\partial r} &= \\
 &= \frac{\frac{2\mu\rho}{3} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial r} - \nu \frac{v}{r} \right) + s_{xr}\rho \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \sum_{k=1}^5 \rho \frac{s_{xx}^k}{\tau^k} - 3 \left( \frac{c}{c_a} \right)^2 \frac{\dot{c}}{c_a} \rho s_{xx}}{1 + \left( \frac{c}{c_a} \right)^3}; \\
 \frac{\partial (\rho s_{rr})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u s_{rr})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v s_{rr})}{\partial r} &= \\
 &= \frac{\frac{2\mu\rho}{3} \left( 2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{v}{r} \right) - s_{xr}\rho \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \sum_{k=1}^5 \rho \frac{s_{rr}^k}{\tau^k} - 3 \left( \frac{c}{c_a} \right)^2 \frac{\dot{c}}{c_a} \rho s_{rr}}{1 + \left( \frac{c}{c_a} \right)^3}; \\
 \frac{\partial (\rho s_{xr})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u s_{xr})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v s_{xr})}{\partial r} &= \\
 &= \frac{\mu\rho \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{(s_{rr} - s_{xx}) \rho}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \sum_{k=1}^5 \rho \frac{s_{xr}^k}{\tau^k} - 3 \left( \frac{c}{c_a} \right)^2 \frac{\dot{c}}{c_a} \rho s_{xr}}{1 + \left( \frac{c}{c_a} \right)^3}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь  $\mu = \sum_{k=1}^5 \mu^k$ ,  $\tau^k$ ,  $c_a$  — константы. Скорость роста трещин происходит по двум режимам, медленному и быстрому:

$$\dot{c} = \frac{dc}{dt} = \begin{cases} v_{\max} \left( \frac{K}{K_1} \right)^{m1}, & K \leq K_w; \\ v_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{K_0}{K} \right)^2 \right]^{m2}, & K > K_w, \end{cases} \tag{5}$$

где  $v_{\max}$ ,  $m1$ ,  $m2$ ,  $K_0$  — константы:  $v_{\max}$  — максимальная скорость роста трещины;  $m1$ ,  $m2$  — показатели степенного роста трещины для двух режимов;  $K_0$  — трещиностойкость;  $K_1 = K_0 \sqrt{1 + \frac{2}{m1}} \times$

$\times \left(1 + \frac{2}{m1}\right)^{1/m1}$ ;  $K = \frac{1}{3} \sqrt{(s_{rr} - s_{xx})^2 + (s_{rr} - s_{\theta\theta})^2 + (s_{xx} - s_{\theta\theta})^2 + 6s_{xr}s_{xr}\sqrt{\pi c}}$  ( $\pi = 3, 14$ ). Переход между медленным и быстрым режимами скорости роста трещины происходит при достижении порогового значения  $K_w = K_0 \sqrt{1 + \frac{2}{m1}}$ .

### Численная реализация

Для решения системы (4) применим метод расщепления по физическим процессам. Рассмотрим упругий режим напряженно-деформированного состояния с переменным модулем сдвига среды, зависящим от текущего размера трещины  $c$ ,  $\bar{\mu} = \frac{\mu}{1 + \left(\frac{c}{c_a}\right)^3}$ , и разобьем (4) на две системы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho s_{xx})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u s_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v s_{xx})}{\partial r} &= \frac{2\mu}{1 + \left(\frac{c}{c_a}\right)^3} \frac{\rho}{3} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial r} - \nu \frac{v}{r}\right) + s_{xr} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x}\right); \\ \frac{\partial(\rho s_{rr})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u s_{rr})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v s_{rr})}{\partial r} &= \frac{2\mu}{1 + \left(\frac{c}{c_a}\right)^3} \frac{\rho}{3} \left(2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{v}{r}\right) - s_{xr} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x}\right); \\ \frac{\partial(\rho s_{xr})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u s_{xr})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v s_{xr})}{\partial r} &= \frac{\mu \rho}{1 + \left(\frac{c}{c_a}\right)^3} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{(s_{rr} - s_{xx}) \rho}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x}\right); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho s_{xx}}{\partial t} &= \frac{\rho \left[ - \sum_{k=1}^5 \frac{s_{xx}^k}{\tau^k} - 3 \left(\frac{c}{c_a}\right)^2 \frac{\dot{c}}{c_a} s_{xx} \right]}{1 + \left(\frac{c}{c_a}\right)^3}; \\ \frac{\partial \rho s_{rr}}{\partial t} &= \frac{\rho \left[ - \sum_{k=1}^5 \frac{s_{rr}^k}{\tau^k} - 3 \left(\frac{c}{c_a}\right)^2 \frac{\dot{c}}{c_a} s_{rr} \right]}{1 + \left(\frac{c}{c_a}\right)^3}; \\ \frac{\partial \rho s_{xr}}{\partial t} &= \frac{\rho \left[ - \sum_{k=1}^5 \frac{s_{xr}^k}{\tau^k} - 3 \left(\frac{c}{c_a}\right)^2 \frac{\dot{c}}{c_a} s_{xr} \right]}{1 + \left(\frac{c}{c_a}\right)^3}. \end{aligned} \quad (7)$$

