

УДК 519.6+533.6

ИСКУССТВЕННАЯ ВЯЗКОСТЬ ДЛЯ ПОДАВЛЕНИЯ ЧИСЛЕННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТИПА "КАРБУНКУЛ" В РАСЧЕТАХ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ

А. В. Родионов
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Приводится обобщение метода искусственной вязкости для подавления "карбункул"-неустойчивости на случай моделирования трехмерных задач. Рассматриваются схемы первого порядка точности (Годунова, Роу, схемы HLLC, AUSM⁺ и схема Сафронова) применительно к расчетам трехмерных задач на гладких структурированных сетках. Эффективность метода демонстрируется примерами решения известных тестовых задач.

Ключевые слова: гиперзвуковые течения, уравнения Эйлера и Навье—Стокса, численная неустойчивость, искусственная вязкость, расчеты трехмерных задач.

Введение

Феномен "карбункула" (также известный как ударно-волновая неустойчивость) остается одной из наиболее серьезных вычислительных проблем с тех пор, как он был впервые замечен и идентифицирован [1, 2]. В работах [3, 4] был опробован новый подход к решению проблемы. Он заключается в том, что в базовый метод решения уравнений Эйлера добавляется некоторое количество диссипации в форме правых частей уравнений Навье—Стокса; при этом коэффициент молекулярной вязкости заменяется коэффициентом искусственной вязкости. В последующих работах [5, 6] эта методика подавления ударно-волновой неустойчивости получила свое развитие: модель искусственной вязкости была скорректирована и настроена на случай применения схем первого порядка аппроксимации к моделированию двумерных течений. Эффективность данного подхода была продемонстрирована многочисленными примерами решения известных тестовых задач. В данной статье предложенная в [5, 6] модель искусственной вязкости распространяется на случай решения трехмерных задач.

Модель искусственной вязкости

Выбранная в [5, 6] формула для коэффициента искусственной вязкости записывается следующим образом:

$$\mu_{AV} = \begin{cases} C_{AV} \rho h^2 \sqrt{(\nabla \cdot \vec{u})^2 - (C_{th} a/h)^2}, & \text{если } \nabla \cdot \vec{u} < -C_{th} a/h; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (1)$$

где \vec{u} — вектор скорости; ρ — плотность; a — скорость звука; h — характерный размер ячейки; C_{AV} — безразмерный параметр; C_{th} — коэффициент пороговой интенсивности сжатия, ограничивающей действие искусственной вязкости только фронтом ударной волны (было выбрано $C_{th} = 0,05$).

В дополнение к искусственной вязкости предлагаемый подход подразумевает учет искусственной теплопроводности, которая рассчитывается через коэффициент

$$\lambda_{AV} = \frac{\mu_{AV} C_P}{Pr}, \quad (2)$$

где C_P — удельная теплоемкость при постоянном давлении; Pr — число Прандтля, полагаемое равным $3/4$.

Коэффициенты искусственной вязкости и теплопроводности первоначально вычисляются в центрах ячеек, причем дивергенция вектора скорости вычисляется по теореме Гаусса—Остроградского. В случае использования достаточно гладкой структурированной сетки значения коэффициентов на боковых гранях ячеек находятся при помощи простой линейной интерполяции вида $f_{i+1/2,j} = 0,5(f_{i,j} + f_{i+1,j})$.

Как было установлено в [5, 6], при использовании схем первого порядка аппроксимации, таких как схема Годунова [7], схема Роу [8] и схема HLLC [9], значение $C_{AV} = 0,6$ обеспечивает подавление ударно-волновой неустойчивости во всех рассмотренных тестовых задачах. При этом характерный размер ячейки следует вычислять как

$$h = \frac{\max(d_1, d_2)}{\sqrt{2}}, \quad (3)$$

где d_1 и d_2 — длины диагоналей ячейки. Для прямоугольных ячеек в декартовых координатах это выражение сводится к $h = \sqrt{(h_x^2 + h_y^2)}/2$.

