

УДК 519.6

## КОНСЕРВАТИВНЫЙ ПЕРЕСЧЕТ ВЕЛИЧИН В РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ НА ЛАГРАНЖЕВО-ЭЙЛЕРОВОЙ СЕТКЕ

А. М. Стенин

(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Представлен консервативный по полной энергии глобальный алгоритм пересчета величин на эйлеровом этапе счета шага по времени в разностных схемах газовой динамики на регулярной четырехугольной лагранжево-эйлеровой пространственной сетке. Значения газодинамических величин на новой сетке вычисляются из условия сохранения соответствующих интегральных величин. Вычисление новых значений удельной внутренней энергии производится на основе сохранения интегральной внутренней энергии с учетом поправок, обеспечивающих сохранение полной энергии. Если на лагранжевом этапе счета шага по времени используется полностью консервативная разностная схема, то консервативный пересчет величин обеспечивает полную консервативность схемы по совокупности обоих этапов, лагранжева и эйлера. Приводятся результаты тестовых расчетов задачи о сильном точечном взрыве.

*Ключевые слова:* газовая динамика, лагранжево-эйлеровы сетки, пересчет величин, полностью консервативная схема, седовский взрыв.

### Введение

Численные методы для моделирования газодинамических течений сплошной среды могут быть построены исходя из системы уравнений газовой динамики в переменных Лагранжа или в переменных Эйлера. Оба эти подхода имеют свои достоинства и недостатки.

Стремление соединить положительные стороны лагранжева и эйлера подходов приводит к созданию разностных методов решения газодинамических задач на лагранжево-эйлеровой сетке. Такие разностные схемы основаны на интегродифференциальных уравнениях газовой динамики, записанных относительно элементарного объема, движущегося с произвольно заданной скоростью. Если заданная скорость элементарного объема в этих уравнениях равна скорости вещества, то имеем уравнения в форме Лагранжа; если же она равна нулю, то получаем уравнения в переменных Эйлера. Интегродифференциальные уравнения газовой динамики в лагранжево-эйлеровых координатах приводятся, например, в работах [1, 2].

Расчет одного шага по времени в лагранжево-эйлеровых методиках, как правило, подразделяется на два этапа.

На первом, лагранжевом, этапе счета шага вычисляются ускорения, возникающие под действием сил, обусловленных гидродинамическим давлением, и прочих сил, а затем — скорости в узлах пространственной сетки. Узлы сетки смещаются в соответствии с вычисленными скоростями. Затем вычисляются новые значения скалярных термодинамических величин в ячейках сетки.

На втором, эйлеровом, этапе производится построение новой пространственной сетки и пересчет величин на эту сетку. Изменение газодинамических величин на этом этапе вызвано конвективными потоками, возникающими вследствие смещения узлов сетки после лагранжева этапа счета шага.

Именно в аппроксимации конвективных потоков на эйлеровом этапе состоит основная трудность при создании лагранжево-эйлеровых методик численного решения задач газовой динамики. Она

заключается в том, что повышение порядка аппроксимации уравнений конвекции входит в противоречие с получением монотонных численных решений. Согласно теореме С. К. Годунова [3] в линейном случае монотонность на разрывных решениях можно обеспечить только в разностных схемах первого порядка аппроксимации. В поисках выхода из этого противоречия и обхода условий теоремы С. К. Годунова разрабатываются так называемые схемы переменного порядка аппроксимации производных по пространству. В таких схемах используются нелинейные механизмы переключения от аппроксимации второго порядка и выше на гладких решениях к аппроксимации первого порядка на разрывных решениях. Для получения монотонных решений используются различные ограничители потоков величин, зависящие от локальных свойств численных решений. Множество ссылок на численные методы подобного типа можно найти в обзоре литературы из [4].

В данной работе представлен алгоритм пересчета величин на эйлеровом этапе методики ВКЛ (Выделенные Контактные Линии) [5, 6], предназначенной для расчета двумерных газодинамических течений, обладающих плоской или осевой симметрией, на регулярных четырехугольных сетках с выделением подвижных контактных границ между веществами ломаными линиями, не совпадающими с линиями сетки.

Пересчет величин производится по алгоритму глобального типа путем поиска пересечений ячеек старой пространственной сетки, полученной после лагранжева этапа счета шага по времени, с ячейками новой сетки эйлерова этапа. Здесь не будут рассматриваться *смешанные* ячейки сетки, через которые проходят выделенные контактные линии, поскольку для изложения сути алгоритма это не существенно.

Заметим, что алгоритм пересчета методики ВКЛ можно рассматривать как разностную схему с аппроксимацией конвективных потоков. Эта схема формально будет иметь первый порядок аппроксимации по пространственным переменным.

В силу глобального характера алгоритма в методике ВКЛ нет ограничения, неизбежного для алгоритмов пересчета локального типа, где условия устойчивости счета требуют, чтобы новая сетка была получена смещением узлов старой сетки и при этом относительное смещение узлов не превышало бы определенного значения (чаще всего это  $1/3$ ). В качестве новой сетки может быть использована любая регулярная четырехугольная сетка, приемлемая для проведения расчета. По своей структуре, расположению узлов она может быть никак не связана со старой сеткой. В частности, количество строк и количество столбцов старой и новой сеток могут не совпадать. Кроме того, программы построения сетки и пересчета величин могут подключаться не на каждом шаге по времени, а через заданное число шагов или автоматически по некоторым критериям. В качестве такого критерия можно использовать, например, потерю выпуклости ячеек пространственной сетки на лагранжевом этапе счета шага по времени.

При вычислении значений газодинамических величин на новой сетке будем исходить из выполнения законов сохранения некоторых интегральных величин. А именно, значения плотности на новой сетке вычисляются из условия сохранения массы, значения скорости в узлах новой сетки — из условия сохранения количества движения.

Для вычисления значений удельной внутренней энергии в ячейках новой сетки суммируются вклады интегральной внутренней энергии из ячеек старой сетки. Для сохранения полной энергии неотрицательная разница между кинетической энергией, полученной суммированием кинетических энергий на старой сетке, и кинетической энергией, полученной по значениям новых скоростей, добавляется к интегральной внутренней энергии ячеек новой сетки.

### Вычисление новых значений плотности, скорости, искусственной вязкости

В статье приняты следующие обозначения.

Запись  $\vec{Z} = (x, y)$  обозначает точку в плоскости  $XOY$ . В случае плоской симметрии течений  $OX$  — ось абсцисс,  $OY$  — ось ординат декартовой прямоугольной системы координат. Для осесимметричных течений  $OX$  — ось вращения,  $OY$  — ось радиусов.

Узлы пространственной сетки  $\vec{Z}_{i,k} = (x_{i,k}, y_{i,k})$  (рис. 1), являющиеся вершинами четырехугольных ячеек, обозначаются двойными целочисленными индексами  $i = 1, 2, \dots, N_i$ ,  $k = 1, 2, \dots, N_k$ . Векторы скорости  $\vec{U}_{i,k} = (u_{i,k}, v_{i,k})$  определяются в узлах сетки.