К обеим частям первого и второго уравнений системы (6) прибавим выражение  $-\frac{\partial(\rho p)}{\partial t}$  и преобразуем правые части с учетом двучленного уравнения состояния:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(-p + s_{xx})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u s_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v s_{xx})}{\partial r} &= \frac{2\mu \rho}{3} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial r} - \nu \frac{v}{r}\right) + s_{xr} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \\ &- \rho \left[ \frac{\rho_0 c_0^2 \gamma + p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\gamma - 1) \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(-p + s_{rr})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u s_{rr})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v s_{rr})}{\partial r} &= \frac{2\mu\rho}{3} \left( 2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{v}{r} \right) - s_{xr} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \quad (8) \\ &- \rho \left[ \frac{\rho_0 c_0^2 \gamma + p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\gamma - 1) \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right]; \\ \frac{\partial (\rho s_{xr})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u s_{xr})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v s_{xr})}{\partial r} &= \mu \rho \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{(s_{rr} - s_{xx}) \rho}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

*Первый этап вычислений.* На первом этапе численно решаем объединенную систему (1), (8), учитывая подвижность сеток, отслеживающих выделенные особенности течения.

Разностные уравнения для численного интегрирования объединенной системы (1), (8) по времени на регулярной четырехугольной неортогональной подвижной сетке имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (\rho\Omega)^B &= (\rho\Omega)_H + \Delta t \sum_{j=1}^4 D_1^j; \quad (\rho u \Omega)^B = (\rho u \Omega)_H + \Delta t \sum_{j=1}^4 D_2^j; \\ (\rho v \Omega)^B &= (\rho v \Omega)_H + \Delta t \left[ \sum_{j=1}^4 D_3^j + \Omega \left( -\frac{\Delta(p - s_{rr})}{\Delta r} + \nu \frac{s_{xx}^H + 2s_{rr}^H}{\bar{r}\nu} \right) \right]; \\ \left( \rho \Omega \left( \varepsilon + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right)^B &= \left( \rho \Omega \left( \varepsilon + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right)_H + \Delta t \sum_{j=1}^4 D_4^j; \\ (\rho(s_{xx}^1 - p)\Omega)^B &= (\rho(s_{xx} - p)\Omega)_H + \Delta t \sum_{j=1}^4 D_5^j + \quad (9) \\ &+ \Delta t \Omega \rho_H \left[ \frac{4}{3} \mu \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{2}{3} \mu \frac{\Delta v}{\Delta r} - \frac{2}{3} \nu \mu \frac{v_H}{\bar{r}} + s_{xr}^H \left( \frac{\Delta u}{\Delta r} - \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) - \frac{\Delta \rho p}{\Delta t} \right]; \\ (\rho(s_{rr}^1 - p)\Omega)^B &= (\rho(s_{rr} - p)\Omega)_H + \Delta t \sum_{j=1}^4 D_6^j + \\ &+ \Delta t \Omega \rho_H \left[ \frac{4}{3} \mu \frac{\Delta v}{\Delta r} - \frac{2}{3} \mu \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{2}{3} \nu \mu \frac{v_H}{\bar{r}} - s_{xr}^H \left( \frac{\Delta u}{\Delta r} - \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) - \frac{\Delta \rho p}{\Delta t} \right]; \\ (\rho(s_{xr}^1)\Omega)^B &= (\rho(s_{xr})\Omega)_H + \Delta t \sum_{j=1}^4 D_7^j + \\ &+ \Delta t \Omega \rho_H \left[ \mu \left( \frac{\Delta u}{\Delta r} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) + \frac{s_{rr}^H - s_{xx}^H}{2} \left( \frac{\Delta u}{\Delta r} - \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \right]. \end{aligned}$$

Искомые величины  $\rho, u, v, \varepsilon, p, s_{xx}, s_{rr}, s_{xr}$  относятся к центрам ячеек. Индекс "в" показывает, что значение величины относится к временному слою  $t = t + \Delta t$  ( $\Delta t$  — шаг по времени), индекс "н" — к временному слою  $t$ ; дополнительный индекс 1 в обозначениях для составляющих девиатора тензора полных напряжений указывает на то, что эти величины будут пересчитываться на втором этапе вычислений.  $\frac{\Delta(p - s_{rr})}{\Delta r}, \frac{\Delta u}{\Delta x}, \frac{\Delta u}{\Delta r}, \frac{\Delta v}{\Delta x}, \frac{\Delta v}{\Delta r}$  — разностные аналоги производных  $\frac{\partial(p - s_{rr})}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial r}$  в центре ячейки с нижнего слоя по времени;  $\frac{\Delta \rho p}{\Delta t} = \frac{(\rho^B - \rho_H)(p_0 \gamma_H + 2p_H)}{\Delta t \rho_H} - \frac{(\varepsilon^B - \varepsilon_H) \rho_H (\gamma_H - 1)}{\Delta t}$ .  $\Omega, \bar{r}, s_{xx}^H, s_{rr}^H, p_0$  — соответственно значения объема, радиуса, составляющих девиатора тензора полных напряжений, константы двучленного уравнения состояния в центре ячейки с нижнего слоя по времени. Суммирование производится по четырем граням ячейки разностной сетки. Значения потоковых величин  $D_i$  на гранях определяются по значениям *больших* величин [11] (индекс  $j$  номера грани опущен):