Обобщение на случай трехмерных расчетов

Рассмотрим задачу типа задачи Кёрка, которая была использована в [5, 6] для тестирования и настройки метода искусственной вязкости применительно к расчетам двумерных задач. Она обобщается на трехмерный случай простым способом: добавляется координатное направление z с сеточным разбиением и граничными условиями, аналогичными тем, что использовались для координатного направления y . В результате получается трехмерная тестовая задача в следующей постановке.

Рассчитывается плоская ударная волна, распространяющаяся вдоль прямоугольного канала (вдоль оси x). Расчетная область $[0, 1600] \times [0, 25] \times [0, 25]$ в пространстве xyz покрывается регулярной сеткой, состоящей из кубических ячеек единичного размера ($h_x = h_y = h_z = 1$); начальное состояние газа (компоненты скорости, плотность и давление) в ячейках следующее: $(u_x, u_y, u_z, \rho, P) = (0, 0, 0, 1, 1)$. На боковых границах расчетной области (вдоль осей y и z) ставится условие периодичности течения. На правой границе расчетной области задается непроницаемая стенка, а слева — втекающий поток с набором параметров $(u_1, 0, 0, \rho_1, P_1)$, которые определяются ударно-волновым числом Маха M_S и показателем адиабаты γ :

$$u_1 = u_S \frac{2(M_S^2 - 1)}{(\gamma + 1)M_S^2}; \quad \rho_1 = \frac{(\gamma + 1)M_S^2}{(\gamma - 1)M_S^2 + 2}; \quad P_1 = \frac{2\gamma M_S^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1},$$

где $u_S = \sqrt{\gamma}M_S$ — скорость распространения ударной волны по неподвижному газу.

В трехмерной тестовой задаче неустойчивость плоской ударной волны инициируется ничтожно малым возмущением продольной координаты x в узлах сетки, расположенных в одном поперечном сечении: $i = 10$. Это возмущение имеет вид $\hat{x}_{10,j,k} = x_{10,j,k} + \delta(2RND_{j,k} - 1)$, где $\delta = 10^{-4}$, $RND_{j,k}$ — случайные числа, генерируемые в интервале $[0, 1]$. Таким образом, ударная волна получает однократное (в момент прохождения сеточной линии $i = 10$) возмущение по всему фронту. Для измерения степени отклонения решения от одномерного потока используется величина

$$\varepsilon_0 = \max_{i,j,k} (|\rho_{i,j,k} - \bar{\rho}_i|), \quad \bar{\rho}_i = \frac{1}{JK} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \rho_{i,j,k}.$$

На рис. 1 (см. также цветную вкладку) приведены данные расчета по схеме Годунова трехмерной тестовой задачи при ударно-волновом числе Маха $M_S = 6$. Показано развитие ударно-волновой неустойчивости в динамике.

На рис. 2, *a* приведены зависимости ε_0 от расстояния, пройденного ударной волной ($x_S = u_S t$), для различных ударно-волновых чисел Маха, а на рис. 2, *б* показана динамика роста возмущений