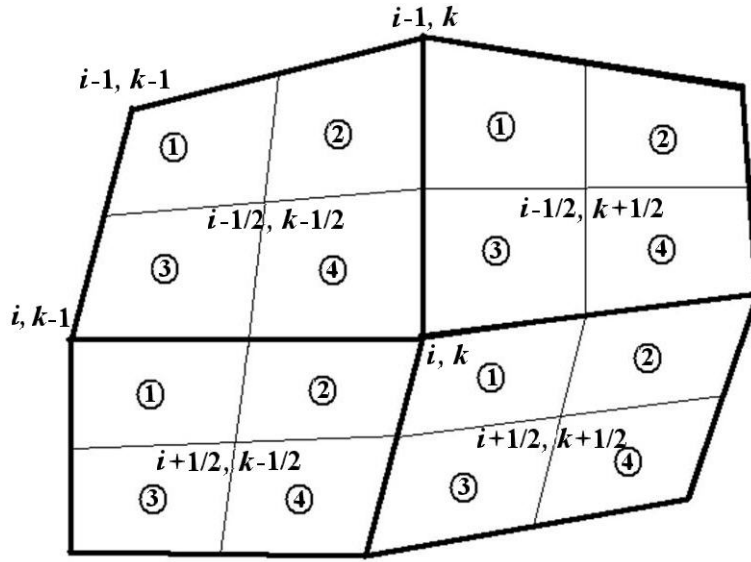


Рис. 1. Локальная нумерация вложенных четырехугольников

Ячейкам сетки придаются нижние полуцелые индексы:  $\Omega_{i-1/2, k-1/2}$ . Скалярные термодинамические величины — плотность  $\rho_{i-1/2, k-1/2}$ , удельная внутренняя энергия  $E_{i-1/2, k-1/2}$ , давление  $P_{i-1/2, k-1/2}$ , искусственная вязкость  $Q_{i-1/2, k-1/2}$  — определяются в ячейках с теми же индексами.

Как на лагранжевом, так и на эйлеровом этапе методики ВКЛ каждая ячейка сетки  $\Omega_{i-1/2, k-1/2}$  разбивается своими средними линиями на четырехугольники  $\square_{j_{i-1/2, k-1/2}}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , вложенные в ячейку. Одной из вершин каждого вложенного четырехугольника является вершина самой ячейки сетки. Локальная нумерация этих четырехугольников показана на рис. 1. Кроме значения плотности  $\rho_{i-1/2, k-1/2}$ , в самой ячейке сетки дополнительно вводятся значения плотности  $\rho^1_{i-1/2, k-1/2}$ ,  $\rho^2_{i-1/2, k-1/2}$ ,  $\rho^3_{i-1/2, k-1/2}$ ,  $\rho^4_{i-1/2, k-1/2}$  в каждом из вложенных четырехугольников  $\square_{j_{i-1/2, k-1/2}}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ .

На лагранжевом этапе счета шага значения плотности  $\rho^j_{i-1/2, k-1/2}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , вычисляются из условия сохранения массы в каждом из вложенных четырехугольников. В процессе пересчета величин новые значения плотности также вычисляются в каждом из вложенных четырехугольников. Как на лагранжевом этапе, так и по завершении эйлерова этапа счета шага массы ячеек сетки складываются из масс четырехугольников, на которые разбита данная ячейка:

$$M_{i-1/2, k-1/2} = M1_{i-1/2, k-1/2} + M2_{i-1/2, k-1/2} + M3_{i-1/2, k-1/2} + M4_{i-1/2, k-1/2}. \quad (1)$$

Масса узла сетки  $M_{i, k}$  определяется как сумма масс вложенных четырехугольников, для которых данный узел является общей вершиной (см. рис. 1):

$$M_{i, k} = M1_{i+1/2, k+1/2} + M2_{i-1/2, k+1/2} + M3_{i-1/2, k-1/2} + M4_{i+1/2, k-1/2}. \quad (2)$$

То есть масса узла представляет собой массу, заключенную в восьмиугольнике  $\Omega_{i, k}$ , образованном объединением вложенных четырехугольников:

$$\Omega_{i, k} = \square_{1_{i+1/2, k+1/2}} \cup \square_{2_{i-1/2, k+1/2}} \cup \square_{3_{i-1/2, k-1/2}} \cup \square_{4_{i+1/2, k-1/2}}.$$

Объем многоугольника  $\Omega_{i, k}$  есть объем интегрирования импульса, а его граница — контур интегрирования уравнения движения.

Согласованное определение массы узла по формуле (2) на лагранжевом этапе и на этапе глобального пересчета величин играет ту же роль, что и сбалансированная аппроксимация конвективных потоков в лагранжево-эйлеровых разностных схемах [7, 8]. А именно, она позволяет согласованно определить импульс узла сетки и, следовательно, обеспечить выполнение закона сохранения импульса по совокупности обоих этапов счета шага по времени.

Поскольку пересчет величин носит глобальный характер, то допускается, чтобы число строк и столбцов пространственной сетки лагранжева и эйлера этапов не совпадали. Поэтому для элементов лагранжевой сетки и величин, определенных на ней, будем использовать нижние индексы  $i, k$ :  $\vec{Z}_{i,k} = (x_{i,k}, y_{i,k})$ ,  $\Omega_{i-1/2,k-1/2}$ ,  $\Omega_{i,k}$ , а для элементов и величин на новой сетке — индексы  $in, kn$ :  $\vec{Z}_{in,kn} = (x_{in,kn}, y_{in,kn})$ ,  $\Omega_{in-1/2,kn-1/2}$ ,  $\Omega_{in,kn}$ . Иногда для сокращения записи вместо двойного индекса  $(in - 1/2, kn - 1/2)$  будем использовать номер ячейки Ян:  $\Omega_{in-1/2,kn-1/2} \equiv \Omega_{Ян}$ .

Обозначения окончательных значений величин после пересчета снабжаются верхним индексом  $n + 1$ :  $f^{n+1}$ ; обозначения газодинамических величин, полученных после лагранжева этапа, не содержат верхних индексов.

Пересчет газодинамических величин на новую сетку производится по вкладам соответствующих интегральных величин со старой сетки. Для вычисления интегральных вкладов ищутся многоугольники пересечения вложенных четырехугольников старой и новой сеток. Поскольку новые значения плотности вычисляются не только в ячейках, но и отдельно в каждом вложенном четырехугольнике новой сетки  $\square jn_{in-1/2,kn-1/2}$ ,  $jn = 1, 2, 3, 4$ ,  $in = 2, \dots, N_{in}$ ,  $kn = 2, \dots, N_{kn}$ , то именно вложенные четырехугольники на старой и новой сетках являются основными геометрическими объектами, для которых ищутся многоугольники пересечения.

В процессе поиска пересечений вложенных четырехугольников старой и новой сеток в программе пересчета величин методики ВКЛ четырехугольники старой сетки  $\square j_{i-1/2,k-1/2}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ,  $i = 2, \dots, N_i$ ,  $k = 2, \dots, N_k$ , перебираются в циклах по индексам  $i, k$  и по номерам  $j$  четырехугольников. Чтобы не искать пустых пересечений, разработан и реализован экономичный алгоритм построения контура пересечения двух многоугольников и поиска пересекающихся вложенных четырехугольников старой и новой сеток, который позволяет, во-первых, не сделать ни одной попытки поиска пустых пересечений и, во-вторых, обнаружить и реализовать все, без исключения, реально существующие пересечения.