$$\begin{aligned}
 D_1 &= -R(U_n - W_z)S_g; & D_2 &= -[R(U_n - W_z)U + \alpha P]S_g + (\alpha S_{xx} + \beta S_{xr})S_g; \\
 D_3 &= -R(U_n - W_z)VS_g + \alpha S_{xr}S_g; \\
 D_4 &= -\{R(U_n - W_z)[\varepsilon + 0,5(U_n^2 + V_t^2)] + PU_n\}S_g + (S_{xx}U_n + S_{xr}V_t)S_g; \\
 D_5 &= -R(U_n - W_z)S_{xx}S_g; & D_6 &= -R(U_n - W_z)S_{rr}S_g; & D_7 &= -R(U_n - W_z)S_{xr}S_g,
 \end{aligned}$$

где  $S_g$  — площадь грани;  $\alpha, \beta$  — направляющие косинусы единичного вектора внешней нормали к грани;  $W_z$  — нормальная составляющая вектора скорости грани;  $U_n, V_t$  — нормальная и касательная к грани составляющие вектора скорости вещества, вычисленные по значениям  $U, V$ .

Значения больших величин  $R, U, V, \varepsilon, P, S_{xx}, S_{rr}, S_{xr}$ , участвующих в определении потоков  $D_i$ , вычисляются из решения соответствующей задачи о распаде произвольного разрыва в гидроупругой среде [13]. Для формулировки этой задачи на грани строится локальная система координат [11]. Отметим, что постановка и построение решения задачи основаны на линеаризованном представлении объединенной системы дифференциальных уравнений (1), (8), что справедливо при отсутствии сильных разрывов в рассматриваемом течении.

*Второй этап вычислений.* Для модели вязкоупругой среды с кинетикой образования трещин на втором этапе проинтегрируем соотношения (7) по произвольной ячейке и применим явную по времени схему аппроксимации:

$$\begin{aligned}
 (\rho s_{xx}\Omega)^B &= (\rho\Omega)^H s_{xx}^{1,B} - \Delta t\Omega\rho^H \sum_{k=1}^5 \frac{s_{xx}^{k,H}}{\tau^k} + \Delta t\Omega \frac{-3\rho^H \left(\frac{c^H}{c_a}\right)^2 \frac{1}{c_a} \left(\frac{dc}{dt}\right)^H}{1 + \left(\frac{c^H}{c_a}\right)^3} s_{xx}^H; \\
 (\rho s_{rr}\Omega)^B &= (\rho\Omega)^H s_{rr}^{1,B} - \Delta t\Omega\rho^H \sum_{k=1}^5 \frac{s_{rr}^{k,H}}{\tau^k} + \Delta t\Omega \frac{-3\rho^H \left(\frac{c^H}{c_a}\right)^2 \frac{1}{c_a} \left(\frac{dc}{dt}\right)^H}{1 + \left(\frac{c^H}{c_a}\right)^3} s_{rr}^H; \\
 (\rho s_{xr}\Omega)^B &= (\rho\Omega)^H s_{xr}^{1,B} - \Delta t\Omega\rho^H \sum_{k=1}^5 \frac{s_{xr}^{k,H}}{\tau^k} + \Delta t\Omega \frac{-3\rho^H \left(\frac{c^H}{c_a}\right)^2 \frac{1}{c_a} \left(\frac{dc}{dt}\right)^H}{1 + \left(\frac{c^H}{c_a}\right)^3} s_{xr}^H.
 \end{aligned}$$

Проинтегрируем систему (3), описывающую скорость изменения дивергента тензора напряжений  $k$ -го элемента Максвелла. Построим разностный аналог условия  $s_{ij} = \sum_{k=1}^5 s_{ij}^{(k)}$ , применяя для системы (3) ту же схему расщепления по физическим процессам, что и для соотношений (4). Рассмотрим упругий режим напряженно-деформированного состояния, разобьем (3) на две системы:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho s_{xx}^k}{\partial t} + \frac{\partial (\rho s_{xx}^k)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v s_{xx}^k)}{\partial r} &= \frac{2\mu^k \rho}{3} \left( 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial r} - \nu \frac{v}{r} \right) + s_{xr}^k \rho \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} \right); \\
 \frac{\partial \rho s_{rr}^k}{\partial t} + \frac{\partial (\rho s_{rr}^k)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v s_{rr}^k)}{\partial r} &= \frac{2\mu^k \rho}{3} \left( 2\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{v}{r} \right) - s_{xr}^k \rho \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} \right); \\
 \frac{\partial \rho s_{xr}^k}{\partial t} + \frac{\partial (\rho s_{xr}^k)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v s_{xr}^k)}{\partial r} &= \mu^k \rho \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{(s_{rr}^k - s_{xx}^k) \rho}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} \right);
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho s_{xx}^k}{\partial t} &= -\rho \frac{s_{xx}^k}{\tau^k} - \rho \frac{\mu^k}{\mu} \left[ 3 \left( \frac{c}{c_a} \right)^2 \frac{\dot{c}}{c_a} s_{xx} + \left( \frac{c}{c_a} \right)^3 \dot{s}_{xx} \right]; \\
 \frac{\partial \rho s_{rr}^k}{\partial t} &= -\rho \frac{s_{rr}^k}{\tau^k} - \rho \frac{\mu^k}{\mu} \left[ 3 \left( \frac{c}{c_a} \right)^2 \frac{\dot{c}}{c_a} s_{rr} + \left( \frac{c}{c_a} \right)^3 \dot{s}_{rr} \right]; \\
 \frac{\partial \rho s_{xr}^k}{\partial t} &= -\rho \frac{s_{xr}^k}{\tau^k} - \rho \frac{\mu^k}{\mu} \left[ 3 \left( \frac{c}{c_a} \right)^2 \frac{\dot{c}}{c_a} s_{xr} + \left( \frac{c}{c_a} \right)^3 \dot{s}_{xr} \right].
 \end{aligned} \tag{11}$$