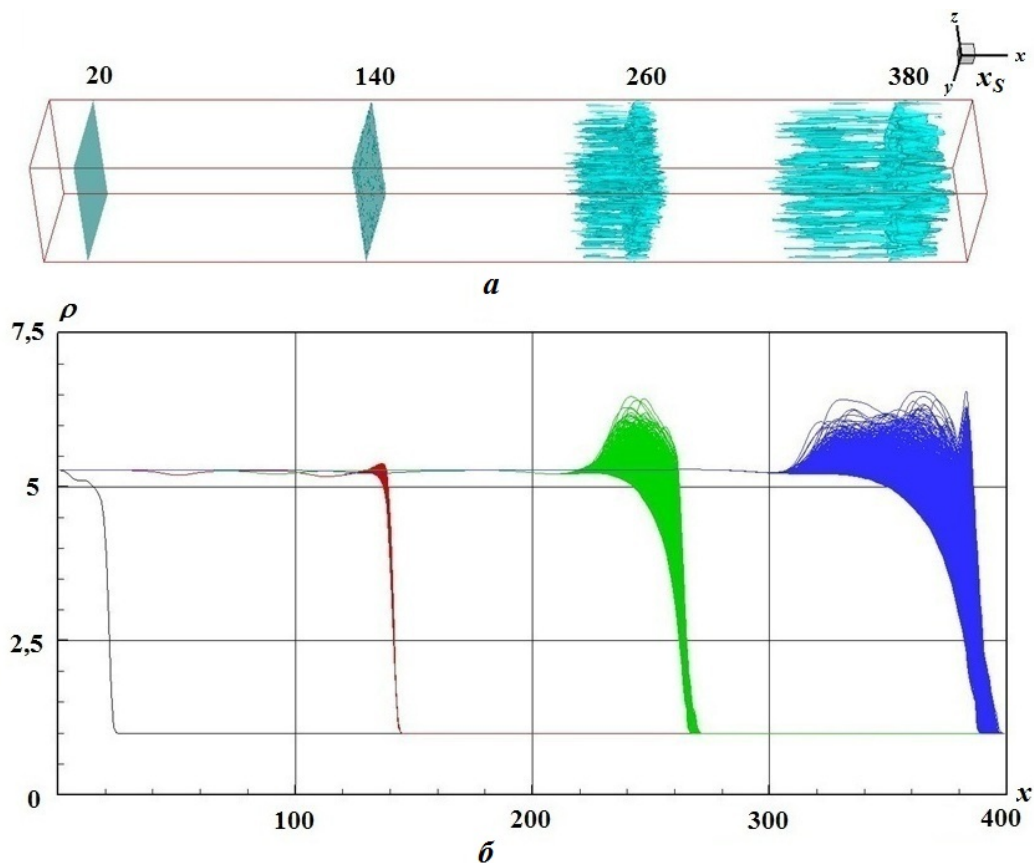


Рис. 1. Данные расчета по схеме Годунова трехмерной тестовой задачи с $M_S = 6$ для четырех моментов времени, соответствующих положению ударной волны $x_S = 20; 140; 260; 380$: a — изоповерхности для трех уровней плотности $\rho = 4,5; 5,5; 6,5$; b — осевые профили плотности для всех продольных линий сетки