После того, как для очередного вложенного четырехугольника старой сетки найден многоугольник пересечения с вложенным четырехугольником новой сетки  $\omega_p = \square j_{i-1/2,k-1/2} \cap \square jn_{in-1/2,kn-1/2}$ , вычисляется масса этого многоугольника

$$M_p = \rho_p V_p, \quad (3)$$

где  $V_p$  — площадь или объем вращения многоугольника  $\omega_p$  в зависимости от типа симметрии течения. Значение плотности  $\rho_p$  берется из пересекающегося вложенного четырехугольника  $\square j_{i-1/2,k-1/2}$  старой сетки.

Для четырехугольников новой сетки полученные вклады массы (3) суммируются:

$$M jn_{in-1/2,kn-1/2} = \sum_{p=1}^{N_p(jn, Ян)} M_p, \quad (4)$$

где  $N_p(jn, Ян)$  — количество пересечений, полученных для вложенного четырехугольника  $\square jn_{in-1/2,kn-1/2}$  в ячейке новой сетки. В соответствии с (1) массы пересечений (3) суммируются и для ячеек новой сетки:

$$M_{in-1/2,kn-1/2} = \sum_{p=1}^{N_p(Ян)} M_p, \quad (5)$$

где  $N_p(Ян)$  — количество пересечений, полученных для данной новой ячейки сетки  $\Omega_{in-1/2,kn-1/2}$ .

В соответствии с определением (2) массы, относящиеся к узлам новой сетки, также складываются из масс пересечений (3):

$$M_{in,kn} = \sum_{p=1}^{N_p(in,kn)} M_p, \quad (6)$$

где  $N_p(in, kn)$  — количество пересечений, полученных для восьмиугольника  $\Omega_{in,kn}$ , ограниченного контуром интегрирования импульса в узле новой сетки  $\vec{Z}_{in,kn}$ .

После завершения суммирования всех вкладов массы для четырехугольников  $\square j n_{in-1/2, kn-1/2}$  (4) и ячеек (5) вычисляются новые значения плотности

$$\rho j n_{in-1/2, kn-1/2}^{n+1} = \frac{M j n_{in-1/2, kn-1/2}}{V j n_{in-1/2, kn-1/2}^{n+1}}; \quad \rho_{in-1/2, kn-1/2}^{n+1} = \frac{M_{in-1/2, kn-1/2}}{V_{in-1/2, kn-1/2}^{n+1}}. \quad (7)$$

Нет необходимости вычислять значения плотности в восьмиугольниках  $\Omega_{in, kn}$ , поскольку для вычисления вектора скорости нужны только их массы (6).

Новые значения искусственной вязкости  $Q_{in-1/2, kn-1/2}^{n+1}$ , определенные в ячейках сетки, вычисляются по аналогии со значениями плотности (7) путем интегрирования по объемам пересечения.

Для последующего вычисления новых значений составляющих вектора скорости в узле  $\vec{Z}_{in, kn}$  новой сетки параллельно с суммированием вкладов массы (6) суммируются вклады компонент количества движения:

$$I x_{in, kn} = \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} M_p u_p; \quad I y_{in, kn} = \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} M_p v_p. \quad (8)$$

Здесь  $M_p$  обозначают те же самые массы пересечения (3), которые суммируются для массы узла  $M_{in, kn}$  новой сетки (6), и суммирование производится по тем же пересечениям. Выбор узла старой сетки, из которого берутся значения составляющих вектора скорости  $u_p, v_p$  в формулах (8), зависит от номера  $j$  пересекающегося четырехугольника  $\square j_{i-1/2, k-1/2}$  старой сетки. Значения  $u_p, v_p$  берутся из того узла старой сетки  $\vec{Z}_{i, k}$ , который является одной из вершин вложенного четырехугольника  $\square j_{i-1/2, k-1/2}$  (см. рис. 1).

По накопленным вкладом компонент количества движения (8) вычисляются новые значения составляющих вектора скорости в узле новой сетки:

$$u_{in, kn}^{n+1} = \frac{I x_{in, kn}}{M_{in, kn}}; \quad v_{in, kn}^{n+1} = \frac{I y_{in, kn}}{M_{in, kn}}, \quad (9)$$

где  $M_{in, kn}$  — масса узла (6).

При таком способе пересчета скоростей с учетом определения массы узла (2), во-первых, выполняется закон сохранения импульса по совокупности лагранжева и эйлера этапов счета шага по времени и, во-вторых, обеспечивается монотонность значений компонент скоростей на этапе пересчета величин.

### Вычисление новых значений удельной внутренней энергии

Вычисление новых значений удельной внутренней энергии на этапе пересчета величин в методике ВКЛ производится на основе сохранения интегральной внутренней энергии с учетом поправок, обеспечивающих сохранение полной энергии.

Значения удельной внутренней энергии определены в ячейках сетки. В соответствии с этим для ячейки  $\Omega_{in-1/2, kn-1/2}$  новой сетки вклады интегральной внутренней энергии суммируются:

$$\tilde{J}_{in-1/2, kn-1/2} = \sum_{p=1}^{N_p(\mathcal{Y}n)} M_p E_p. \quad (10)$$

Здесь  $M_p$  — те же самые массы пересечения (3), что и в формулах (4)–(6), (8). Значения удельной внутренней энергии  $E_p$  в объеме пересечения  $V_p$  (3) при суммировании (10) берутся из ячейки  $\Omega_{i-1/2, k-1/2}$  старой сетки, в которой расположен пересекающийся вложенный четырехугольник  $\square j_{i-1/2, k-1/2} \in \Omega_{i-1/2, k-1/2}$ .

Зачастую после вычисления интегральных внутренних энергий (10) новые значения удельной внутренней энергии на новой сетке вычисляют по формулам

$$\tilde{E}_{in-1/2, kn-1/2} = \frac{\tilde{J}_{in-1/2, kn-1/2}}{M_{in-1/2, kn-1/2}}, \quad (11)$$

где  $M_{in-1/2, kn-1/2}$  — суммированная масса ячейки (5). Ясно, что при этом полная энергия счетной области, вычисленная по значениям величин на новой сетке, не совпадет с полной энергией счетной области, вычисленной по значениям величин на старой сетке. Разница в значениях полной энергии на старой и новой сетках будет целиком определяться разницей в интегральной кинетической энергии области. При таком пересчете разностная схема по совокупности лагранжева и эйлерова этапов счета шага по времени является неконсервативной.

Между тем известно [9], что консервативность схемы является необходимым условием сходимости численных расчетов в классе разрывных решений. Более того, в расчетах по неконсервативным схемам при увеличении числа точек сетки возможна сходимость к численному решению, которое не является решением системы уравнений газовой динамики, т. е. к неправильному решению. Примеры таких расчетов на сходимость с неконсервативным пересчетом энергии на эйлеровом этапе из условия сохранения интегральной внутренней энергии приводятся в работе [10].

В методике ВКЛ был предложен и реализован следующий алгоритм балансного пересчета значений удельной внутренней энергии.