Система (10) будет идентична системе (6), если в (10) значения составляющей девиатора тензора напряжений одного элемента  $s_{ij}^k$  и модуля сдвига  $\mu^k$  заменить на значения составляющей девиатора тензора полных напряжений  $s_{ij}$  и модуля сдвига  $\frac{\mu}{1 + \left(\frac{c}{c_a}\right)^3}$ . Разностный аналог системы (10)

строится методом Годунова по аналогии с разностным аналогом системы (8):

$$\begin{aligned}
 \rho^H s_{xx}^{k\ 1,B} \Omega^B &= \rho^H s_{xx}^{k,H} \Omega^H + \Delta t \sum_{j=1}^4 D_5^j + \Delta t \Omega \rho^H \left[ \frac{4}{3} \mu^k \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{2}{3} \mu^k \frac{\Delta v}{\Delta r} - \frac{2}{3} \nu \mu^k \frac{v^H}{\bar{r}} + s_{xr}^{k,H} \left( \frac{\Delta u}{\Delta r} - \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \right]; \\
 \rho^H s_{rr}^{k\ 1,B} \Omega^B &= \rho^H s_{rr}^{k,H} \Omega^H + \Delta t \sum_{j=1}^4 D_6^j + \Delta t \Omega \rho^H \left[ \frac{4}{3} \mu^k \frac{\Delta v}{\Delta r} - \frac{2}{3} \mu^k \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{2}{3} \nu \mu^k \frac{v^H}{\bar{r}} - s_{xr}^{k,H} \left( \frac{\Delta u}{\Delta r} - \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \right]; \\
 \rho^H s_{xr}^{k\ 1,B} \Omega^B &= \rho^H s_{xr}^{k,H} \Omega^H + \Delta t \sum_{j=1}^4 D_7^j + \Delta t \Omega \rho^H \left[ \mu^k \left( \frac{\Delta u}{\Delta r} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) + \frac{s_{rr}^H - s_{xx}^H}{2} \left( \frac{\Delta u}{\Delta r} - \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Здесь индекс  $k$  задает номер элемента Максвелла;  $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ ,  $\frac{\Delta u}{\Delta r}$ ,  $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ ,  $\frac{\Delta v}{\Delta r}$  и дополнительный индекс 1 имеют тот же смысл, что в уравнениях (9). Значения потоковых величин на гранях  $D_i$  определяются по значениям больших величин (индекс номера грани опущен):

$$D_5 = -R(U_n - W_z) S_{xx}^k S_g; \quad D_6 = -R(U_n - W_z) S_{rr}^k S_g; \quad D_7 = -R(U_n - W_z) S_{xr}^k S_g.$$

Значения  $R$ ,  $U_n$ ,  $S_{xx}^k$ ,  $S_{xr}^k$ ,  $S_{rr}^k$ , участвующие в определении потоков  $D_i$ , вычисляются из решения той же самой задачи о распаде произвольного разрыва в гидроупругой среде [13], что и для объединенной системы (1), (8).

*Третий этап вычислений.* На последнем, третьем этапе вычислений проинтегрируем соотношение (11) по произвольной ячейке и применим явную по времени схему аппроксимации. Получим

$$\begin{aligned}
 (\rho s_{xx}^k \Omega)^B &= \rho^H s_{xx}^{k\ 1,B} \Omega^H - \Delta t \Omega \rho^H \left\{ \frac{s_{xx}^{k,H}}{\tau^k} + \frac{\mu^{k,H}}{\mu^H} \left[ 3 \left( \frac{c^H}{c_a} \right)^2 \frac{1}{c_a} \left( \frac{dc}{dt} \right)^H s_{xx}^H + \left( \frac{c^H}{c_a} \right)^3 \frac{s_{xx}^B - s_{xx}^H}{\Delta t} \right] \right\}; \\
 (\rho s_{rr}^k \Omega)^B &= \rho^H s_{rr}^{k\ 1,B} \Omega^H - \Delta t \Omega \rho^H \left\{ \frac{s_{rr}^{k,H}}{\tau^k} + \frac{\mu^{k,H}}{\mu^H} \left[ 3 \left( \frac{c^H}{c_a} \right)^2 \frac{1}{c_a} \left( \frac{dc}{dt} \right)^H s_{rr}^H + \left( \frac{c^H}{c_a} \right)^3 \frac{s_{rr}^B - s_{rr}^H}{\Delta t} \right] \right\}; \\
 (\rho s_{xr}^k \Omega)^B &= \rho^H s_{xr}^{k\ 1,B} \Omega^H - \Delta t \Omega \rho^H \left\{ \frac{s_{xr}^{k,H}}{\tau^k} + \frac{\mu^{k,H}}{\mu^H} \left[ 3 \left( \frac{c^H}{c_a} \right)^2 \frac{1}{c_a} \left( \frac{dc}{dt} \right)^H s_{xr}^H + \left( \frac{c^H}{c_a} \right)^3 \frac{s_{xr}^B - s_{xr}^H}{\Delta t} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Проинтегрируем выражение для скорости роста трещин (5):