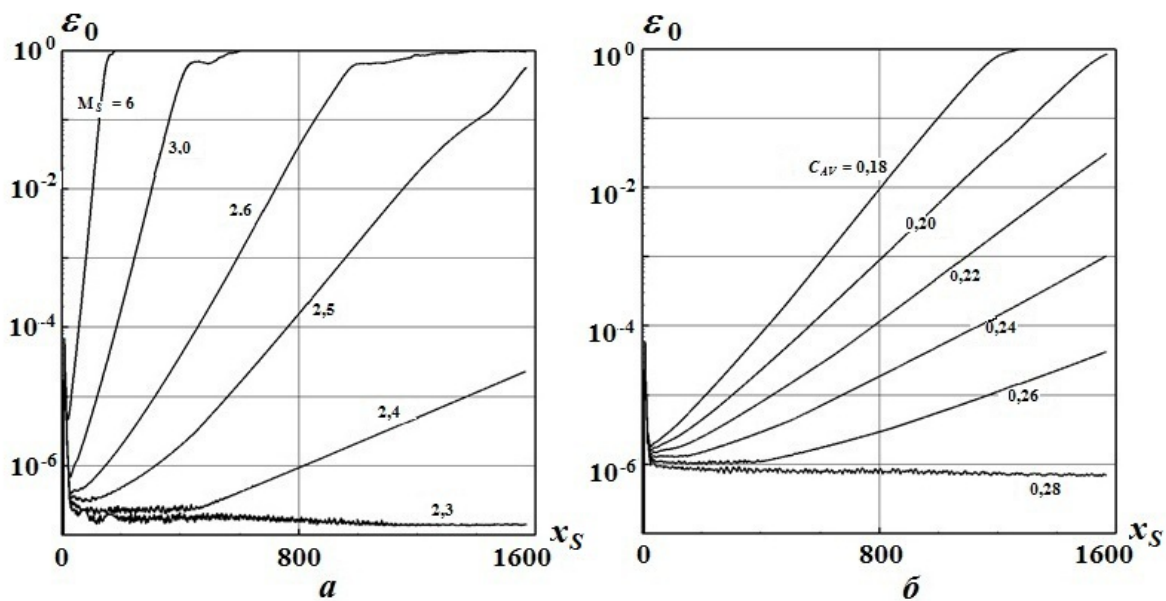


Рис. 2. Развитие неустойчивости в трехмерной тестовой задаче. Расчеты по схеме Годунова: a — без искусственной вязкости (варьируется M_S); b — с искусственной вязкостью ($M_S = 6$, варьируется C_{AV})

для ударной волны с $M_S = 6$ при различных значениях коэффициента C_{AV} . Если сравнить эти результаты с аналогичными данными для двумерного варианта тестовой задачи (см. рис. 3 в [5, 6]), то обнаружится их большое сходство. Действительно, в трехмерном случае пороговое значение ударно-волнового числа Маха составляет $M_S^C \approx 2,3$ против $M_S^C \approx 2,2$ в двумерном случае; минимальное значение C_{AV} , необходимое для подавления неустойчивости ударной волны с $M_S = 6$, составляет $C_{AV}^{\min} \approx 0,28$ в обоих случаях. Отсюда можно заключить, что модель искусственной вязкости, выбранную в [5, 6] для подавления ударно-волновой неустойчивости в двумерных задачах, можно перенести на трехмерный случай с небольшой оговоркой: выражение для характерного размера ячейки должно быть распространено на трехмерный случай, а рекомендованное для использования в расчетах двумерных задач значение $C_{AV} = 0,6$, возможно, следует немного скорректировать.

Чтобы это осуществить, было проведено исследование на различных вариантах тестовой задачи; его результаты представлены в таблице. Во всех случаях поступательная ударная волна при $M_S = 20$ рассчитывалась по схеме Годунова. Рассматривались случаи, когда ячейки сетки являются прямоугольными параллелепипедами (в таблице это сетка типа А), со сдвиговой деформацией ячеек только в направлении y (сетка типа В) или одновременно в направлениях y и z (сетка типа С). Подробное описание способа построения сетки со сдвиговой деформацией ячеек приводится в [5, 6].

Представленные в таблице значения C_{AV}^{\min} (минимальные значения C_{AV} , необходимые для подавления неустойчивости в конкретных вариантах тестовой задачи) даны для двух способов расчета характерного размера ячейки:

$$1) h = d_{\max}^{(S)} \equiv \frac{\max_i (d_i^{(S)})}{\sqrt{2}}; \quad 2) h = d_{\max}^{(V)} \equiv \frac{\max_i (d_i^{(V)})}{\sqrt{3}}, \quad (4)$$

где $d_i^{(S)}$ — длины диагоналей боковых граней ячейки; $d_i^{(V)}$ — длины объемных диагоналей ячейки. Оба варианта согласуются с выражением (3), используемым в расчетах двумерных задач. Заметим, что в случае, когда ячейка является параллелепипедом с реберными векторами \vec{l}_1 , \vec{l}_2 и \vec{l}_3 , выражения (4) можно переписать в виде

$$1) h = d_{\max}^{(S)} = \sqrt{\frac{\max(d_{12}^2, d_{23}^2, d_{13}^2)}{2}}, \quad d_{jk}^2 = l_j^2 + l_k^2 + 2 |(\vec{l}_j \cdot \vec{l}_k)|;$$

$$2) h = d_{\max}^{(V)} = \sqrt{\frac{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2 |(\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)| + 2 |(\vec{l}_2 \cdot \vec{l}_3)| + 2 |(\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_3)|}{3}}.$$