В процессе пересчета величин параллельно с накоплением массы узла  $M_{in, kn}$  (6) и составляющих количества движения  $Ix_{in, kn}$ ,  $Iy_{in, kn}$  (8) в узле новой сетки  $\vec{Z}_{in, kn}$  вычисляется величина  $K_{in, kn}^{(\Sigma)}$ , которая является суммой вкладов кинетической энергии, вычисленной по тем же значениям составляющих вектора скорости  $u_p$ ,  $v_p$ , что и в формулах (8):

$$K_{in, kn}^{(\Sigma)} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} M_p (u_p^2 + v_p^2). \quad (12)$$

Здесь также используются те же массы пересечения (3).

С другой стороны, новые значения вектора скорости  $\vec{U}_{in, kn}^{n+1} = (u_{in, kn}^{n+1}, v_{in, kn}^{n+1})$ , вычисленные в узлах новой сетки  $\vec{Z}_{in, kn}$  по формулам (9), определяют новые значения  $K_{in, kn}$  кинетической энергии в этих узлах:

$$K_{in, kn} = \frac{1}{2} M_{in, kn} \left[ \left( u_{in, kn}^{n+1} \right)^2 + \left( v_{in, kn}^{n+1} \right)^2 \right]. \quad (13)$$

Дефицит кинетической энергии в узле новой сетки  $\vec{Z}_{in, kn}$  обозначим символом  $\Delta K_{in, kn}$ :

$$\Delta K_{in, kn} = K_{in, kn}^{(\Sigma)} - K_{in, kn}. \quad (14)$$

Для сохранения баланса полной энергии на этапе пересчета величин дефицит кинетической энергии добавляется к интегральной внутренней энергии. При этом значение  $\Delta K_{in, kn}$ , определенное в узле новой сетки  $\vec{Z}_{in, kn}$ , распределяется между ячейками сетки пропорционально массам вложенных четырехугольников, для которых узел  $\vec{Z}_{in, kn}$  является общей вершиной.

Таким образом, модифицированная интегральная внутренняя энергия  $J_{in-1/2, kn-1/2}$  ячейки новой сетки  $\Omega_{in-1/2, kn-1/2}$  после добавления дефицита кинетической энергии будет равна

$$J_{in-1/2, kn-1/2} = \tilde{J}_{in-1/2, kn-1/2} + \frac{M1_{in-1/2, kn-1/2}}{M_{in-1, kn-1}} \Delta K_{in-1, kn-1} + \frac{M2_{in-1/2, kn-1/2}}{M_{in, kn-1}} \Delta K_{in, kn-1} + \frac{M3_{in-1/2, kn-1/2}}{M_{in, kn}} \Delta K_{in, kn} + \frac{M4_{in-1/2, kn-1/2}}{M_{in-1, kn}} \Delta K_{in-1, kn}. \quad (15)$$

Здесь  $\tilde{J}_{in-1/2, kn-1/2}$  — интегральная внутренняя энергия (10) ячейки новой сетки, полученная суммированием интегральных вкладов удельной внутренней энергии;  $Mj_{in-1/2, kn-1/2}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  — массы вложенных четырехугольников (см. рис. 1) в ячейке  $\Omega_{in-1/2, kn-1/2}$ ;  $M_{in, kn}$ ,  $M_{in-1, kn}$ ,  $M_{in-1, kn-1}$ ,  $M_{in, kn-1}$  — массы узлов новой сетки, являющихся вершинами ячейки  $\Omega_{in-1/2, kn-1/2}$ .

После этого новые значения удельной внутренней энергии  $E_{in-1/2, kn-1/2}^{n+1}$  в ячейках новой сетки вычисляются по формулам

$$E_{in-1/2, kn-1/2}^{n+1} = \frac{J_{in-1/2, kn-1/2}}{M_{in-1/2, kn-1/2}}. \quad (16)$$

Ясно, что при таком способе вычисления значений удельной внутренней энергии по формулам (10), (15), (16) закон сохранения полной энергии в счетной области на этапе пересчета величин будет выполнен.

Если при этом на лагранжевом этапе счета шага по времени используется разностная схема, сохраняющая полную энергию счетной области, то закон сохранения полной энергии будет выполнен и по совокупности обоих этапов — лагранжева и пересчета величин.

Докажем теперь два важных утверждения, касающихся дефицита  $\Delta K_{in, kn}$  (14) в узлах новой сетки.

**Утверждение 1.** Дефицит кинетической энергии  $\Delta K_{in, kn}$  (14) в узлах новой сетки неотрицателен.

Доказательство. Кинетическая энергия (13), вычисленная в узле новой сетки  $\vec{Z}_{in, kn}$  по новым значениям скорости, имеет вид

$$K_{in, kn} = \frac{1}{2M_{in, kn}} \left[ \left( \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} M_p u_p \right)^2 + \left( \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} M_p v_p \right)^2 \right].$$

С учетом (12) и выражения (6) для массы узла новой сетки можно записать  $\Delta K_{in, kn}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta K_{in, kn} = \frac{1}{2M_{in, kn}} & \left[ \left( \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} M_p \right) \left( \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} M_p u_p^2 \right) - \left( \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} M_p u_p \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left( \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} M_p \right) \left( \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} M_p v_p^2 \right) - \left( \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} M_p v_p \right)^2 \right]. \quad (17) \end{aligned}$$

В силу неравенства Коши—Буняковского из (17) следует  $\Delta K_{in, kn} \geq 0$ , что и требовалось доказать.

Таким образом, ни модифицированные интегральные внутренние энергии  $J_{in-1/2, kn-1/2}$  (15), ни вычисленные по ним в процессе пересчета удельные внутренние энергии  $E_{in-1/2, kn-1/2}^{n+1}$  (16) не могут приобрести отрицательных значений.

**Утверждение 2.** Удельные внутренние энергии  $\tilde{E}_{in-1/2, kn-1/2}$  (11), вычисленные по интегральным вкладом внутренней энергии, при достаточно гладком поле скоростей отличаются от удельных внутренних энергий  $E_{in-1/2, kn-1/2}^{n+1}$  (16), вычисленных по интегральным энергиям с учетом поправок (15), на величину второго порядка малости по линейному размеру ячейки новой сетки. То есть

$$\Delta E_{in-1/2, kn-1/2} = E_{in-1/2, kn-1/2}^{n+1} - \tilde{E}_{in-1/2, kn-1/2} = O(h^2), \quad (18)$$

где  $h$  — некоторый средний линейный пространственный размер ячейки сетки.

Доказательство. Преобразуем выражение (17) для  $\Delta K_{in, kn}$ .