$$c^B = c^H + \Delta t \left( \frac{dc}{dt} \right)^H.$$

Таким образом, получено решение на новый момент времени.

### Результаты численных расчетов

**Задача 1.** Исследование влияния размера счетной ячейки на численное решение проведем на примере моделирования одного эксперимента из работы [14]. Упрощенная схема опыта представлена на рис. 1 (все размеры указаны в сантиметрах). Стальной сферический ударник, летящий со скоростью 37,2 м/с, нагружает цилиндрический образец исследуемого ВВ.

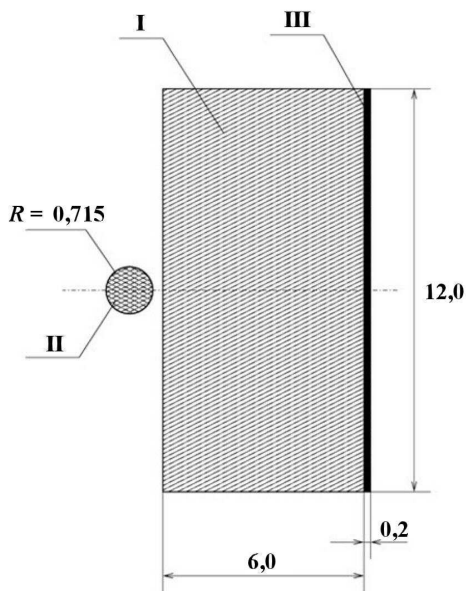


Рис. 1. Начальная геометрия опыта из [14]: I — исследуемое ВВ цилиндрической формы; II — стальной сферический ударник; III — стальная пластина

Для описания стали используем трехчленное уравнение состояния с параметрами  $\rho_0 = 7,85 \text{ г/см}^3$ ,  $c_0 = 4,625 \text{ км/с}$ ,  $\Gamma = 1,67$ ,  $n = 5$ , которое локально аппроксимируется двучленным уравнением состояния [11], и модель идеальной упругопластической среды с параметрами  $G_0 = 86,6 \text{ ГПа}$ ,  $Y_0 = 0,35 \text{ ГПа}$ . Для описания реакции ВВ на механические нагрузки применяем параметры вязкоупругой модели ВВ РВХ 9501 из работ [2–4].

Уравнения движения сред интегрируются в подвижных сетках с выделением в ходе расчетов контактных поверхностей и свободных границ. Рассматривается только верхняя половина конструкции до оси симметрии.

На рис. 2, 3 (см. также цветную вкладку) приведены профили распределения давления и продольной составляющей скорости  $U$  вдоль прямой, параллельной оси симметрии и отстоящей от нее на расстоянии  $r = 0,03$ , полученные в четырех расчетах на сгущающихся сетках, на момент времени  $t = 20$  от момента удара\*. Как видно из анализа профилей, дальнейшее уменьшение размера ячейки не вызовет существенных изменений в решении.

Уравнения движения сред интегрируются в подвижных сетках с выделением в ходе расчетов контактных поверхностей и свободных границ. Рассматривается только верхняя половина конструкции до оси симметрии.

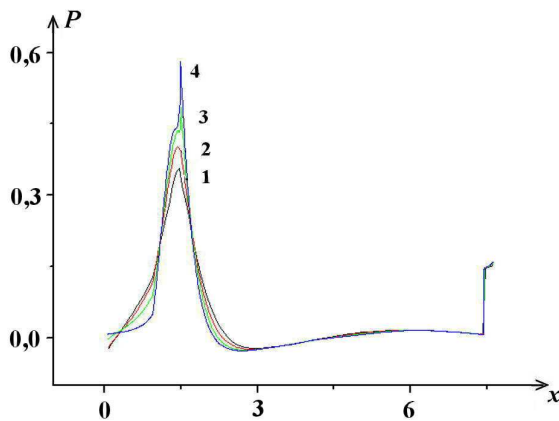


Рис. 2. Задача 1. Профили давления, полученные в расчетах ( $t = 20$ ;  $y = 0,03$ ) на сетках с уменьшающимся линейным размером ячейки: 1 —  $h = 0,05$ ; 2 —  $h = 0,025$ ; 3 —  $h = 0,0125$ ; 4 —  $h = 0,00625$