Как можно видеть из таблицы, использование выражения $h = d_{\max}^{(S)}$ обеспечивает устойчивый счет любого из рассмотренных вариантов при $C_{AV} = 0,64$, тогда как для выражения $h = d_{\max}^{(V)}$

Значения C_{AV}^{\min} в тестовой задаче с поступательной ударной волной (схема Годунова, $M_S = 20$)

Тип сетки	h_y/h_x	h_z/h_x	C_{AV}^{\min}	
			$h = d_{\max}^{(S)}$	$h = d_{\max}^{(V)}$
А	1	1	0,44	0,44
А	1/4	1	0,62	0,90
А	1/4	1/4	0,56	0,80
А	4	1	0,31	0,43
А	4	4	0,14	0,20
В	1/2	1/4	0,60	0,88
В	1/4	1/2	0,43	0,56
С	1/2	1/2	0,64	0,53
С	1/2	1/4	0,64	0,71

требуется значение $C_{AV} = 0,90$, что заметно больше. Исходя из полученных результатов, можно рекомендовать в расчетах трехмерных задач использовать выражение $h = d_{\max}^{(S)}$ и коэффициент $C_{AV} = 0,75$ (это значение взято с запасом).

Численные примеры

Рассмотрим задачу об обтекании цилиндра сверхзвуковым потоком, где феномен "карбункула" проявляется наиболее наглядно. Двумерный вариант постановки задачи и расчетная сетка описаны в [5, 6]. Отличие настоящих расчетов заключается в добавлении координаты z с равномерным разбиением интервала $0 \leq z \leq 1$ на 45 ячеек; на границах $z = 0$ и $z = 1$ задается условие периодичности течения.

Результаты расчетов задачи при $\gamma = 1,4$ и двух значениях числа Маха набегающего потока $M_\infty = 20$ и $M_\infty = 3$, представлены на рис. 3 и 4 соответственно. Расчеты задачи проводились с использованием схем Годунова [7], Роу [8], HLLC [9], AUSM⁺ [10] и схемы Сафронова [11]. Заметим, что данные расчетов по схеме AUSM⁺ на этих рисунках не приводятся, так как они оказались аналогичными тем, что были получены в двумерном приближении (зависимость от координаты z в этих расчетах отсутствует). Напомним, что в расчетах двумерной задачи по схеме AUSM⁺ наблюдаются небольшие осцилляции параметров за ударной волной, которые в случае добавления искусственной вязкости исчезают.

В двух верхних рядах на рис. 3 и 4 приведены изолинии числа Маха на границах расчетной области и в расчетных сечениях $z = \text{const}$, полученные с применением оригинальных схем. Видно, что феномен "карбункула" наиболее сильно проявляется при использовании схемы Роу. В этом случае решение имеет ярко выраженный пространственный и нестационарный характер с образованием рециркуляционной области в виде опухолеподобного нароста перед телом. При использовании схемы Годунова и схемы HLLC рециркуляционная область отсутствует. Тем не менее и в этих вариантах решение остается пространственным и нестационарным, причем наиболее сильно неустойчивость течения проявляется в направлении z . В случае использования схемы Сафронова неустойчивость течения оказывается выше, чем в случае использования схем Годунова и HLLC.

Нижние ряды на рис. 3 и 4 демонстрируют данные, полученные по тем же схемам, но с добавлением искусственной вязкости. Видно, что в этом случае патологическое проявление неустойчивости полностью устраняется и решения становятся двумерными; при этом все схемы демонстрируют близкие результаты.

Заключение

Новый способ подавления численной неустойчивости типа "карбункул" через добавление искусственной вязкости обобщен на случай моделирования трехмерных задач.