Можно показать, что имеют место равенства

$$\begin{aligned} \left( \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} M_p \right) \left( \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} M_p u_p^2 \right) - \left( \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} M_p u_p \right)^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} \left[ \sum_{q=1}^{N_p(in, kn)} M_p M_q (u_p - u_q)^2 \right] \right\}; \\ \left( \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} M_p \right) \left( \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} M_p v_p^2 \right) - \left( \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} M_p v_p \right)^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} \left[ \sum_{q=1}^{N_p(in, kn)} M_p M_q (v_p - v_q)^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta K_{in, kn} = \frac{1}{4M_{in, kn}} \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} \left\{ \sum_{q=1}^{N_p(in, kn)} M_p M_q \left[ (u_p - u_q)^2 + (v_p - v_q)^2 \right] \right\}. \quad (19)$$

Из формулы (15) с учетом выражения (19) для дефицита кинетической энергии в узлах сетки и формул для удельных значений энергии (11), (16) в ячейках новой сетки  $\Omega_{in-1/2, kn-1/2}$  получаем

$$\begin{aligned} E_{in-1/2, kn-1/2}^{n+1} - \tilde{E}_{in-1/2, kn-1/2} &= \\ &= \frac{1}{4M_{in-1/2, kn-1/2}} \left\{ \frac{M1_{in-1/2, kn-1/2}}{M_{in-1, kn-1}^2} \sum_{p=1}^{N_p(in-1, kn-1)} \left\{ \sum_{q=1}^{N_p(in-1, kn-1)} M_p M_q \left[ (u_p - u_q)^2 + (v_p - v_q)^2 \right] \right\} + \right. \\ &\quad + \frac{M2_{in-1/2, kn-1/2}}{M_{in, kn-1}^2} \sum_{p=1}^{N_p(in, kn-1)} \left\{ \sum_{q=1}^{N_p(in, kn-1)} M_p M_q \left[ (u_p - u_q)^2 + (v_p - v_q)^2 \right] \right\} + \\ &\quad + \frac{M3_{in-1/2, kn-1/2}}{M_{in, kn}^2} \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} \left\{ \sum_{q=1}^{N_p(in, kn)} M_p M_q \left[ (u_p - u_q)^2 + (v_p - v_q)^2 \right] \right\} + \\ &\quad \left. + \frac{M4_{in-1/2, kn-1/2}}{M_{in-1, kn}^2} \sum_{p=1}^{N_p(in-1, kn)} \left\{ \sum_{q=1}^{N_p(in-1, kn)} M_p M_q \left[ (u_p - u_q)^2 + (v_p - v_q)^2 \right] \right\} \right\}. \quad (20) \end{aligned}$$

Все пары векторов скорости  $\vec{U}_p = (u_p, v_p)$ ,  $\vec{U}_q = (u_q, v_q)$  в формуле (20) определены в точках старой сетки, которые принадлежат области, имеющей непустые пересечения с объединением областей интегрирования уравнения движения (см. рис. 1) в четырех вершинах ячейки  $\Omega_{in-1/2, kn-1/2}$  новой сетки. То есть эти пары точек удалены друг от друга на расстояние, не большее, чем  $O(h)$ , где  $h$  — некоторый средний линейный пространственный размер ячейки новой сетки. Поэтому на гладких течениях правая часть соотношения (20) является величиной порядка  $O(h^2)$ , что и доказывает утверждение (18).

Из формулы (20) также ясно, что если все скорости в узлах старой сетки, по которым вычисляются скорости в узлах новой сетки, являющихся вершинами ячейки  $\Omega_{in-1/2, kn-1/2}$ , равны между собой, то  $\Delta E_{in-1/2, kn-1/2} = 0$ . То есть тогда новые значения  $E_{in-1/2, kn-1/2}^{n+1}$  удельной внутренней энергии в ячейке  $\Omega_{in-1/2, kn-1/2}$  определяются исключительно значениями удельной внутренней энергии на старой сетке.

### Тестовые расчеты задачи о сильном точечном взрыве

Аналитическое решение задачи о сильном точечном взрыве было получено и опубликовано Л. И. Седовым в 1946 году. Постановка и решение этой задачи излагаются, например, в книгах [11, 12].

Рассматривается задача о распространении сферической ударной волны, возникающей в результате сильного взрыва, т. е. мгновенного выделения в начальный момент времени  $t = 0$  большого



количества энергии  $J^{(0)}$  в некоторой шаровой области с небольшим радиусом  $R_E(0)$ . Предполагается, что ударная волна расположена достаточно далеко от центра взрыва, чтобы источник энергии можно было считать точечным, и в то же время достаточно близко к источнику, где ударная волна еще обладает большой интенсивностью.

Здесь рассматривается шаровая область  $0 \leq R \leq R_\Gamma$ , заполненная газом с начальной плотностью  $\rho^0 = 1$  и уравнением состояния идеального газа  $P = (\gamma - 1) \rho E$  со значением  $\gamma = 1,4$ . Начальный радиус области энерговыделения  $R_E(0) = 0,01$ . Полная энергия, выделенная в массе газа, расположенного в области  $0 < R < 0,01$ , полагалась равной  $J^{(0)} = 0,850155546$ .

Согласно аналитическому решению при таком значении полной энергии радиус фронта ударной волны на момент времени  $t = 1$  равен  $R_{УВ} = 1$ , и при этом скорость ударной волны  $D_{УВ} = 0,4$ . Непосредственно за фронтом ударной волны на этот момент времени имеют место следующие значения параметров: радиальная скорость газа  $U^{(1)} = 1/3$ ; плотность  $\rho^{(1)} = 6$ ; давление  $P^{(1)} = 4/30$ . Значение  $\rho^{(1)}$  не зависит от времени.

Внешний радиус области рассматриваемого течения полагался равным  $R_\Gamma = 1,1$ . Заданное значение полной энергии определяет начальное значение удельной внутренней энергии единицы массы в области  $0 < R < 0,01$ :  $E^0 = 202959,686314$ .

Все расчеты данной задачи проводились в двумерной постановке на радиальной сетке с шагом сетки по углу, равным  $h_\theta = 2,5^\circ$ . Начальный шаг сетки по радиусу  $h_R^0$  варьировался. Были проведены серии расчетов на сгущающихся сетках со значениями  $h_R^0 = 0,01; 0,005; 0,0025$ . При каждом сгущении сетки по радиусу сгущались только счетные интервалы в области  $0,01 < R < 1,1$ . На область начального мгновенного энерговыделения  $0 < R < 0,01$  во всех расчетах брался один счетный интервал по радиусу. При этом в расчетах с пересчетом величин перестроение сетки также производилось только в области без энерговыделения. Граница области энерговыделения во всех расчетах оставалась *лагранжевой*, т. е. перемещалась вместе с веществом вдоль лагранжевой траектории.

Начальный шаг по времени во всех расчетах брался равным  $\tau = 10^{-7}$ . В процессе счета, как обычно, шаг по времени выбирался из условия Куранта в совокупности с условием на ударной волне.

На рис. 2 показаны в сравнении с аналитическим решением профили величин, полученные на момент времени  $t = 1$  по разностной схеме расчета *лагранжевой газовой динамики* методики ЛЭГАК [8]. Расчет был проведен на самой подробной из рассматриваемых сеток, когда начальный шаг сетки по радиусу  $h_R^0 = 0,0025$ .

Из рис. 2 видно, что результаты *лагранжева расчета* хорошо согласуются с аналитическим решением. Это означает, в частности, что решение поставленной задачи к моменту времени  $t = 1$  вышло на автомодельный режим. То есть отношение начального радиуса энерговыделяющей области к текущему радиусу фронта ударной волны, равное в данном случае  $R_E(0)/R_{УВ} = 0,01$ , вполне достаточно для того, чтобы считать источник энергии точечным.