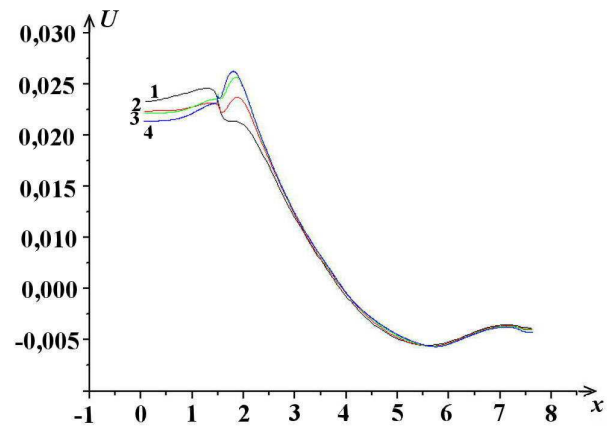


Рис. 3. Задача 1. Профили составляющей скорости  $U$ , полученные в расчетах ( $t = 20$ ;  $y = 0,03$ ) на сетках с уменьшающимся линейным размером ячейки: 1 —  $h = 0,05$ , 2 —  $h = 0,025$ ; 3 —  $h = 0,0125$ ; 4 —  $h = 0,00625$

**Задача 2.** Постановка задачи соответствует экспериментам с ССГ. Упрощенная схема опытов представлена на рис. 4. Радиусы цилиндров:  $R_1 = 0,3175$ ,  $R_2 = 0,47$ ; линейные размеры конст-рук-

\*Здесь и всюду далее в тексте и на рисунках указание величин и их значений без единиц измерения подразумевает условные единицы измерения.



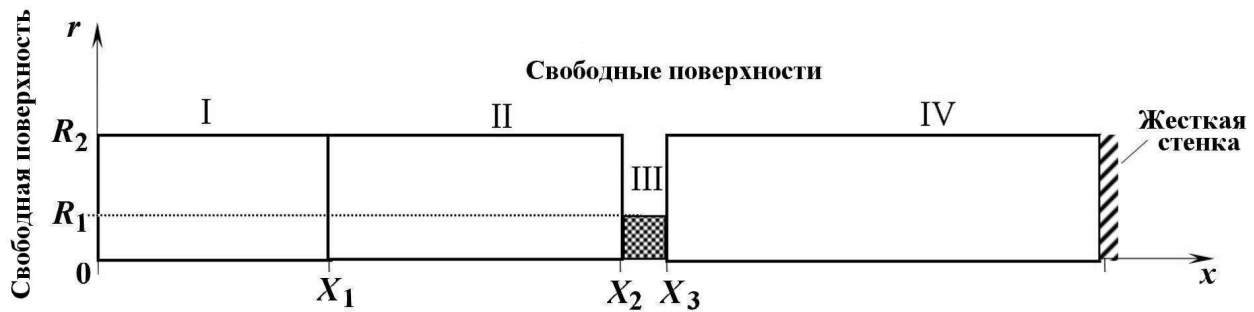


Рис. 4. Начальная геометрия опытов с ССГ: I — ударная болванка; II — нагружающий стержень; III — исследуемое ВВ цилиндрической формы; IV — опорный стержень

ции:  $X_1 = 20$ ,  $X_2 = 75$ ,  $X_3 = 75,635$ ,  $X_4 = 225,635$ . В начальный момент времени задается скорость ударной болванки  $U = 10$ , остальные области неподвижны.

Для описания ударной болванки, нагружающего и опорного стержней, выполненных из титанового сплава, используем трехчленное уравнение состояния с параметрами  $\rho_0 = 4,39 \text{ г/см}^3$ ,  $c_0 = 4,9 \text{ км/с}$ ,  $\gamma = 2,2$ ,  $n = 3$ , которое локально аппроксимируется двучленным уравнением состояния [11], и модель идеальной упругопластической среды с параметрами  $G_0 = 43,12 \text{ ГПа}$ ,  $Y_0 = 1,0 \text{ ГПа}$ . Для описания реакции ВВ на механические нагрузки применяем параметры вязкоупругой модели ВВ PVX 9501 из работ [2–4].

Уравнения движения сред интегрируются в подвижных сетках с выделением в ходе расчетов контактных поверхностей и свободных границ. На оси симметрии в образце ВВ (область III) установлен датчик в начальной точке  $(X_2, 0)$ , накапливающий временную зависимость напряжений.

На рис. 5 (см. также цветную вкладку) приведены показания датчика напряжений для трех сеток. В окрестности исследуемого образца ВВ для сетки 1  $h_x = 0,04$ ,  $h_r = 0,0235$ ; для сетки 2  $h_x = 0,04$ ,  $h_r = 0,01$ ; для сетки 3  $h_x = 0,005$ ,  $h_r = 0,005$ . Размеры ячейки в самом образце ВВ одинаковы для сеток 1 и 2 и составляют  $h_x = 0,01$ ,  $h_r = 0,01$ , а для сетки 3 в образце ВВ  $h_x = 0,005$ ,  $h_r = 0,005$ . На том же рисунке представлены результаты, полученные на сетке 1 с использованием расчетной модели из работы [8]. В основу расчетной модели [8], в отличие от рассматриваемой в данной статье, положен метод расщепления на гидродинамический и упругопластический этапы. На каждом этапе для решения соответствующих систем дифференциальных уравнений используется метод Годунова.