Как оказалось, особенности проявления "карбункул"-неустойчивости в трехмерном случае аналогичны тем, что наблюдались в двумерном приближении. Поэтому разработанная ранее модель искусственной вязкости была перенесена на трехмерный случай. При этом было выбрано выражение для характерного размера трехмерной ячейки и рекомендовано значение коэффициента C_{AV} для использования в расчетах трехмерных задач.

Обобщенная модель искусственной вязкости опробована на схемах первого порядка аппроксимации: Годунова, Роу, схемах HLLC, AUSM⁺ и схеме Сафронова применительно к расчетам на гладких структурированных сетках. Эффективность модели продемонстрирована примерами решения известных тестовых задач.

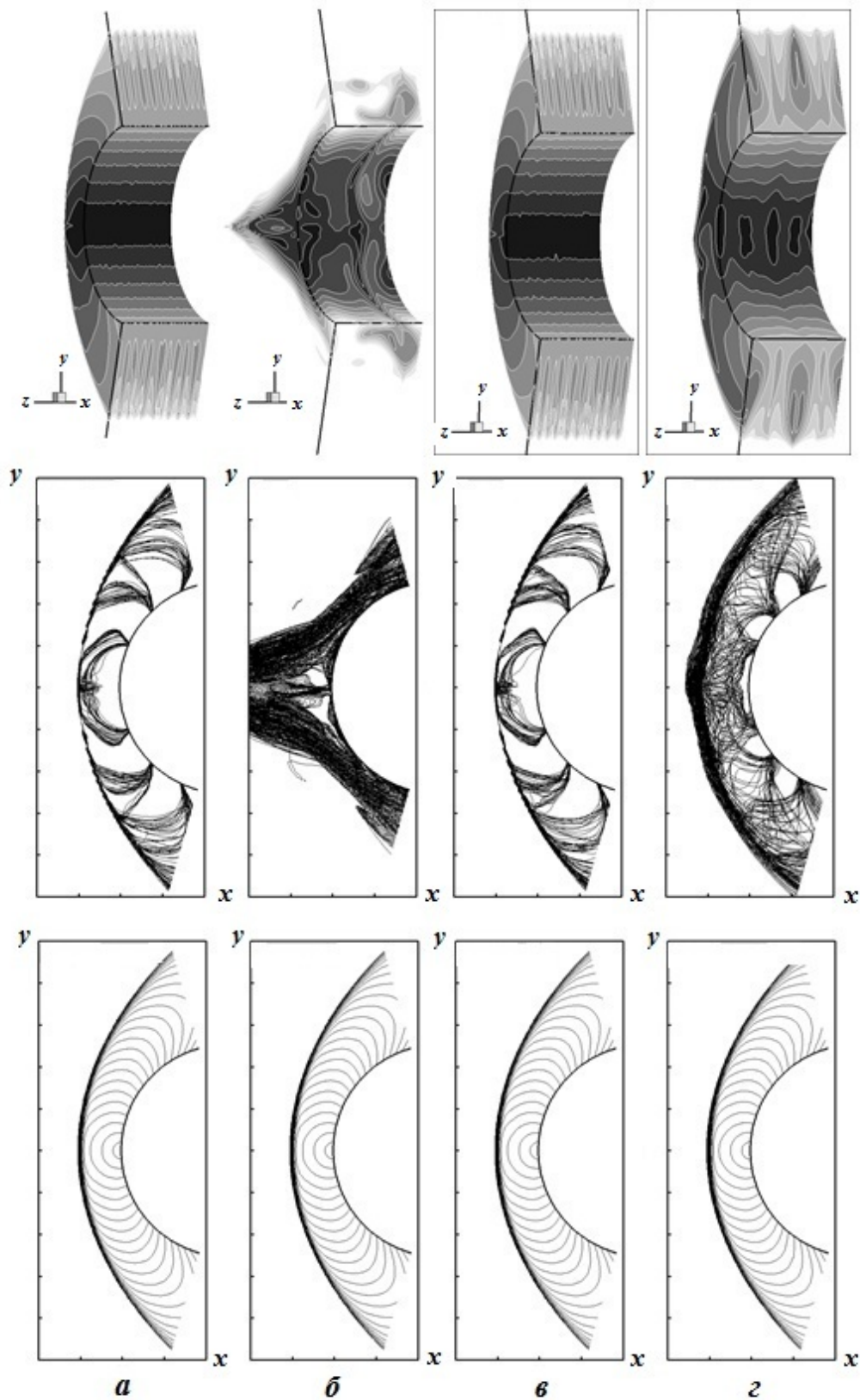


Рис. 3. Сверхзвуковое обтекание цилиндра при $M_\infty = 20$, рассчитанное по схемам Годунова (а), Роу (б), HLLC (в) и Сафронова (г). Изолинии числа Маха: вверху — через 0,25 на границах расчетной области; в середине — через 0,5 во всех расчетных сечениях $z = \text{const}$; внизу — через 0,1 во всех расчетных сечениях $z = \text{const}$ (расчеты с добавлением искусственной вязкости)