Расчеты, результаты которых показаны на рис. 3 (см. также цветную вкладку), проводились по методике ЛЭГАК-ВКЛ с подключением программы перестроения сетки и пересчета величин на каждом шаге по времени. При каждом перестроении сетка в радиальном направлении строилась равномерным разбиением по радиусу интервала  $R_E(t) < R < 1,1$ , где  $R_E(t)$  — текущий радиус границы области энерговыделения. Сама граница области энерговыделения перемещалась вместе с веществом. Пересчет величин производился по представленному в данной работе консервативному алгоритму методики ВКЛ.

На рис. 3 (см. также цветную вкладку) представлены профили скорости, плотности и давления, полученные в трех расчетах, проведенных с числом счетных интервалов в области  $0,01 < R < 1,1$  невозмущенного в начальный момент времени газа, равным 109 ( $h_R^0 = 0,01$ ), 218 ( $h_R^0 = 0,005$ ) и 436 ( $h_R^0 = 0,0025$ ). Видно, что с увеличением числа точек сетки численное решение сходится к аналитическому. Профили величин, полученные на самой подробной из рассмотренных сеток, на взгляд автора, удовлетворительно согласуются с точным решением. Положение фронта ударной волны с учетом "размазывания" разрыва во всех трех расчетах также находится в удовлетворительном согласии с точным решением.

Расчеты, результаты которых приведены на рис. 4 (см. также цветную вкладку), отличаются от расчетов, представленных на рис. 3, только тем, что они выполнены в режиме с пересчетом величин

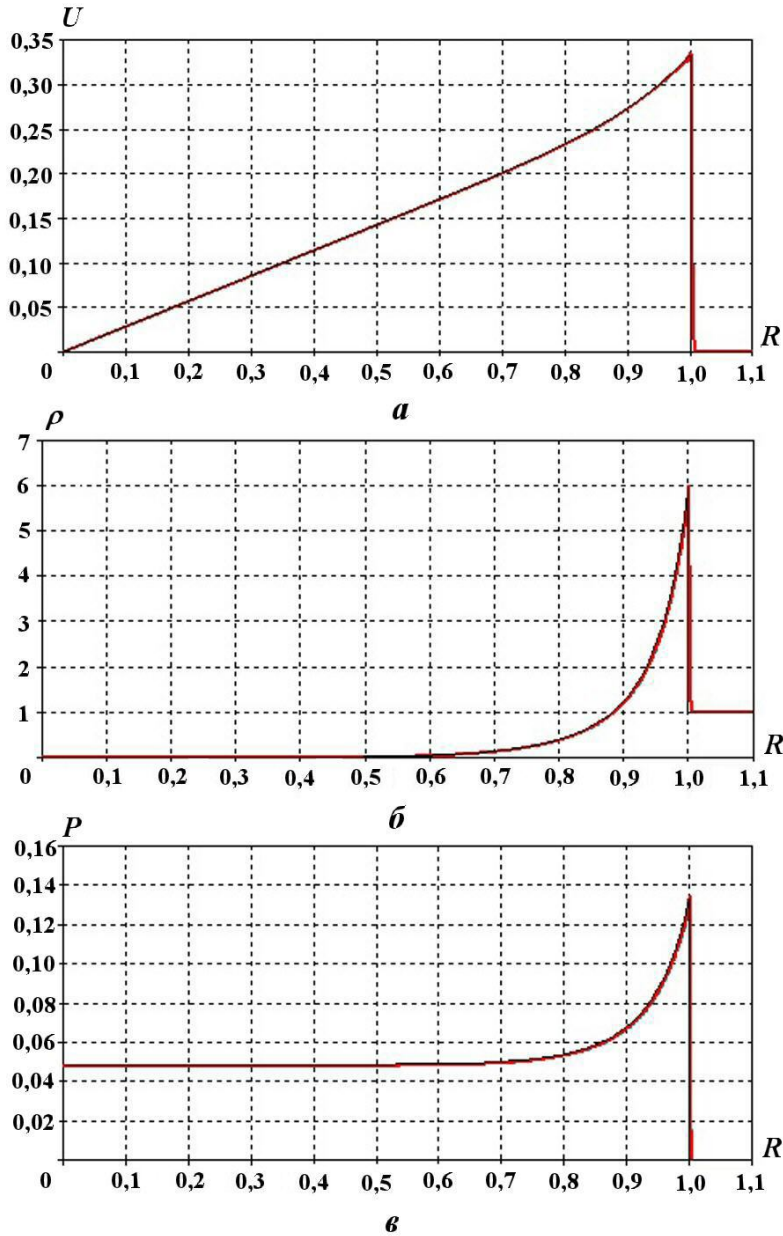


Рис. 2. Профили скорости (*a*), плотности (*б*) и давления (*в*),  $t = 1$ : — лагранжев расчет; — — аналитическое решение

через каждые 10 шагов по времени, а не на каждом шаге. Из сравнения рисунков видно, что эти результаты мало отличаются друг от друга.

### Заключение

Представлен разработанный и реализованный в методике ВКЛ алгоритм глобального пересчета величин. Глобальный характер алгоритма, во-первых, не ограничивает смещения узлов сетки при ее перестроениях и, во-вторых, позволяет подключать программу пересчета величин не на каждом шаге по времени, а через заданное число шагов или автоматически по некоторым критериям. Это можно использовать для экономии затрат времени на расчет.

Для сохранения баланса полной энергии на этапе пересчета величин дефицит кинетической энергии на новой сетке добавляется к интегральной внутренней энергии.

В работе доказаны следующие утверждения:

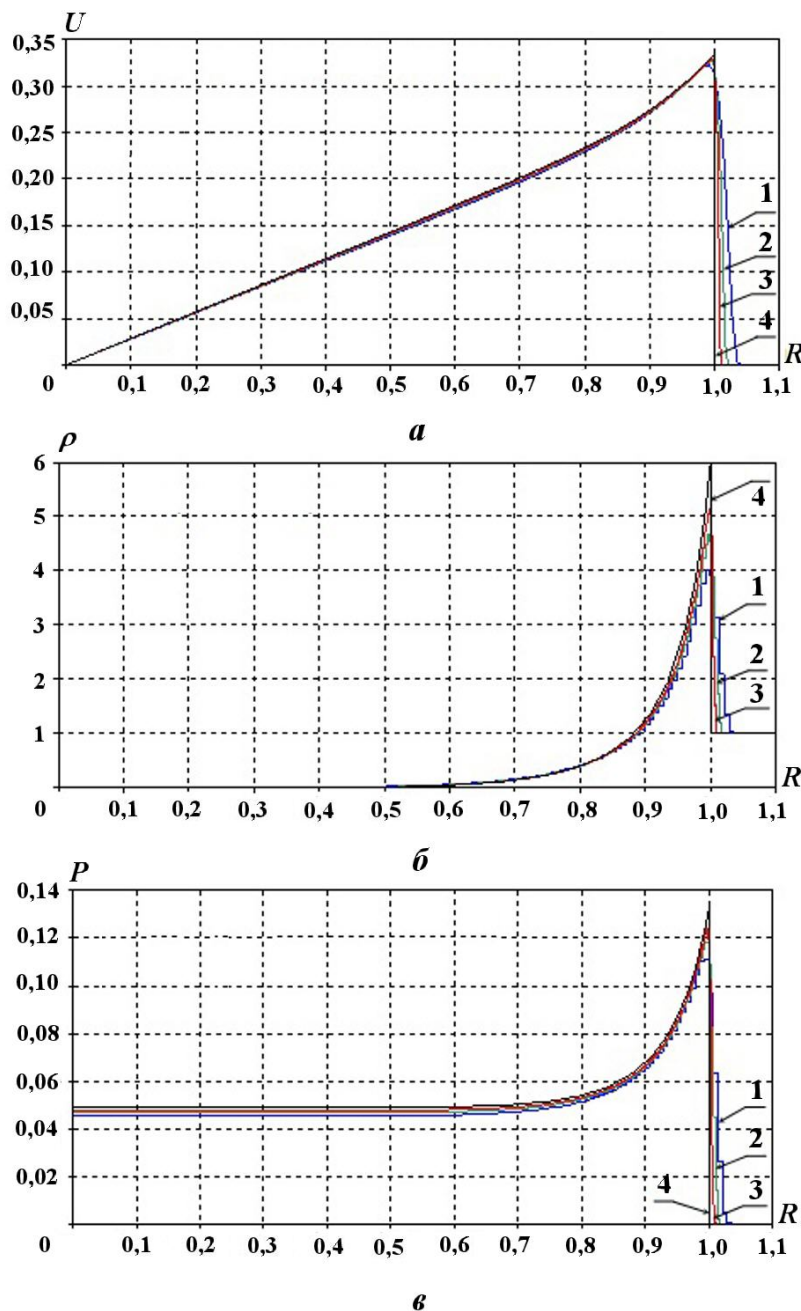


Рис. 3. Профили скорости (*a*), плотности (*б*) и давления (*в*) в расчетах ЛЭГАК-ВКЛ на сходимость с пересчетом величин на каждом шаге по времени,  $t = 1$ : 1 —  $h_R^0 = 0,01$ ; 2 —  $h_R^0 = 0,005$ ; 3 —  $h_R^0 = 0,0025$ ; 4 — аналитическое решение

1. Добавки к интегральной внутренней энергии каждой ячейки сетки неотрицательны.
2. Удельные внутренние энергии, вычисленные по интегральным вкладам внутренней энергии, отличаются от удельных внутренних энергий, вычисленных по интегральным энергиям с учетом поправок, на величину второго порядка малости по некоторому линейному размеру ячейки новой сетки.
3. На постоянном по пространству поле скоростей добавки к интегральной внутренней энергии равны нулю.

Представленный алгоритм консервативного пересчета величин можно использовать в паре с любой консервативной по полной энергии разностной схемой лагранжева этапа счета шага по времени.

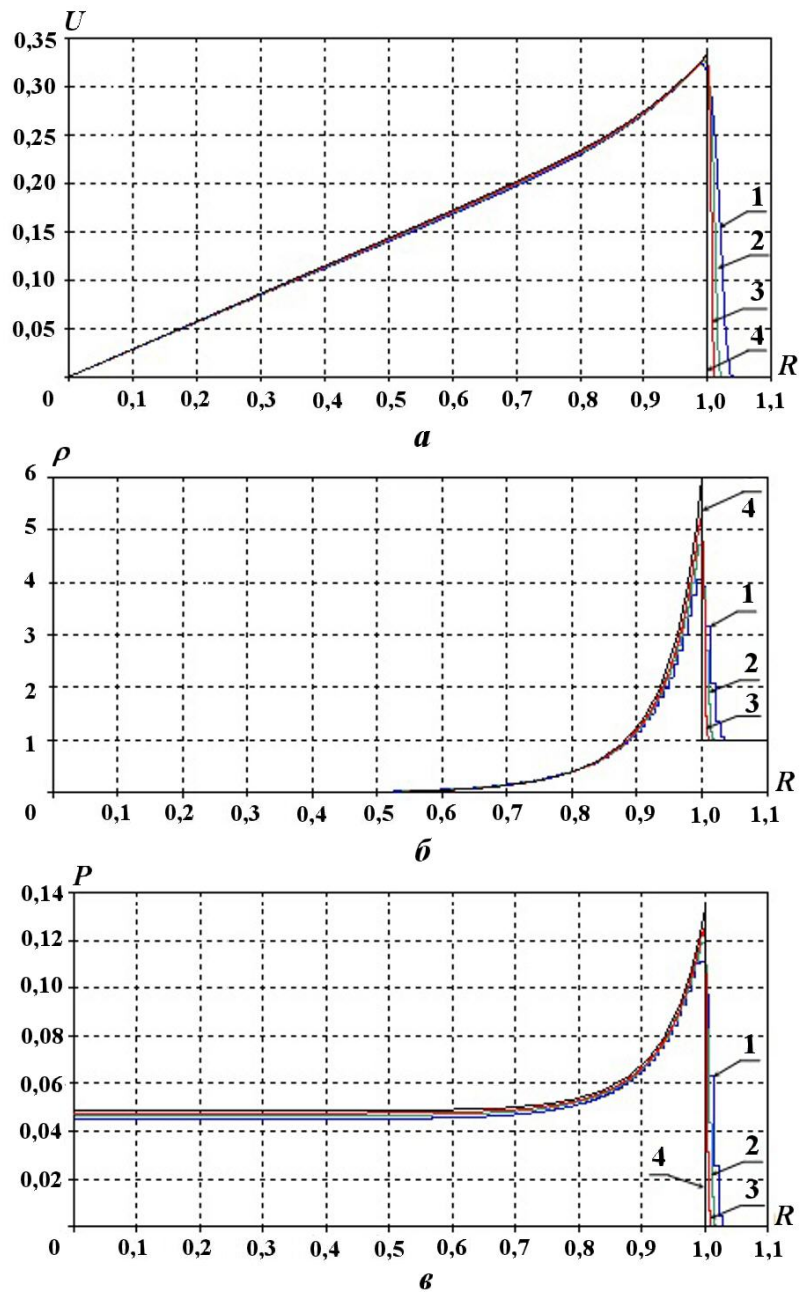


Рис. 4. Профили скорости ( $a$ ), плотности ( $b$ ) и давления ( $c$ ) в расчетах ЛЭГАК-ВКЛ на сходимость с пересчетом величин через 10 шагов по времени,  $t = 1$ : 1 —  $h_R^0 = 0,01$ ; 2 —  $h_R^0 = 0,005$ ; 3 —  $h_R^0 = 0,0025$ ; 4 — аналитическое решение

Таким образом, в совокупности получается полностью консервативная разностная схема газовой динамики на лагранжево-эйлеровой сетке.

При этом в разностной схеме лагранжева этапа можно не прибегать к разбиению ячеек на четырехугольники, а использовать стандартное определение массы узла сетки как четверти суммы масс ячеек, для которых данный узел является общей вершиной. Однако на этапе пересчета величин по-прежнему должны использоваться вложенные четырехугольники. Меняется только определение плотности в четырехугольниках, которые теперь должны вычисляться из условия того, что в них содержится четверть массы ячейки:

$$\rho j_{i-1/2,k-1/2} = \frac{1}{4} \frac{M_{i-1/2,k-1/2}}{V j_{i-1/2,k-1/2}}.$$

Отметим, что в численных расчетах по консервативной схеме нужно с известной осторожностью использовать различные операторы сглаживания поля скоростей. Зачастую эти операторы не сохраняют не только полную энергию, но и составляющие вектора количества движения.