Сравнение кривых 1, 2 и 3 показывает заметную зависимость решения от шага сетки в продольном направлении, что связано с практически одномерным течением, реализуемым в численном расчете. Сравнение кривых 1 и 4 показывает, что расчетная модель [8] занижает абсолютную величину напряжения по сравнению с представляемой расчетной моделью примерно на 20 %.

**Задача 3.** Для калибровки параметров вязкоупругой модели с трещинообразованием можно использовать постановки экспериментов и данные, полученные в опытах с ССГ, из работы [1]. На рис. 6–8 (см. также цветную вкладку) приведены временные зависимости проходящих импульсов нагрузки в нагружающем и опорном стержнях, зарегистрированные в трех экспериментах [1], и пробные результаты трех расчетов по представленной методике, проведенных на сетке 2 из предыдущей задачи. Расчетные и экспериментальные кривые хорошо согласуются, однако наборы параметров вязкоупругой модели подобраны отдельно для каждого эксперимента и различны между собой.

На основе сравнения экспериментальных данных и расчетов можно сделать вывод о том, что предлагаемая расчетная модель правильно описывает поведение ВВ в области низкоскоростного нагружения. В дальнейшем будет проведена многопараметрическая оптимизация по результатам сравнения с экспериментами [1] для выбора единого набора параметров вязкоупругой модели с трещинообразованием в рассматриваемом классе задач.

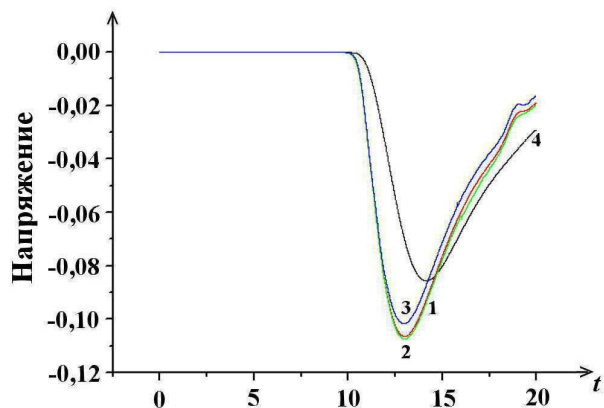


Рис. 5. Задача 2. Расчетные показания датчика напряжений от времени: 1, 2, 3 — расчеты на сетках 1, 2, 3; 4 — расчет по методике [8] на сетке 1

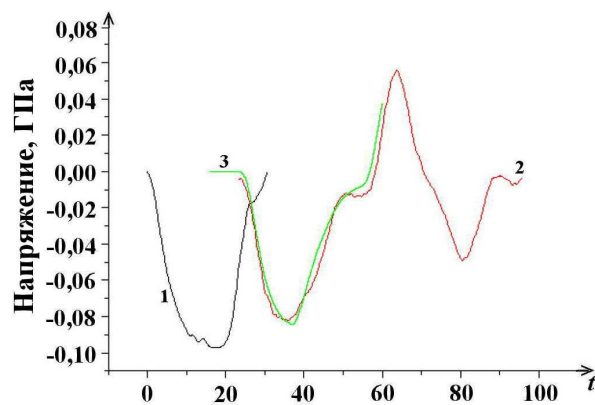


Рис. 6. Задача 3. Временные зависимости напряжений в первом опыте: 1 — экспериментальные показания датчика в опорном стержне; 2 — экспериментальные показания датчика в нагружающем стержне; 3 — расчетные показания датчика в нагружающем стержне

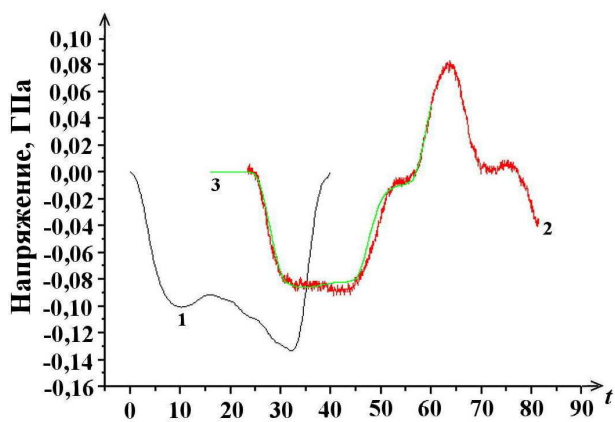


Рис. 7. Задача 3. Временные зависимости напряжений во втором опыте: 1 — экспериментальные показания датчика в опорном стержне; 2 — экспериментальные показания датчика в нагружающем стержне; 3 — расчетные показания датчика в нагружающем стержне