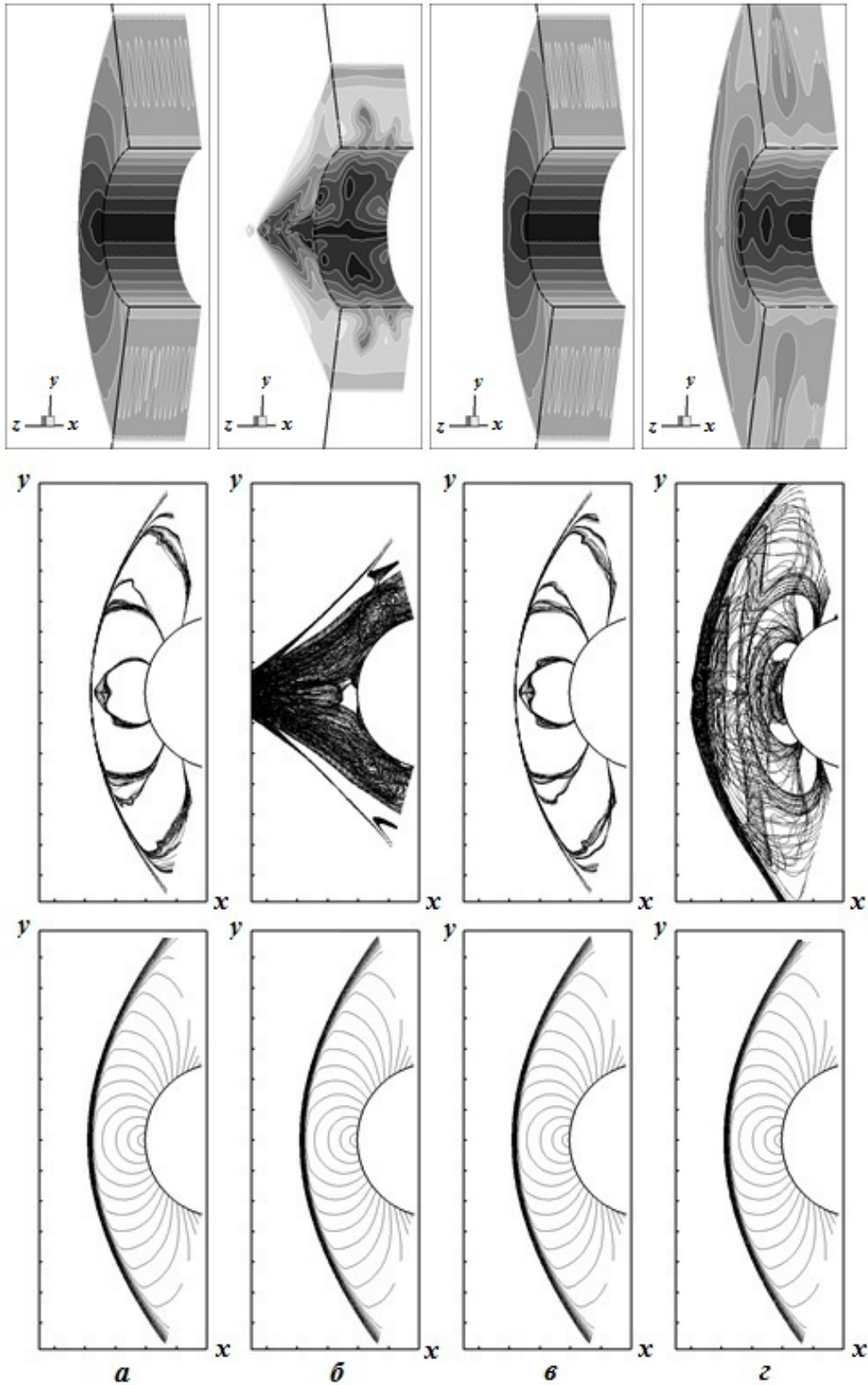


Рис. 4. Сверхзвуковое обтекание цилиндра при $M_\infty = 3$, рассчитанное по схемам Годунова (а), Роу (б), HLLC (в) и Сафронова (г). Изолинии числа Маха: вверху — через 0,2 на границах расчетной области, в середине — через 0,4 во всех расчетных сечениях $z = \text{const}$; внизу — через 0,1 во всех расчетных сечениях $z = \text{const}$ (расчеты с добавлением искусственной вязкости)

Список литературы

1. Peery K. M., Imlay S. T. Blunt body flow simulations // AIAA Paper. 1988. No 88—2924.
2. Quirk J. J. A contribution to the great Riemann solver debate // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 1994. Vol. 18. P. 555—574.
3. Родионов А. В., Тагирова И. Ю. Искусственная вязкость в схемах типа Годунова как метод подавления "карбункул"-неустойчивости // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2015. Вып. 2. С. 3—11.
4. Тагирова И. Ю., Родионов А. В. Применение искусственной вязкости для борьбы с "карбункул"-неустойчивостью в схемах типа Годунова // Математическое моделирование. 2015. Т. 27, № 10. С. 47—64.
5. Родионов А. В. Применение искусственной вязкости для борьбы с численной неустойчивостью типа "карбункул": Препринт №115—2017. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2017.
6. Rodionov A. V. Artificial viscosity in Godunov-type schemes to cure the carbuncle phenomenon // J. Comp. Phys. 2017. Vol. 345. P. 308—329.
7. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. Т. 47, № 3. С. 271—306.
8. Roe P. L. Approximate Riemann Solvers // J. Comp. Phys. 1981. Vol. 43. P. 357—372.
9. Toro E. F., Spruce M., Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver // Shock Waves. 1994. Vol. 4. P. 25—34.
10. Liou M.-S. A sequel to AUSM: AUSM⁺ // J. Comp. Phys. 1996. Vol. 129. P. 364—382.
11. Сафронов А. В. Разностный метод для уравнений газодинамики из соотношений на разрывах // Математическое моделирование. 2008. Т. 20, № 2. С. 76—84.

Статья поступила в редакцию 17.11.17.

THE ARTIFICIAL VISCOSITY FOR SUPPRESSING THE "CARBUNCLE" TYPE NUMERICAL INSTABILITY IN 3D PROBLEM SIMULATIONS / A. V. Rodionov (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region).

Generalization of the artificial viscosity method to suppress the "carbuncle"-type instability in the simulation of 3D problems is described. The first-order schemes (Godunov, Rowe, and HLLC schemes, AUSM⁺ and Safronov scheme) are considered as applied to the simulation of 3D problems using smooth structured grids. The efficiency of this method is demonstrated by the example of well-known test problems.

Keywords: hypersonic flows, Eulerian and Navier-Stokes equations, numerical instability, artificial viscosity, 3D problem simulations.