### Список литературы

1. Хёрт С. Произвольный лагранжево-эйлеров численный метод // Численные методы в механике жидкостей. М.: Мир, 1973. С. 156—164.  
*Khert S. Proizvolny lagranzhevo-eylerov chislenny method // Chislennye metody v mekhanike zhidkostey. M.: Mir, 1973. S. 156—164.*
2. Hirt C. W., Amsden A. A., Cook J. L. An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds // J. Comp. Phys. 1974. Vol. 14, No 3. P. 227—253.
3. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. Т. 47, № 3. С. 271—306.  
*Godunov S. K. Raznostny metod chislennogo rascheta razryvnykh resheniy uravneniy gidrodinamiki // Matematicheskiy sbornik. 1959. T. 47, N 3. S. 271—306.*
4. Бондаренко Ю. А., Башуров В. В., Янилкин Ю. В. Математические модели и численные методы для решения задач нестационарной газовой динамики. Обзор зарубежной литературы: Препринт № 88-2003. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2003.  
*Bondarenko Yu. A., Bashurov V. V., Yanilkin Yu. V. Matematicheskie modeli i chislennye metody dlya resheniya zadach nestatsionarnoy gazovoy dinamiki. Obzor zarubezhnoy literatury: Preprint N 88-2003. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2003.*
5. Стенин А. М., Бондаренко Ю. А., Матвеев Ю. М., Сараев В. А., Трофимова Л. Я. Методика расчета газодинамических течений с выделением контактных границ между веществами, не совпадающих с линиями сетки (методика ВКЛ) // Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики. Тез. докл. 11-й Всерос. конф., посвященной памяти К. И. Бабенко / Под ред. А. В. Забродина, А. М. Молчанова, В. М. Тихомирова. Пущино, 5—9 октября 1996 г. Пущино, 1996. С. 65.  
*Stenin A. M., Bondarenko Yu. A., Matveev Yu. M., Saraev V. A., Trofimova L. Ya. Metodika rascheta gazodinamicheskikh techeniy s vydeleniem kontaktnykh granits mezhdu veshchestvami, ne sovpadayushchikh s liniyami setki (metodika VKL) // Teoreticheskie osnovy i konstruirovaniye chislennykh algoritmov resheniya zadach matematicheskoy fiziki. Tez. dokl. 11-y Vseros. konf., posvyashchennoy pamyati K. I. Babenko / Pod red. A. V. Zabrodina, A. M. Molchanova, V. M. Tikhomirova. Pushchino, 5—9 oktyabrya 1996 g. Pushchino, 1996. S. 65.*
6. Стенин А. М., Спиридонов В. Ф., Воронина Е. Б., Шкарубский В. В. Методика ЛЭГАК-ВКЛ численного моделирования двумерных газодинамических течений многокомпонентных сред с выделением контактных границ, не совпадающих с линиями сетки // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2010. Вып. 15. С. 154—169.  
*Stenin A. M., Spiridonov V. F., Voronina E. B., Shkarubskiy V. V. Metodika LEGAK-VKL chislennogo modelirovaniya dvumernykh gazodinamicheskikh techeniy mnogokomponentnykh sred s vydeleniem kontaktnykh granits, ne sovpadayushchikh s liniyami setki // Trudy RFYaTs-VNIIEF. 2010. Vyp. 15. S. 154—169.*
7. Головизнин В. М., Рязанов М. А., Самарский А. А., Сороковикова О. С. Разностные схемы со сбалансированными аппроксимациями конвективных потоков: Препринт № 56. М.: ИПМ АН СССР, 1984.  
*Goloviznin V. M., Ryazanov M. A., Samarskiy A. A., Sorokovikova O. S. Raznostnye skhemy so sbalansirovannymi approksimatsiyami konvektivnykh potokov: Preprint N 56. Moskva: IPM AN SSSR, 1984.*

8. *Авдеев П. А., Артамонов М. В., Бахрах С. М., Величко С. В., Володина Н. А., Воробьёва Н. М., Егоршин С. П., Есаева Е. Н., Ковалёва А. Д., Лучинин М. В., Проневич С. Н., Спиридонов В. Ф., Тарадай И. Ю., Тарасова А. Н., Шувалова Е. В.* Комплекс программ ЛЭГАК для расчета нестационарных течений многокомпонентной сплошной среды и принципы реализации комплекса на многопроцессорных ЭВМ с распределенной памятью // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2001. Вып. 3. С. 14–18.  
*Avdeev P. A., Artamonov M. V., Bakhrakh S. M., Velichko S. V., Volodina N. A., Vorobeva N. M., Egorshin S. P., Esaeva E. N., Kovaleva A. D., Luchinin M. V., Pronevich S. N., Spiridonov V. F., Taraday I. Yu., Tarasova A. N., Shuvalova E. V.* Kompleks programm LEGAK dlya rascheta nestatsionarnykh techeniy mnogokomponentnoy sploshnoy sredy i printsipy realizatsii kompleksa na mnogoprotsessornykh EVM s raspredelennoy pamuyatyu // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2001. Vyp. 3. S. 14–18.
9. *Самарский А. А., Попов Ю. П.* Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975.  
*Samarskiy A. A., Popov Yu. P.* Raznostnye skhemy gazovoy dinamiki. M.: Nauka, 1975.
10. *Бондаренко Ю. А.* Порядок аппроксимации, порядок численной сходимости и экономичность счета многомерной газовой динамики в переменных Эйлера на примере расчетов на сходимость задачи "Blast waves" // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2004. Вып. 4. С. 51–61.  
*Bondarenko Yu. A.* Poryadok approksimatsii, poryadok chislennoy skhodimosti i ekonomichnost scheta mnogomernoy gazovoy dinamiki v peremennykh Eylera na primere raschetov na skhodimost zadachi "Blast waves" // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2004. Vyp. 4. S. 51–61.
11. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: ГИТТЛ, 1957.  
*Sedov L. I.* Metody podobiya i razmernosti v mekhanike. M.: GITTL, 1957.
12. *Ландау Л. Д., Lifshits E. M.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.  
*Landau L. D., Lifshits E. M.* Teoreticheskaya fizika. T. VI. Gidrodinamika. M.: Nauka, 1986.

Статья поступила в редакцию 03.12.18.

CONSERVATIVE REMAPPING IN GAS-DYNAMIC DIFFERENCE SCHEMES ON LAGRANGIAN-EULERIAN MESHES / A. M. Stenin (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhny Novgorod Region).

The paper describes a conservative-in-total-energy global remapping algorithm for the Eulerian stage of the time step in gas-dynamic difference schemes on regular tetragonal Lagrangian-Eulerian spatial meshes. The values of the gas-dynamic quantities are remapped with conservation of the respective integral values. The values of specific internal energy are remapped subject to the conservation of the integral internal energy with corrections that provide total energy conservation. If a fully conservative difference scheme is used at the Lagrangian time-step stage, then the conservative remapping renders the whole scheme fully conservative at both Lagrangian and Eulerian stages. The results of benchmark computations of a strong point explosion are presented.

*Keywords:* gas dynamics, Lagrangian-Eulerian meshes, remapping, a fully conservative scheme, the Sedov blast.