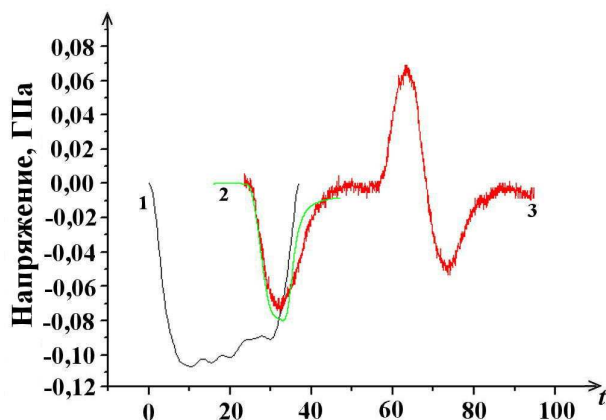


Рис. 8. Задача 3. Временные зависимости напряжений в третьем опыте: 1 — экспериментальные показания датчика в опорном стержне; 2 — экспериментальные показания датчика в нагружающем стержне; 3 — расчетные показания датчика в нагружающем стержне

### Заключение

Представлена расчетная модель реакции ВВ на основе октогена на низкоскоростные нагрузки, основанная на разностной схеме Годунова. Применимость построенного алгоритма продемонстрирована на результатах численного моделирования опытов по соударению стального шарика с цилиндрическим образцом ВВ и опытов с деформированием образца ВВ на установке с ССГ.

## Список литературы

1. *Абакумов А. И., Большаков А. П., Гушанов А. Р., Карпенко И. И., Сниццын В. В.* Расчетно-экспериментальное исследование деформирования энергетических материалов в условиях низкоскоростного нагружения в опытах с составными стержнями Гопкинсона // Вопросы материаловедения. 2008. № 1(53). С. 184–196.
2. *Dienes J. K., Kershner J. D.* Multiple-shock initiation via statistical crack mechanism // XI Int. Symp. on Detonation. Snowmass, Colorado, 1998. P. 717–724.
3. *Dey T. N., Kamt J. R.* Numerical modeling of shear band formation in PBX-9501 // Ibid. P. 540–541.
4. *Clancy S. P., Jonson J. N., Burkett M. W.* Modelling the viscoelastic and brittle fracture response of a high-explosive in a Eulerian hydrocode // Ibid. P. 3–10.
5. *Robert M. Hackett, Joel G. Bennett.* An implicit finite element material model for energetic particulate composite materials // Int. J. Meth. Eng. 2000. No 49. С. 1191–1209.
6. *Абросимов Н. А., Куликова Н. А.* Определение параметров моделей вязкоупругого деформирования композитных цилиндрических оболочек при ударном нагружении // Проблемы прочности и пластичности. 2009. № 71. С. 61–70.
7. *Абросимов Н. А., Куликова Н. А.* Идентификация параметров моделей вязкоупругого деформирования композитных материалов на основе анализа импульсного нагружения оболочек вращения // Механика твердого тела. 2011. № 3. С. 42–57.
8. *Седов С. Ю., Величко О. М., Денисова О. В., Кривонос А. С., Вялых А. М.* Расчеты на основе вязкоупругой модели критериев начала взрыва при низкоскоростном воздействии на взрывчатый состав на основе октогена // Тр. межд. конф. "XV Харитоновские науч. чтения". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013. С. 246–253.
9. *Седов С. Ю., Мицура М. Н.* Критерий начала взрыва при низкоскоростном воздействии на взрывчатые составы на основе октогена // Тез. докл. межд. конф. "XII Забабахинские науч. чтения". Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2014. С. 116.
10. *Седов С. Ю., Мицура М. Н.* Динамический масштабный эффект при низкоскоростных взрывчатых превращениях // Тр. межд. конф. "XVII Харитоновские науч. чтения". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2015. С. 157–162.
11. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
12. *Годунов С. К.* Элементы механики сплошных сред. М.: Наука, 1978.
13. *Абузьяров М. Х., Баженов В. Г., Котов В. Л., Кочетков А. В., Крылов С. В., Фельдгун В. Р.* Метод распада разрывов в динамике упругопластических сред // Журнал вычислит. мат. и мат. физ. 2000. Т. 40, № 6. С. 940–953.
14. *Белов Г. В., Базаров Ю. Б., Дякин Е. П., Екимчев С. Н., Жиёмбетов А. К., Зималин В. С.* Влияние скорости удара на параметры взрыва образцов флегматизированного октогена // Тр. межд. науч. конф. "XI Харитоновские науч. чтения. Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2009. С. 51–55.

Статья поступила в редакцию 06.06.17.

NUMERICAL SIMULATION OF THE DEFORMATION OF AN OCTOGENE-BASED EXPLOSIVE UNDER LOW-VELOCITY LOADING CONDITIONS USING GODUNOV'S METHOD / O. M. Velichko (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region).

The paper presents a viscoelastic model of medium with the kinetics of fracturing due to shear stresses, which has been implemented using Godunov's method. The algorithm is based on the coupled method of solving the differential equations of hydroelasticity and Riemann problem in a hydroelastic environment.

The paper also presents results of the computational model application to solve the problem of a steel ball colliding with a cylindrical sample of lazy octogene and the problem of deforming an explosive in experiments with Hopkinson's compound rods.

*Keywords:* explosive, deformation and rupture, viscoelastic model with fractures, Godunov's method, numerical simulation.

---